Vol. 35 (2015)
No. 5

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

权分担一个值的亚纯函数的唯一性

李延玲, 刘慧芳
(江西师范大学数学与信息科学学院, 江西 南昌 330022)

摘 要: 本文研究了亚纯函数关于微分多项式权分担一个值的唯一性问题. 利用权分担值的思想, 获得了一个亚纯函数唯一性定理, 完善了 Bhoosnurmath 和 Dyavanal 所得的结果.
关键词: 亚纯函数; 微分多项式; 分担值; 唯一性
MR(2010) **主题分类号**: 30D30; 30D35 **中图分类号**: O174.52
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2015)05-1175-12

1 引言及主要结果

本文使用 Nevanlinna 值分布理论的标准记号和基本结果 [1−3].

设 f 和 g 是非常数亚纯函数, a 为任意有穷复数, 如果 $f-a$ 和 $g-a$ 的零点相同 (不计重级), 则称 f 与 g IM 分担 a. 如果 $f-a$ 和 $g-a$ 的零点相同, 且每个零点的重级也相同, 则称 f 与 g CM 分担 a.

设 f 为非常数亚纯函数, k 为非零整数或 $+\infty$, a 为任意复数或 ∞，我们用 $E_k(a,f)$ 表示 f 的 a 值点的集合，计其重数，其中当 f 的 a 值点的重数 $m\leq k$ 时，计 m 次，当 $m>k$ 时，计 $k+1$ 次.

定义 1.1 设 f 和 g 是非常数亚纯函数, 若 $E_k(a,f)=E_k(a,g)$, 则称 f 与 g 以权 k 分担 a，简记 f 与 g 分担 (a,k).

由定义 1.1 可知，如果 f 与 g 分担 (a,k), 则对任意正整数 $p(0\leq p<k)$，f 与 g 分担 (a,p). 特别地，如果 f 与 g IM 分担 a 或 CM 分担 a，则 f 与 g 分担 $(a,0)$ 或 (a,∞).

设 f 是非常数亚纯函数, k 是一正整数, 我们用 $N_{k)}(r,\frac{1}{f-a})$ 表示重数不超过 k 的 f 的 a 值点的计数函数, $\overline{N}_{k)}(r,\frac{1}{f-a})$ 为其相应的精简计数函数；用 $N_{(k}(r,\frac{1}{f-a})$ 表示重数不小于 k 的 f 的 a 值点的计数函数, $\overline{N}_{(k}(r,\frac{1}{f-a})$ 为其相应的精简计数函数.

定义 1.2 设 f 是非常数亚纯函数, k 是一正整数, 定义

$$N_k(r,\frac{1}{f-a})=\overline{N}_{(1}(r,\frac{1}{f-a})+\overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{f-a})+\cdots+\overline{N}_{(k}(r,\frac{1}{f-a}),$$
$$\delta_k(a,f)=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N_k(r,\frac{1}{f-a})}{T(r,f)}.$$

Hayman[4] 和 Clunie[5] 证明了

定理 A 设 $f(z)$ 为超越整函数, $n\geq 1$, 则 $f^nf'=1$ 有无穷多个根.

*收稿日期: 2013-04-07 接收日期: 2013-07-11
基金项目: 国家自然科学基金项目 (11201195); 江西省自然科学基金项目 (20122BAB201012; 20132BAB201008); 江西省教育厅科技项目 (GJJ12179).
作者简介: 李延玲 (1987–), 女, 福建厦门, 硕士, 主要研究方向: 复分析.

考虑定理 A 所相应的唯一性问题, Fang 和 Hua[6], Yang 和 Hua[7] 分别得到下述定理.

定理 B 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为非常数整函数, $n \geq 6$ 是一正整数. 如果 $f^n f'$ 与 $g^n g'$CM 分担 1, 则 $f(z) = c_1 e^{cz}, g(z) = c_2 e^{-cz}$, 其中 c_1, c_2, c 为满足 $(c_1c_2)^{n+1}c^2 = -1$ 的常数, 或者 $f(z) = tg(z)$, 其中 $t^{n+1} = 1$.

注意到 $f^n f' = \frac{1}{n+1}(f^{n+1})'$, 于是在文 [8] 中 Fang 将定理 B 延伸到 k 阶导数, 得到

定理 C 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为非常数整函数, n, k 为正整数且 $n > 2k + 4$. 如果 $[f^n]^{(k)}$ 与 $[g^n]^{(k)}$CM 分担 1, 则 $f(z) = c_1 e^{cz}$, $g(z) = c_2 e^{-cz}$, 其中 c_1, c_2, c 为满足 $(-1)^k (c_1c_2)^n (nc)^{2k} = 1$ 的常数, 或者 $f(z) = tg(z)$, 其中 $t^n = 1$.

定理 D 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为非常数整函数, n, k 为正整数且 $n > 2k+8$. 如果 $[f^n(f-1)]^{(k)}$ 与 $[g^n(g-1)]^{(k)}$CM 分担 1, 则 $f(z) \equiv g(z)$.

在文 [9] 中, Zhang 和 Lü将权分担值的思想应用于定理 C, 同时考虑亚纯函数的唯一性, 得到下述结果.

定理 E 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为超越亚纯函数, n, k, l 为自然数. 如果 $[f^n]^{(k)}$ 与 $[g^n]^{(k)}$ 分担 $(1, l)$, 且 n, k, l 满足以下条件之一:

(i) $l \geq 2$ 且 $n > 3k + 8$;

(ii) $l = 1$ 且 $n > 5k + 11$;

(iii) $l = 0$ 且 $n > 9k + 14$,

则 $f(z) = c_1 e^{cz}$, $g(z) = c_2 e^{-cz}$, 其中 c_1, c_2, c 为满足 $(-1)^k (c_1c_2)^n (nc)^{2k} = 1$ 的常数, 或者 $f(z) = tg(z)$, 其中 $t^n = 1$.

定理 D 考虑了 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为非常数整函数的情况. 当 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为非常数亚纯函数时, Bhoosnurmath 和 Dyavanal 在文 [10] 中得到下述结果.

定理 F 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为非常数亚纯函数, 且满足 $\Theta(\infty, f) > \frac{3}{n+1}$. n, k 是正整数且 $n > 3k + 13$. 如果 $[f^n(f-1)]^{(k)}$ 与 $[g^n(g-1)]^{(k)}$CM 分担 1, 则 $f(z) \equiv g(z)$.

本文中我们进一步应用权分担值的思想研究亚纯函数的唯一性, 得到下述结果, 改进和完善了定理 F.

定理 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为非常数亚纯函数, 且满足 $\Theta(\infty, f) > \frac{2}{n}$, b 为非零复常数, n, k, l 为自然数. 如果 $[f^n(f-1)]^{(k)}$ 与 $[g^n(g-1)]^{(k)}$ 分担 (b, l), 且 n, k, l 满足以下条件之一:

(i) $l \geq 2$ 且 $n > 3k + 11$;

(ii) $l = 1$ 且 $n > 5k + 15$;

(iii) $l = 0$ 且 $n > 9k + 20$,

则$f(z) \equiv g(z)$.

2 引理

引理 2.1 (见文献 [10]) 设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数, k, p 为正整数, 则

$$\begin{aligned} N_p(r, \frac{1}{f^{(k)}}) &\leq N_{p+k}(r, \frac{1}{f}) + k\overline{N}(r, f) + S(r, f) \\ &\leq (p+k)\overline{N}(r, \frac{1}{f}) + k\overline{N}(r, f) + S(r, f). \end{aligned}$$

引理 2.2 (见文献 [11]) 设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数, n 为正整数, 令 $P(f) = a_n f^n + \cdots +$

a_1f+a_0, 其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n(\neq 0)$ 是复常数, 则

$$T(r,P(f))=nT(r,f)+O(1).$$

引理 2.3 (见文献 [2]) 设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数, k 为正整数, c 为一非零有限复数, 则

$$\begin{aligned}T(r,f)&\leq \overline{N}(r,f)+N(r,\frac{1}{f})+N(r,\frac{1}{f^{(k)}-c})-N(r,\frac{1}{f^{(k+1)}})+S(r,f)\\&\leq \overline{N}(r,f)+N_{k+1}(r,\frac{1}{f})+\overline{N}(r,\frac{1}{f^{(k)}-c})-N_0^c(r,\frac{1}{f^{(k+1)}})+S(r,f),\end{aligned}$$

其中 $N_0^c(r,\frac{1}{f^{(k+1)}})$ 是满足 $f^{(k+1)}=0$ 且 $f(f^{(k)}-c)\neq 0$ 的点的计数函数.

设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为非常数亚纯函数, 我们用 $\overline{N}_L(r,\frac{1}{f-1})$ 表示 $f-1$ 和 $g-1$ 的公共零点中, 前者重级大于后者重级的那些点的精简计数函数.

引理 2.4 (见文献 [9]) 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为两个非常数亚纯函数, 如果 $f(z)$ 和 $g(z)$ IM 分担 1, 则

$$\overline{N}_L(r,\frac{1}{f-1})\leq \overline{N}(r,\frac{1}{f})+\overline{N}(r,f)+S(r,f).$$

引理 2.5 设 $f(z)$ 是超越亚纯函数, n, k 是正整数且 $n\geq k+3$, b 是非零常数, 则 $[\frac{f^n(f-1)}{b}]^{(k)}-1$ 有无穷多个零点.

证 令 $F=\frac{f^n(f-1)}{b}$, 由引理 2.2 和引理 2.3, 可得

$$\begin{aligned}(n+1)T(r,f)&=T(r,F)+S(r,f)\\&\leq N_{k+1}(r,\frac{1}{F})+N(r,\frac{1}{F^{(k)}-1})+\overline{N}(r,F)+S(r,f)\\&\leq N_{k+1}(r,\frac{1}{f^n})+N_{k+1}(r,\frac{1}{f-1})+N(r,\frac{1}{F^{(k)}-1})+\overline{N}(r,f)+S(r,f)\\&\leq (k+3)T(r,f)+N(r,\frac{1}{F^{(k)}-1})+S(r,f),\end{aligned}$$

移项得到

$$[n-(k+2)]T(r,f)\leq N(r,\frac{1}{F^{(k)}-1})+S(r,f).$$

由上式以及 $n\geq k+3$, 可得 $F^{(k)}-1$ 有无穷多个零点.

引理 2.6 (见文献 [2]) 设 f 是非常数亚纯函数, $\alpha_1(z)$, $\alpha_2(z)$ 是两个亚纯函数且满足 $T(r,\alpha_i)=S(r,f), i=1,2$, 则

$$T(r,f)\leq \overline{N}(r,f)+\overline{N}(r,\frac{1}{f-\alpha_1})+\overline{N}(r,\frac{1}{f-\alpha_2})+S(r,f).$$

引理 2.7 (见文献 [12]) 假设 $n(\geq 2)$ 和 m 是正整数, $l=\min\{2,m\}$. 设 f 和 g 是两个非常数亚纯函数, 满足 $\Theta(\infty,f)>\frac{1+l}{n+l}$, 如果

$$[af^{n+2}-bf^{n+1}]^m\equiv[ag^{n+2}-bg^{n+1}]^m,$$

其中 a 和 b 是两个非零有限复数, 则 $f\equiv g$.

3 定理的证明

假设 $F(z)=\frac{f^n(f-1)}{b}$ 和 $G(z)=\frac{g^n(g-1)}{b}$, 则

$$\begin{aligned}\Theta(0,F) &= 1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\overline{N}(r,\frac{1}{F})}{T(r,F)}=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\overline{N}(r,\frac{1}{f})+\overline{N}(r,\frac{1}{f-1})}{(n+1)T(r,f)}\\ &\geq 1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{2T(r,f)}{(n+1)T(r,f)}=\frac{n-1}{n+1}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

同理

$$\Theta(0,G)\geq\frac{n-1}{n+1},\tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}\Theta(\infty,F) &= 1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\overline{N}(r,F)}{T(r,F)}=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\overline{N}(r,f)}{(n+1)T(r,f)}\\ &\geq 1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{T(r,f)}{(n+1)T(r,f)}=\frac{n}{n+1}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

同理

$$\Theta(\infty,G)\geq\frac{n}{n+1}.\tag{3.4}$$

由

$$N_{k+1}(r,\frac{1}{F})\leq N_{k+1}(r,\frac{1}{f-1})+N_{k+1}(r,\frac{1}{f})\leq T(r,f)+N_{k+1}(r,\frac{1}{f})$$

及 $N_{k+1}(r,\frac{1}{f})$ 的定义得

$$\delta_{k+1}(0,F)=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N_{k+1}(r,\frac{1}{F})}{T(r,F)}\geq 1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{(k+2)T(r,f)}{(n+1)T(r,f)}=\frac{n-k-1}{n+1}.\tag{3.5}$$

同理

$$\delta_{k+1}(0,G)\geq\frac{n-k-1}{n+1}.\tag{3.6}$$

令

$$H=\Big(\frac{F^{(k+2)}}{F^{(k+1)}}-\frac{2F^{(k+1)}}{F^{(k)}-1}\Big)-\Big(\frac{G^{(k+2)}}{G^{(k+1)}}-\frac{2G^{(k+1)}}{G^{(k)}-1}\Big).\tag{3.7}$$

首先证明 $H\equiv 0$. 假设 $H\not\equiv 0$, 因为 $[f^n(f-1)]^{(k)}$ 与 $[g^n(g-1)]^{(k)}$ 分担 (b,l), 则 $F^{(k)}$ 和 $G^{(k)}$ 分担 $(1,l)$. 如果 z_0 是 $F^{(k)}(z)-1$ 和 $G^{(k)}(z)-1$ 的公共单零点, 则 $H(z_0)=0$. 因此

$$\begin{aligned}N_{1)}(r,\frac{1}{F^{(k)}-1}) &= N_{1)}(r,\frac{1}{G^{(k)}-1})\leq\overline{N}(r,\frac{1}{H})\\ &\leq T(r,H)+O(1)\leq N(r,H)+S(r,F)+S(r,G).\end{aligned}\tag{3.8}$$

由引理 2.3, 有

$$\begin{aligned}T(r,F)+T(r,G) \leq\ & \overline{N}(r,F)+\overline{N}(r,G)+N_{k+1}(r,\frac{1}{F})+N_{k+1}(r,\frac{1}{G})\\ &+\overline{N}(r,\frac{1}{F^{(k)}-1})+\overline{N}(r,\frac{1}{G^{(k)}-1})-N_0(r,\frac{1}{F^{(k+1)}})\\ &-N_0(r,\frac{1}{G^{(k+1)}})+S(r,F)+S(r,G),\end{aligned}\tag{3.9}$$

其中 $N_0(r, \frac{1}{F^{(k+1)}})$ 是满足 $F^{(k+1)}=0$ 且 $F(F^{(k)}-1)\neq 0$ 的点的计数函数. 显然

$$N(r,\frac{1}{F^{(k)}-1})\leq T(r,F^{(k)})+O(1)\leq T(r,F)+k\overline{N}(r,F)+S(r,F). \tag{3.10}$$

如果 $l\geq 1$, 由 (3.7) 和 $F^{(k)}$ 和 $G^{(k)}$ 分担 $(1,l)$, 我们知 H 只有一阶极点, 且极点可能出现在 $F^{(k)}-1$ 和 $G^{(k)}-1$ 的重数不小于 $l+1$ 的公共零点, $F^{(k+1)}$ 和 $G^{(k+1)}$ 的零点, 以及 F 和 G 的极点处，因此

$$\begin{aligned} N(r,H) \quad \leq \quad & \overline{N}(r,F)+\overline{N}(r,G)+\overline{N}(r,\frac{1}{F})+\overline{N}(r,\frac{1}{G}) \\ & +\overline{N}_{(l+1}(r,\frac{1}{F^{(k)}-1})+N_0(r,\frac{1}{F^{(k+1)}})+N_0(r,\frac{1}{G^{(k+1)}}), \end{aligned} \tag{3.11}$$

当 $l\geq 2$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \overline{N}_{(l+1}(r,\frac{1}{F^{(k)}-1})+\overline{N}(r,\frac{1}{F^{(k)}-1})+\overline{N}(r,\frac{1}{G^{(k)}-1}) \\ \leq \quad & N(r,\frac{1}{F^{(k)}-1})+N_{1)}(r,\frac{1}{G^{(k)}-1}), \end{aligned} \tag{3.12}$$

由 (3.8)–(3.12) 式, 得

$$\begin{aligned} T(r,G) \quad \leq \quad & (k+2)\overline{N}(r,F)+2\overline{N}(r,G)+\overline{N}(r,\frac{1}{F})+\overline{N}(r,\frac{1}{G}) \\ & +N_{k+1}(r,\frac{1}{F})+N_{k+1}(r,\frac{1}{G})+S(r,F)+S(r,G). \end{aligned} \tag{3.13}$$

令

$$\Delta_1=(k+2)\Theta(\infty,F)+2\Theta(\infty,G)+\Theta(0,F)+\Theta(0,G)+\delta_{k+1}(0,F)+\delta_{k+1}(0,G).$$

由 (3.1)–(3.6) 式和 $n>3k+11$ 得

$$\Delta_1\geq k+8-\frac{3k+12}{n+1}>k+7.$$

不失一般性, 假设存在一个具有无穷线测度的集合 I, 使得当 $r\in I$ 时, 有 $T(r,F)\leq T(r,G)$, 由 (3.13) 可得 $\forall\varepsilon(0<\varepsilon<\Delta_1-(k+7))$, 当 r 充分大且 $r\in I$ 时, 有

$$\begin{aligned} T(r,G) \quad \leq \quad & [(k+2)(1-\Theta(\infty,F))+2(1-\Theta(\infty,G))+(1-\Theta(0,F))+(1-\Theta(0,G)) \\ & +(1-\delta_{k+1}(0,F))+(1-\delta_{k+1}(0,G))+\varepsilon]T(r,G)+S(r,G) \\ \leq \quad & (k+8-\Delta_1+\varepsilon)T(r,G)+S(r,G), \end{aligned}$$

即 $[\Delta_1-(k+7)-\varepsilon]T(r,G)\leq S(r,G)$, 矛盾.

当 $l=1$ 时, 有

$$\overline{N}(r,\frac{1}{F^{(k)}-1})+\overline{N}(r,\frac{1}{G^{(k)}-1})\leq N_{1)}(r,\frac{1}{F^{(k)}-1})+N(r,\frac{1}{F^{(k)}-1}). \tag{3.14}$$

由 (3.8)–(3.11) 式和 (3.14) 式得

$$\begin{aligned} T(r,G) &\le (k+2)\overline{N}(r,F)+2\overline{N}(r,G)+\overline{N}(r,\frac{1}{F})+\overline{N}(r,\frac{1}{G}) \\ &\quad +N_{k+1}(r,\frac{1}{F})+N_{k+1}(r,\frac{1}{G})+\overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{F^{(k)}-1})+S(r,F)+S(r,G). \end{aligned} \tag{3.15}$$

又由引理 2.1 可得

$$\begin{aligned} &\overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{F^{(k)}-1})\le\overline{N}(r,\frac{1}{F^{(k+1)}})=N_1(r,\frac{1}{F^{(k+1)}}) \\ \le\ & N_{k+2}(r,\frac{1}{F})+(k+1)\overline{N}(r,F)+S(r,F). \end{aligned} \tag{3.16}$$

结合 (3.15) 和 (3.16) 式得

$$\begin{aligned} T(r,G) &\le (2k+3)\overline{N}(r,F)+2\overline{N}(r,G)+\overline{N}(r,\frac{1}{F})+\overline{N}(r,\frac{1}{G}) \\ &\quad +N_{k+1}(r,\frac{1}{F})+N_{k+1}(r,\frac{1}{G})+N_{k+2}(r,\frac{1}{F})+S(r,F)+S(r,G). \end{aligned} \tag{3.17}$$

令

$$\Delta_2=(2k+3)\Theta(\infty,F)+2\Theta(\infty,G)+\Theta(0,F)+\Theta(0,G)+\delta_{k+1}(0,F)+\delta_{k+1}(0,G)+\delta_{k+2}(0,F).$$

由 (3.1)–(3.6) 式和 $n>5k+15$ 得

$$\Delta_2\ge 2k+10-\frac{5k+16}{n+1}>2k+9.$$

由 (3.17) 式可得 $\forall\varepsilon(0<\varepsilon<\Delta_2-(2k+9))$, 当 r 充分大且 $r\in I$ 时, 有

$$\begin{aligned} T(r,G) &\le [(2k+3)(1-\Theta(\infty,F))+2(1-\Theta(\infty,G))+(1-\Theta(0,F))+(1-\Theta(0,G)) \\ &\quad +(1-\delta_{k+1}(0,F))+(1-\delta_{k+1}(0,G))+(1-\delta_{k+2}(0,F))+\varepsilon]T(r,G)+S(r,G) \\ &\le (2k+10-\Delta_2+\varepsilon)T(r,G)+S(r,G), \end{aligned}$$

即 $[\Delta_2-(2k+9)-\varepsilon]T(r,G)\le S(r,G)$, 矛盾.

如果 $l=0$, 即 $F^{(k)}$ 与 $G^{(k)}$IM 分担 1, 则有

$$\begin{aligned} N(r,H) &\le \overline{N}(r,F)+\overline{N}(r,G)+\overline{N}(r,\frac{1}{F})+\overline{N}(r,\frac{1}{G})+\overline{N}_L(r,\frac{1}{F^{(k)}-1}) \\ &\quad +\overline{N}_L(r,\frac{1}{G^{(k)}-1})+N_0(r,\frac{1}{F^{(k+1)}})+N_0(r,\frac{1}{G^{(k+1)}}). \end{aligned} \tag{3.18}$$

由引理 2.4 得

$$\begin{aligned} &\overline{N}_L(r,\frac{1}{F^{(k)}-1})+2\overline{N}_L(r,\frac{1}{G^{(k)}-1}) \\ \le\ & \overline{N}(r,F)+2\overline{N}(r,G)+\overline{N}(r,\frac{1}{F^{(k)}})+2\overline{N}(r,\frac{1}{G^{(k)}})+S(r,F)+S(r,G). \end{aligned} \tag{3.19}$$

又由引理 2.1, 可得

$$\begin{aligned}&\overline{N}(r,\frac{1}{F^{(k)}})+2\overline{N}(r,\frac{1}{G^{(k)}})=N_1(r,\frac{1}{F^{(k)}})+2N_1(r,\frac{1}{G^{(k)}})\\ \leq\ & N_{k+1}(r,\frac{1}{F})+2N_{k+1}(r,\frac{1}{G})+k\overline{N}(r,F)+2k\overline{N}(r,G)+S(r,F)+S(r,G).\end{aligned}\tag{3.20}$$

由于 $F^{(k)}$ 与 $G^{(k)}$IM 分担 1, 所以

$$\begin{aligned}&\overline{N}(r,\frac{1}{F^{(k)}-1})+\overline{N}(r,\frac{1}{G^{(k)}-1})\\ \leq\ & N_{1)}(r,\frac{1}{F^{(k)}-1})+\overline{N}_L(r,\frac{1}{G^{(k)}-1})+N(r,\frac{1}{F^{(k)}-1}).\end{aligned}\tag{3.21}$$

结合 (3.8)–(3.10) 和 (3.18)–(3.21) 式得

$$\begin{aligned}T(r,G)\ \leq\ & (2k+3)\overline{N}(r,F)+(2k+4)\overline{N}(r,G)+\overline{N}(r,\frac{1}{F})+\overline{N}(r,\frac{1}{G})\\ &+2N_{k+1}(r,\frac{1}{F})+3N_{k+1}(r,\frac{1}{G})+S(r,F)+S(r,G).\end{aligned}\tag{3.22}$$

令

$$\Delta_3=(2k+3)\Theta(\infty,F)+(2k+4)\Theta(\infty,G)+\Theta(0,F)+\Theta(0,G)+2\delta_{k+1}(0,F)+3\delta_{k+1}(0,G).$$

由 (3.1)–(3.6) 式和 $n>9k+21$ 得

$$\Delta_3\geq 4k+14-\frac{9k+21}{n+1}>4k+13.$$

由 (3.22) 式可得 $\forall\varepsilon(0<\varepsilon<\Delta_3-(4k+13))$, 当 r 充分大且 $r\in I$ 时, 有

$$\begin{aligned}&T(r,G)\leq[(2k+3)(1-\Theta(\infty,F))+(2k+4)(1-\Theta(\infty,G))+(1-\Theta(0,F))\\ &+(1-\Theta(0,G))+2(1-\delta_{k+1}(0,F))+3(1-\delta_{k+1}(0,G))+\varepsilon]T(r,G)+S(r,G)\\ \leq\ & (4k+14-\Delta_3+\varepsilon)T(r,G)+S(r,G),\end{aligned}$$

即 $[\Delta_3-(4k+13)-\varepsilon]T(r,G)\leq S(r,G)$, 矛盾.

综上, 得 $H(z)\equiv 0$, 即

$$\frac{F^{(k+2)}}{F^{(k+1)}}-\frac{2F^{(k+1)}}{F^{(k)}-1}\equiv\frac{G^{(k+2)}}{G^{(k+1)}}-\frac{2G^{(k+1)}}{G^{(k)}-1}.$$

对上式积分得

$$\log F^{(k+1)}-2\log(F^{(k)}-1)=\log G^{(k+1)}-2\log(G^{(k)}-1)+\log A,$$

其中 $A(\neq 0)$ 是常数. 故

$$\frac{F^{(k+1)}}{(F^{(k)}-1)^2}=\frac{AG^{(k+1)}}{(G^{(k)}-1)^2}.$$

再对上式积分得

$$-\frac{1}{F^{(k)}-1}=-\frac{A}{G^{(k)}-1}-B,$$

其中 B 是常数, 上式可改写成

$$\frac{1}{F^{(k)}-1}=\frac{BG^{(k)}+A-B}{G^{(k)}-1}, \tag{3.23}$$

其中 $A(\neq 0), B$ 是常数. 由 (3.23) 式可知 $F^{(k)}$ 和 $G^{(k)}$ 分担 $(1,\infty)$. 下面分三种情形讨论:

情形 1 $B\neq 0$ 且 $A\neq B$. 如果 $B=-1$, 则从 (3.23) 式, 有

$$F^{(k)}=\frac{-A}{G^{(k)}-A-1}.$$

因此

$$\overline{N}(r,\frac{1}{G^{(k)}-A-1})=\overline{N}(r,F^{(k)})=\overline{N}(r,f). \tag{3.24}$$

因为 $A\neq B=-1$, 由引理 2.2, 引理 2.3 和 (3.24) 式, 有

$$\begin{aligned}(n+1)T(r,g) &= T(r,G)+S(r,G)\\ &\leq \overline{N}(r,G)+N_{k+1}(r,\frac{1}{G})+\overline{N}(r,\frac{1}{G^{(k)}-A-1})+S(r,G)\\ &\leq \overline{N}(r,g)+N_{k+1}(r,\frac{1}{G})+\overline{N}(r,f)+S(r,G)\\ &\leq T(r,f)+(k+3)T(r,g)+S(r,g).\end{aligned}$$

不失一般性, 假设存在一个具有无穷线测度的集合 I, 使得当 $r\in I$ 时，有 $T(r,f)\leq T(r,g)$. 因此由上述不等式知当 $r\in I$ 时, 我们有 $(n-k-3)T(r,g)\leq S(r,g)$. 这与 $n>3k+11$ 矛盾. 如果 $B\neq -1$, 由 (3.23) 式, 得到

$$F^{(k)}-(1+\frac{1}{B})=\frac{-A}{B^2[G^{(k)}+\frac{A-B}{B}]}.$$

因此

$$\overline{N}(r,\frac{1}{G^{(k)}-\frac{B-A}{B}})=\overline{N}(r,F^{(k)}-(1+\frac{1}{B}))=\overline{N}(r,f). \tag{3.25}$$

由引理 2.2, 引理 2.3 和 (3.25) 式, 有

$$\begin{aligned}(n+1)T(r,g) &= T(r,G)+S(r,G)\\ &\leq \overline{N}(r,G)+N_{k+1}(r,\frac{1}{G})+\overline{N}(r,\frac{1}{G^{(k)}-\frac{B-A}{B}})+S(r,G)\\ &\leq \overline{N}(r,g)+N_{k+1}(r,\frac{1}{G})+\overline{N}(r,f)+S(r,G)\\ &\leq T(r,f)+(k+3)T(r,g)+S(r,g).\end{aligned}$$

因此当 $r\in I$ 时, 有 $(n-k-3)T(r,g)\leq S(r,g)$, 这与 $n>3k+11$ 矛盾.

情形 2 $B\neq 0$ 且 $A=B$. 如果 $B\neq -1$, 则从 (3.23) 式, 有

$$\frac{1}{F^{(k)}}=\frac{BG^{(k)}}{(1+B)G^{(k)}-1},$$

由引理 2.1, 有

$$\overline{N}(r,\frac{1}{G^{(k)}-\frac{1}{1+B}})\leq \overline{N}(r,\frac{1}{F^{(k)}})\leq N_{k+1}(r,\frac{1}{F})+k\overline{N}(r,F)+S(r,F). \tag{3.26}$$

由引理 2.2, 引理 2.3 和 (3.26) 式, 有

$$\begin{aligned}(n+1)T(r,g)&=T(r,G)+S(r,G)\\&\leq \overline{N}(r,G)+N_{k+1}(r,\frac{1}{G})+\overline{N}(r,\frac{1}{G^{(k)}-\frac{1}{1+B}})+S(r,G)\\&\leq \overline{N}(r,G)+N_{k+1}(r,\frac{1}{G})+N_{k+1}(r,\frac{1}{F})+k\overline{N}(r,F)+S(r,F)+S(r,G)\\&\leq (2k+2)T(r,f)+(k+3)T(r,g)+S(r,g).\end{aligned}$$

因此当 $r\in I$ 时, 有 $(n-3k-4)T(r,g)\leq S(r,g)$, 这与 $n>3k+11$ 矛盾. 如果 $B=-1$, 从 (3.23) 式, 有

$$F^{(k)}G^{(k)}\equiv 1,$$

即

$$[f^n(f-1)]^{(k)}[g^n(g-1)]^{(k)}\equiv b^2. \tag{3.27}$$

假设 z_0 是 f 的 p 重零点, 由 (3.27) 式, 我们知道 z_0 是 g 的极点, 令其重数为 q, 故 $np-k=nq+q+k$, 即 $n(p-q)=q+2k$, 从而有 $p\geq q+1$ 且 $q+2k\geq n$, 因此

$$p\geq n-2k+1>k+12\geq 13.$$

假设 z_1 是 $f-1$ 的 p_1 重零点, 则 z_1 是 $[f^n(f-1)]^{(k)}$ 的 p_1-k 重零点. 由 (3.27) 式，我们知道 z_1 是 g 的极点, 令其重数为 q_1, 故 $p_1-k=nq_1+q_1+k$, 即 $p_1=(n+1)q_1+2k$, 则

$$p_1\geq n+2k+1>5k+12\geq 17.$$

假设 z_2 是 f' 的 p_2 重零点, 但不是 $f(f-1)$ 的零点, 由 (3.27) 式, 我们知道 z_2 是 g 的极点, 令其重数为 q_2, 故 $p_2-(k-1)=nq_2+q_2+k$, 即 $p_2=(n+1)q_2+2k-1$, 则

$$p_2\geq n+2k>5k+11\geq 16.$$

类似于上面的分析, 可以得到关于 $[g^n(g-1)]^{(k)}$ 零点的相似结果.

另一方面, 假设 z_3 是 f 的极点, 由 (3.27) 式, 我们知道 z_3 是 $[g^n(g-1)]^{(k)}$ 的零点, 故

$$\begin{aligned}\overline{N}(r,f)&\leq \overline{N}(r,\frac{1}{g})+\overline{N}(r,\frac{1}{g-1})+\overline{N}(r,\frac{1}{g'})\\&\leq \frac{1}{13}N(r,\frac{1}{g})+\frac{1}{17}N(r,\frac{1}{g-1})+\frac{1}{16}N(r,\frac{1}{g'})\\&\leq 0.2T(r,g)+S(r,g).\end{aligned} \tag{3.28}$$

由第二基本定理和 (3.28) 式, 有

$$\begin{aligned} T(r,f) &\leq \overline{N}(r,\frac{1}{f})+\overline{N}(r,\frac{1}{f-1})+\overline{N}(r,f)+S(r,f) \\ &\leq \frac{1}{13}N(r,\frac{1}{f})+\frac{1}{17}N(r,\frac{1}{f-1})+0.2T(r,g)+S(r,f)+S(r,g) \\ &\leq 0.14T(r,f)+0.2T(r,g)+S(r,f)+S(r,g). \end{aligned} \tag{3.29}$$

类似地, 有

$$T(r,g)\leq 0.14T(r,g)+0.2T(r,f)+S(r,f)+S(r,g). \tag{3.30}$$

由 (3.29) 和 (3.30) 式得

$$T(r,f)+T(r,g)\leq 0.34[T(r,f)+T(r,g)]+S(r,f)+S(r,g),$$

即

$$0.66[T(r,f)+T(r,g)]\leq S(r,f)+S(r,g),$$

矛盾.

情形 3 $B=0$ 且 $A\neq 0$, 由 (3.23) 式得

$$F^{(k)}=\frac{1}{A}G^{(k)}+1-\frac{1}{A}. \tag{3.31}$$

对上式积分可得

$$F=\frac{1}{A}G+\varphi(z), \tag{3.32}$$

其中 $\varphi(z)$ 是一个次数不超过 k 的多项式. 由 (3.32) 式和引理 2.5, 可知 f 和 g 或者都是超越亚纯函数, 或者都是有理函数.

下面证明 $\varphi(z)\equiv 0$.

情形 1 f 和 g 都是超越亚纯函数. 假设 $\varphi(z)\not\equiv 0$, 由 (3.32) 式和引理 2.2 得

$$T(r,g)=T(r,f)+S(r,f). \tag{3.33}$$

再结合引理 2.6, (3.32) 和 (3.33) 式得

$$\begin{aligned} (n+1)T(r,f) &= T(r,F)+S(r,f) \\ &\leq \overline{N}(r,F)+\overline{N}(r,\frac{1}{F})+\overline{N}(r,\frac{1}{F-\varphi})+S(r,f) \\ &\leq \overline{N}(r,f)+\overline{N}(r,\frac{1}{f})+\overline{N}(r,\frac{1}{f-1})+\overline{N}(r,\frac{1}{g})+\overline{N}(r,\frac{1}{g-1})+S(r,f) \\ &\leq 5T(r,f)+S(r,f). \end{aligned}$$

由 $n>3k+11$ 可知上式不可能成立, 故 $\varphi(z)\equiv 0$.

情形 2 f 和 g 都是有理函数. 假设 $\varphi(z)\not\equiv 0$, 由 (3.32) 式和引理 2.2 得

$$T(r,g)\leq T(r,f)+\frac{k}{n+1}\log r+O(1). \tag{3.34}$$

再结合第二基本定理和引理 2.2, (3.32) 和 (3.34) 式得

$$\begin{aligned}
(n+1)T(r,f) &= T(r,F)+O(1)\\
&= T(r,\frac{F}{\varphi}\varphi)+O(1)\\
&\leq T(r,\frac{F}{\varphi})+T(r,\varphi)+O(1)\\
&\leq \overline{N}(r,\frac{\varphi}{F})+\overline{N}(r,\frac{1}{\frac{F}{\varphi}-1})+\overline{N}(r,\frac{F}{\varphi})+T(r,\varphi)+O(1)\\
&\leq \overline{N}(r,\frac{\varphi}{F})+\overline{N}(r,\frac{\varphi}{G})+\overline{N}(r,\frac{F}{\varphi})+T(r,\varphi)+O(1)\\
&\leq \overline{N}(r,\frac{1}{F})+\overline{N}(r,\frac{1}{G})+\overline{N}(r,F)+\overline{N}(r,\frac{1}{\varphi})+T(r,\varphi)+O(1)\\
&\leq \overline{N}(r,\frac{1}{f})+\overline{N}(r,\frac{1}{f-1})+\overline{N}(r,\frac{1}{g})+\overline{N}(r,\frac{1}{g-1})+\overline{N}(r,f)\\
&\quad +\overline{N}(r,\frac{1}{\varphi})+T(r,\varphi)+O(1)\\
&\leq 3T(r,f)+2T(r,g)+2T(r,\varphi)+O(1)\\
&\leq 5T(r,f)+(2k+1)\log r+O(1).
\end{aligned}$$

移项可得

$$(n-4)T(r,f)\leq(2k+1)\log r+O(1).$$

由 $n>3k+11$ 可知上式不可能成立, 故 $\varphi(z)\equiv 0$. 再结合 (3.31) 和 (3.32) 可得 $A=1$, 从而可得 $F\equiv G$, 即

$$f^n(f-1)\equiv g^n(g-1).$$

故由 $\Theta(\infty,f)>\frac{2}{n}$ 和引理 2.7, 得 $f\equiv g$.

参 考 文 献

[1] 杨乐. 值分布论及其新研究 [M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[2] Hayman W K. Meromorphic functions[M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[3] Yi H X, Yang C C. Uniqueness theory of meromorphic functions[M]. New York: Kluwer Academic Publishers, 2003.

[4] Hayman W K. Picard values of meromorphic functions and their derivatives[J]. Ann. of Math., 1959, 70: 9–42.

[5] Clunie J. On a result of Hayman[J]. J. London Math. Soc., 1967, 42: 389–392.

[6] Fang M L, Hua X H. Entire functions that share one value[J]. J. Nanjing Univ. Math., 1996, 13: 44–48.

[7] Yang C C, Hua X H. Uniqueness and value-sharing of meromorphic functions[J]. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 1997, 22: 395–406.

[8] Fang M L. Uniqueness and value-sharing of entire functions[J]. Comput. Math. Appl., 2002, 44: 823–831.

[9] Zhang T D, Lü W R. Uniqueness theorems on meromorphic functions sharing one value[J]. Comput. Math. Appl., 2008, 55: 2981–2992.

[10] Bhoosnurmath S S, Dyavanal R S. Uniqueness and value-sharing of meromorphic functions[J]. Comput. Math. Appl., 2007, 53: 1191–1205.

[11] Yang C C. On deficiencies of differential polynomials II[J]. Math. Z., 1972, 125: 107–112.

[12] Li J T, Li C H. Uniqueness of meromorphic or enrire functions and their differential polynomials[J]. Acta Math. Sci., 2006, 26: 1166–1178.

UNIQUENESS ON MEROMORPHIC FUNCTIONS SHARING ONE VALUE WITH WEIGHT

LI Yan-ling, LIU Hui-fang

(*College of Mathematics and Information Science, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China*)

Abstract: In this paper, we study the uniqueness problem of meromorphic functions concerning their differential polynomials sharing one value with weight. By using the weighted sharing method, we obtain one uniqueness theorem of meromorphic functions, which improves the result given by Bhoosnurmath and Dyavanal.

Keywords: meromorphic function; differential polynomial; shared value; uniqueness.

2010 MR Subject Classification: 30D30; 30D35