Vol. 35 (2015)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

椭圆型奇异摄动问题差分格式的一致收敛性分析

周 琴
(湖南涉外经济学院信息科学与工程学院, 湖南 长沙 410205)

摘 要: 本文研究了一类椭圆型奇异摄动问题. 利用 Bakhvalov-Shishkin 网格上的差分方法, 获得了数值解一致一阶收敛于真解的结果.

关键词: 奇异摄动; Bakhvalov-Shishkin 网格; 差分格式; 比较定理; 一致收敛
MR(2010) **主题分类号**: 65M12 **中图分类号**: O241.82
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2015)04-0933-08

1 引言

在许多实际问题中, 例如物理、化学、气象、地质及生物等领域会遇到大量的非线性奇异摄动问题. 近年来, 关于对流扩散奇异摄动问题和一维奇异摄动问题, 已有了较多的研究成果, 如文献 [1, 3] 等. 而相对来说, 二维奇异摄动问题方面的研究成果较少. 如文献 [4] 考虑了一类椭圆型奇异摄动问题, 证明了该问题的解可分解为四部分, 并给出了每部分解的导数界. 文献 [5] 和文献 [6] 在层适应网格上, 运用有限元方法分析二维奇异摄动问题, 给出了数值解的误差界. 另外, 文献 [7] 考虑了一类含两个小参数的二维问题, 给出了解的一种分解形式.

我们考虑一类椭圆型奇异摄动对流扩散问题:

$$\begin{cases} Lu := -\varepsilon(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + b_1(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial x} + b_2(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u \\ \qquad = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega = (0,1)^2, \\ u|_\Gamma = g(x,y), \quad \Gamma = \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 ε 是一个常数, 满足 $0 < \varepsilon \ll 1$. 系数 b_1、b_2、c、f 充分光滑, 且存在常数 β_1、β_2 使得 $b_1(x,y) \geq 2\beta_1 > 0$, $b_2(x,y) \geq 2\beta_2 > 0$, $c(x,y) \geq 0$.

对于问题 (1.1) 的一种特殊形式, 文献 [5] 用有限元方法得到的数值解非一致收敛于真解. 而我们构造了问题 (1.1) 的差分格式, 在 Bakhvalov-Shishkin 网格 (简称 B-S 网格, 见文献 [2]) 上分析问题, 通过构造网格函数并利用比较定理 (见文献 [1]) 等证明了数值解一致一阶收敛于真解. 最后, 我们通过数值实验验证了理论结果. 文中 C 在不同处可代表不同的常数.

2 差分格式和网格

*收稿日期: 2013-06-15 接收日期: 2013-12-30
基金项目: 湖南省高等学校科学研究一般项目 (10C0913).
作者简介: 周琴 (1984–), 女, 湖南长沙, 讲师, 主要研究方向: 偏微分方程数值方法理论及其应用.

设 N 为整数, 我们首先在网格 $W_{N,N}=\{(x_i,y_j)|0=x_0<x_1<\cdots<x_N=1,\ 0=y_0<y_1<\cdots<y_N=1\}$ 上考虑问题 (1.1).

记 $h_{x,i}=x_i-x_{i-1}$, $\hbar_{x,i}=(h_{x,i}+h_{x,i+1})/2$, $h_{y,j}=y_j-y_{j-1}$, $\hbar_{y,j}=(h_{y,j}+h_{y,j+1})/2$, 对任意函数 $v(x,y)$ 定义

$$D_xv_{ij}=\frac{v_{ij}-v_{i-1,j}}{h_{x,i}},\ \delta_{xx}^2v_{ij}=\frac{D_xv_{i+1,j}-D_xv_{ij}}{\hbar_{x,i}},$$
$$D_yv_{ij}=\frac{v_{ij}-v_{i,j-1}}{h_{y,j}},\ \delta_{yy}^2v_{ij}=\frac{D_yv_{i,j+1}-D_yv_{ij}}{\hbar_{y,j}},$$

其中 $v_{ij}=v(x_i,y_j)$. 则可构造问题 (1.1) 的差分格式如下:

$$\begin{cases} L^{N,N}u_{ij}^{N,N}:=-\varepsilon(\delta_{xx}^2u_{ij}^{N,N}+\delta_{yy}^2u_{ij}^{N,N})+b_{1,ij}D_xu_{ij}^{N,N}+b_{2,ij}D_yu_{ij}^{N,N}+c_{ij}u_{ij}^{N,N}\\ \qquad\qquad =f_{ij}\ \ (1\le i\le N-1, 1\le j\le N-1),\\ u_{0j}^{N,N}=g_{0j},\ u_{Nj}^{N,N}=g_{Nj},\ u_{i0}^{N,N}=g_{i0},\ u_{iN}^{N,N}=g_{iN}, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $b_{1,ij}=b_1(x_i,y_j)$, $b_{2,ij}=b_2(x_i,y_j)$, $c_{ij}=c(x_i,y_j)$, $f_{ij}=f(x_i,y_j)$, $g_{ij}=g(x_i,y_j)$. 我们将差分格式 (2.1) 求得的解 $u_{ij}^{N,N}$ 作为问题 (1.1) 的数值解.

由文献 [4] 和文献 [5], 我们有以下引理.

引理 2.1 设系数 b_1、b_2、f 满足一定的光滑性条件, 则问题 (1.1) 的解可以分解为 $u=E+E_1+E_2+E_3$, 且有

$$\left|\frac{\partial^{i+j}E}{\partial x^i\partial y^j}\right|\le C,\ \ \left|\frac{\partial^{i+j}E_1}{\partial x^i\partial y^j}\right|\le C\varepsilon^{-i}e^{-\beta_1(1-x)/\varepsilon},$$
$$\left|\frac{\partial^{i+j}E_2}{\partial x^i\partial y^j}\right|\le C\varepsilon^{-j}e^{-\beta_2(1-y)/\varepsilon},\ \ \left|\frac{\partial^{i+j}E_3}{\partial x^i\partial y^j}\right|\le C\varepsilon^{-(i+j)}e^{-(\beta_1(1-x)+\beta_2(1-y))/\varepsilon},$$

其中 $0\le i\le 2$, $0\le j\le 2$, 并且对所有的 $(x,y)\in\Omega$, 有

$$|LE_1(x,y)|\le C\varepsilon e^{-\beta_1(1-x)/\varepsilon},$$
$$|LE_2(x,y)|\le C\varepsilon e^{-\beta_2(1-y)/\varepsilon},|LE_3(x,y)|\le C\varepsilon e^{-(\beta_1(1-x)+\beta_2(1-y))/\varepsilon}.$$

引理 2.2 设 u 的三阶偏导存在, 则

$$|(L^{N,N}u)_{ij}-(Lu)_{ij}|\le C(\varepsilon\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\left|\frac{\partial^3u(x,y_j)}{\partial x^3}\right|dx$$
$$+\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\frac{\partial^2u(x,y_j)}{\partial x^2}\right|dx+\varepsilon\int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}}\left|\frac{\partial^3u(x_i,y)}{\partial y^3}\right|dy+\int_{y_{j-1}}^{y_j}\left|\frac{\partial^2u(x_i,y)}{\partial y^2}\right|dy).$$

证 由定义, 有

$$\begin{aligned}(L^{N,N}u)_{ij}-(Lu)_{ij}\ &=\ [-\varepsilon(\delta_{xx}^2u_{ij}+\delta_{yy}^2u_{ij})+b_{1,ij}D_xu_{ij}+b_{2,ij}D_yu_{ij}+c_{ij}u_{ij}]\\ &\quad-[-\varepsilon(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2})+b_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u]_{ij}\\ &=\ -\varepsilon(\delta_{xx}^2u_{ij}-(\frac{\partial^2u}{\partial x^2})_{ij})+b_{1,ij}(D_xu_{ij}-(\frac{\partial u}{\partial x})_{ij})\\ &\quad-\varepsilon(\delta_{yy}^2u_{ij}-(\frac{\partial^2u}{\partial y^2})_{ij})+b_{2,ij}(D_yu_{ij}-(\frac{\partial u}{\partial y})_{ij}),\end{aligned}$$

再由文献 [1] 引理 2 易知结论成立. 证毕.

设 N 为偶数, $\tau_1=\sigma\varepsilon\ln N/\beta_1$, $\tau_2=\sigma\varepsilon\ln N/\beta_2$, 其中 σ 为与 ε 和 N 无关的正常数, 且 $\sigma\geq 1$. 我们将区域 Ω 分解为四个子区域 $\Omega=\Omega_{11}\cup\Omega_{12}\cup\Omega_{21}\cup\Omega_{22}$, 其中

$$\begin{aligned}&\Omega_{11}=[0,1-\tau_1]\times[0,1-\tau_2],\ \Omega_{12}=[0,1-\tau_1]\times[1-\tau_2,1],\\&\Omega_{21}=[1-\tau_1,1]\times[0,1-\tau_2],\ \Omega_{12}=[1-\tau_1,1]\times[1-\tau_2,1].\end{aligned}$$

我们将一维的 B-S 网格 (见文献 [2]) 扩展到二维, 网格生成函数为

$$x(\xi)=\begin{cases}2(1-\dfrac{\sigma\varepsilon}{\beta_1}\ln N)\xi, & \xi\in[0,1/2],\\ 1+\dfrac{\varepsilon}{\beta_1}\ln[1-2(1-N^{-\sigma})(1-\xi)], & \xi\in[1/2,1],\end{cases}\tag{2.2}$$

$$y(\xi)=\begin{cases}2(1-\dfrac{\sigma\varepsilon}{\beta_2}\ln N)\xi, & \xi\in[0,1/2],\\ 1+\dfrac{\varepsilon}{\beta_2}\ln[1-2(1-N^{-\sigma})(1-\xi)], & \xi\in[1/2,1].\end{cases}\tag{2.3}$$

由网格生成函数, 得到以下的网格分布:

$$x_i=\begin{cases}2(1-\dfrac{\sigma\varepsilon}{\beta_1}\ln N)\dfrac{i}{N}, & i=0,1,\cdots,N/2,\\ 1+\dfrac{\varepsilon}{\beta_1}\ln[1-2(1-N^{-\sigma})(1-\dfrac{i}{N})], & i=N/2+1,\cdots,N,\end{cases}\tag{2.4}$$

$$y_j=\begin{cases}2(1-\dfrac{\sigma\varepsilon}{\beta_2}\ln N)\dfrac{j}{N}, & j=0,1,\cdots,N/2,\\ 1+\dfrac{\varepsilon}{\beta_2}\ln[1-2(1-N^{-\sigma})(1-\dfrac{j}{N})], & j=N/2+1,\cdots,N.\end{cases}\tag{2.5}$$

引理 2.3 当 $i=1,2,\cdots,N/2$ 时, $h_{x,i}\leq 2N^{-1}$, $h_{x,\frac{N}{2}+i}\leq\dfrac{2\varepsilon}{i\beta_1}\leq CN^{-1}$. 当 $j=1,2,\cdots,N/2$ 时, $h_{y,j}\leq 2N^{-1}$, $h_{y,\frac{N}{2}+j}\leq\dfrac{2\varepsilon}{j\beta_2}\leq CN^{-1}$.

证 由文献 [2] 引理 1 即得.

引理 2.4 定义网格函数 $S_{ij}=\hat{S}_i\bar{S}_j$, 其中 $\hat{S}_0=\bar{S}_0=1$, $\hat{S}_i=\prod\limits_{k=1}^{i}(1+\dfrac{\beta_1 h_{x,k}}{\varepsilon})$, $i=1,2,\cdots,N$, $\bar{S}_j=\prod\limits_{k=1}^{j}(1+\dfrac{\beta_2 h_{y,k}}{\varepsilon})$, $j=1,2,\cdots,N$, 则

$$L^{N,N}\hat{S}_i\geq\frac{C}{\varepsilon}\hat{S}_{i-1},\ \ i=1,2,\cdots,N;\quad L^{N,N}\bar{S}_j\geq\frac{C}{\varepsilon}\bar{S}_{j-1},\ \ j=1,2,\cdots,N;\tag{2.6}$$

$$L^{N,N}S_{ij}\geq\frac{C}{\varepsilon^2}S_{i-1,j-1},\quad i=1,2,\cdots,N,\ j=1,2,\cdots,N.\tag{2.7}$$

证 由文献 [1] 引理 5, 易知 (2.6) 式成立.

由差分定义知, $D_x\hat{S}_i=\dfrac{\beta_1}{\varepsilon}\hat{S}_{i-1}$, $\delta_{xx}^2\hat{S}_i=\dfrac{\beta_1^2 h_{x,i}}{\varepsilon^2\hbar_{x,i}}\hat{S}_{i-1}$, 从而必然存在常数 $0<\rho_1<1$, 使得 $\delta_{xx}^2\hat{S}_i\leq\dfrac{2\beta_1^2\rho_1}{\varepsilon^2}\hat{S}_{i-1}$. 同理有 $D_y\bar{S}_j=\dfrac{\beta_2}{\varepsilon}\bar{S}_{j-1}$, 且存在常数 $0<\rho_2<1$, 使得 $\delta_{yy}^2\bar{S}_j\leq\dfrac{2\beta_2^2\rho_2}{\varepsilon^2}\bar{S}_{j-1}$. 又由 $\hat{S}_i$ 和 $\bar{S}_j$ 定义, 有 $\hat{S}_i=\dfrac{C}{\varepsilon}\hat{S}_{i-1}$, $\bar{S}_j=\dfrac{C}{\varepsilon}\bar{S}_{j-1}$. 再由条件 $b_1(x,y)\geq 2\beta_1>0$, $b_2(x,y)\geq 2\beta_2>0$, $c(x,y)\geq 0$ 和算子 $L^{N,N}$ 定义有

$$\begin{aligned} L^{N,N}S_{ij} &\geq -\varepsilon(\bar{S}_j\frac{2\beta_1^2\rho_1}{\varepsilon^2}\hat{S}_{i-1}+\hat{S}_i\frac{2\beta_2^2\rho_2}{\varepsilon^2}\bar{S}_{j-1})+2\beta_1\bar{S}_j\frac{\beta_1}{\varepsilon}\hat{S}_{i-1}+2\beta_2\hat{S}_i\frac{\beta_2}{\varepsilon}\bar{S}_{j-1} \\ &\geq \frac{C}{\varepsilon^2}S_{i-1,j-1}\ (i=1,2,\cdots,N,\ j=1,2,\cdots,N). \end{aligned}$$

证毕.

3 收敛性分析

本节我们将证明差分格式 (2.1) 在网格 (2.4)–(2.5) 上求得的数值解一致一阶收敛于真解. 由引理 2.1 知, 问题 (1.1) 的解可以分解为四部分. 同样, 差分格式 (2.1) 的解也可以分为相应的四部分, 则有 $u_{ij}^{N,N}=E_{ij}^{N,N}+E_{1,ij}^{N,N}+E_{2,ij}^{N,N}+E_{3,ij}^{N,N}$, 并且

$$L^{N,N}E_{ij}^{N,N}=(LE)_{ij},\ L^{N,N}E_{1,ij}^{N,N}=(LE_1)_{ij}, \tag{3.1}$$

$$L^{N,N}E_{2,ij}^{N,N}=(LE_2)_{ij},\ L^{N,N}E_{3,ij}^{N,N}=(LE_3)_{ij}, \tag{3.2}$$

这里 $E_{ij}^{N,N}$、$E_{1,ij}^{N,N}$、$E_{2,ij}^{N,N}$、$E_{3,ij}^{N,N}$ 分别与 E、E_1、E_2、E_3 具有相同的边界条件. 易知

$$\begin{aligned} |u(x_i,y_j)-u_{ij}^{N,N}| &\leq |E(x_i,y_j)-E_{ij}^{N,N}|+|E_1(x_i,y_j)-E_{1,ij}^{N,N}| \\ &\quad +|E_2(x_i,y_j)-E_{2,ij}^{N,N}|+|E_3(x_i,y_j)-E_{3,ij}^{N,N}|. \end{aligned} \tag{3.3}$$

下面我们分别估计这四部分的误差.

定理 3.1 光滑部分 E 误差满足

$$|E(x_i,y_j)-E_{ij}^{N,N}|\leq CN^{-1},\ (x_i,y_j)\in\Omega. \tag{3.4}$$

证 由引理 2.1 和引理 2.2, 有

$$\begin{aligned} |L^{N,N}(E(x_i,y_j)-E_{ij}^{N,N})| &= |(L^{N,N})E(x_i,y_j)-(LE)_{ij})| \\ &\leq C[\varepsilon(h_{x,i}+h_{x,i+1}+h_{y,j}+h_{y,j+1})+h_{x,i}+h_{y,j}] \\ &\leq CH, \end{aligned}$$

其中 $H=\max\{\max\limits_i h_{x,i},\max\limits_j h_{y,j}\}$.

取 $q_i=\dfrac{CH}{2\beta_1}x_i$, 则有 $|L^{N,N}(E(x_i,y_j)-E_{ij}^{N,N})|\leq CH\leq L^{N,N}q_i$. 由比较定理得 $|E(x_i,y_j)-E_{ij}^{N,N}|\leq q_i\leq CH$. 又由引理 2.3, 有 $H\leq CN^{-1}$, 从而有 $|E(x_i,y_j)-E_{ij}^{N,N}|\leq CN^{-1}$. 证毕.

定理 3.2 E_1 部分误差满足

$$|E_1(x_i,y_j)-E_{1,ij}^{N,N}|\leq CN^{-1}(1+\varepsilon),\ (x_i,y_j)\in\Omega. \tag{3.5}$$

证 将区域 Ω 分成 $\Omega_{11}\cup\Omega_{12}$ 和 $\Omega_{21}\cup\Omega_{22}$ 两部分来证明. 首先考虑 $\Omega_{11}\cup\Omega_{12}$ 部分, 此时 $i=1,2,\cdots,N/2$, $j=1,2,\cdots,N-1$. 由 (3.1) 式以及引理 2.1、引理 2.4 有

$$\begin{aligned} |L^{N,N}E_{1,ij}^{N,N}| &= |LE_1(x_i,y_j)|\leq C\varepsilon e^{-\beta_1(1-x_i)/\varepsilon}\leq C\varepsilon\prod_{k=1}^{N}(1+\frac{\beta_1 h_{x,k}}{\varepsilon})^{-1}\hat{S}_i \\ &\leq C\varepsilon^2\prod_{k=1}^{N}(1+\frac{\beta_1 h_{x,k}}{\varepsilon})^{-1}L^{N,N}\hat{S}_{i+1}\leq C\prod_{k=1}^{N}(1+\frac{\beta_1 h_{x,k}}{\varepsilon})^{-1}L^{N,N}\hat{S}_{i+1}. \end{aligned}$$

由比较定理, 有 $|E_{1,ij}^{N,N}|\le C\prod\limits_{k=i+2}^{N}(1+\frac{\beta_1 h_{x,k}}{\varepsilon})^{-1}$. 又由引理 2.1, 有

$$|E_1(x_i,y_j)|\le Ce^{-\beta_1(1-x_i)/\varepsilon}<C\prod_{k=i+2}^{N}(1+\frac{\beta_1 h_{x,k}}{\varepsilon})^{-1}.$$

因此, 当 $(x_i,y_j)\in\Omega_{11}\cup\Omega_{12}$ 时,

$$|E_1(x_i,y_j)-E_{1,ij}^{N,N}|\le C\prod_{k=i+2}^{N}(1+\frac{\beta_1 h_{x,k}}{\varepsilon})^{-1}\le C\prod_{k=N/2+2}^{N}(1+\frac{\beta_1 h_{x,k}}{\varepsilon})^{-1}. \tag{3.6}$$

再由引理 2.3, 有

$$\begin{aligned}\ln[\prod_{k=\frac{N}{2}+2}^{N}(1+\frac{\beta_1 h_{x,k}}{\varepsilon})] &= \sum_{k=\frac{N}{2}+2}^{N}\ln(1+\frac{\beta_1 h_{x,k}}{\varepsilon})\ge\sum_{k=\frac{N}{2}+2}^{N}[\frac{\beta_1 h_{x,k}}{\varepsilon}-\frac{1}{2}(\frac{\beta_1 h_{x,k}}{\varepsilon})^2]\\ &\ge \frac{\beta_1}{\varepsilon}-\frac{1}{2}\sum_{k=\frac{N}{2}+2}^{N}(\frac{2}{k})^2\ge\sigma\ln N-C.\end{aligned} \tag{3.7}$$

由 $\sigma\ge 1$, 有 $\prod\limits_{k=N/2+2}^{N}(1+\frac{\beta_1 h_{x,k}}{\varepsilon})^{-1}\le CN^{-1}$, 所以

$$|E_1(x_i,y_j)-E_{1,ij}^{N,N}|\le CN^{-1},\ (x_i,y_j)\in\Omega_{11}\cup\Omega_{12}. \tag{3.8}$$

下面考虑 $\Omega_{21}\cup\Omega_{22}$ 区域, 此时 $i=N/2+1,\cdots,N-1,\ j=1,2,\cdots,N-1$. 由引理 2.1 至引理 2.4 以及网格函数 (2.2) 和网格分布 (2.4), 有

$$\begin{aligned}&|L^{N,N}(E_1(x_i,y_j)-E_{1,ij}^{N,N})|\\ =\ &|(L^{N,N})E_1(x_i,y_j)-(LE_1)_{ij}|\le C(\varepsilon^{-2}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}e^{-\beta_1(1-x)/\varepsilon}dx+\int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}}e^{-\beta_1(1-x_i)/\varepsilon}dy)\\ \le\ &C(\varepsilon^{-1}\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_{i+1}}e^{-\beta_1(1-x(\xi))/\varepsilon}d\xi+\int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}}e^{-\beta_1(1-x_i)/\varepsilon}dy)\\ \le\ &C\varepsilon^{-1}N^{-1}e^{-\beta_1(1-x_i)/\varepsilon}+N^{-1}e^{-\beta_1(1-x_i)/\varepsilon}\\ \le\ &CN^{-1}(\varepsilon^{-1}+1)\prod_{k=1}^{N}(1+\frac{\beta_1 h_{x,k}}{\varepsilon})^{-1}\hat{S}_i\le CN^{-1}(1+\varepsilon)\prod_{k=1}^{N}(1+\frac{\beta_1 h_{x,k}}{\varepsilon})^{-1}L^{N,N}\hat{S}_{i+1}.\end{aligned}$$

由比较定理, 当 $(x_i,y_j)\in\Omega_{21}\cup\Omega_{22}$ 时有

$$|E_1(x_i,y_j)-E_{1,ij}^{N,N}|\le CN^{-1}(1+\varepsilon)\prod_{k=1}^{N}(1+\frac{\beta_1 h_{x,k}}{\varepsilon})^{-1}\hat{S}_{i+1}\le CN^{-1}(1+\varepsilon). \tag{3.9}$$

因此, 由 (3.8) 和 (3.9) 式有 (3.5) 式成立. 证毕.

定理 3.3 E_2 部分误差满足

$$|E_2(x_i,y_j)-E_{2,ij}^{N,N}|\le CN^{-1}(1+\varepsilon),\ (x_i,y_j)\in\Omega. \tag{3.10}$$

证 将区域 Ω 分成两部分 $\Omega_{11}\cup\Omega_{21}$ 和 $\Omega_{12}\cup\Omega_{22}$ 来证明, 方法与定理 3.2 证明方法类似. 略.

定理 3.4 E_3 部分误差满足

$$|E_3(x_i,y_j)-E_{3,ij}^{N,N}|\le CN^{-1}(1+\varepsilon),\ (x_i,y_j)\in\Omega. \tag{3.11}$$

证 同样的, 我们将区域 Ω 分成 $\Omega_{11}\cup\Omega_{12}$ 和 $\Omega_{21}\cup\Omega_{22}$ 两部分来证明. 首先考虑 $\Omega_{11}\cup\Omega_{12}$ 部分, 此时 $i=1,2,\cdots,N/2,\ j=1,2,\cdots,N-1$. 由 (3.2) 式、引理 2.1、引理 2.4 以及定理 3.2 证明过程有

$$\begin{aligned}|L^{N,N}E_{3,ij}^{N,N}| &= |LE_3(x_i,y_j)|\le C\varepsilon e^{-(\beta_1(1-x_i)+\beta_2(1-y_j))/\varepsilon}\\ &\le C\varepsilon e^{-\beta_1(1-x_i)/\varepsilon}\le C\prod_{k=1}^{N}(1+\frac{\beta_1h_{x,k}}{\varepsilon})^{-1}L^{N,N}\hat{S}_i.\end{aligned}$$

由比较定理, 有 $|E_{3,ij}^{N,N}|\le C\prod\limits_{k=i+1}^{N}(1+\dfrac{\beta_1h_{x,k}}{\varepsilon})^{-1}$. 又由引理 2.1, 有

$$|E_3(x_i,y_j)|\le Ce^{-(\beta_1(1-x_i)+\beta_2(1-y_j))/\varepsilon}\le Ce^{-\beta_1(1-x_i)/\varepsilon}\le C\prod_{k=i+1}^{N}(1+\frac{\beta_1h_{x,k}}{\varepsilon})^{-1}.$$

因此当 $(x_i,y_j)\in\Omega_{11}\cup\Omega_{12}$ 时, 由定理 3.2 证明过程有

$$|E_3(x_i,y_j)-E_{3,ij}^{N,N}|\le|E_3(x_i,y_j)|+|E_{3,ij}^{N,N}|\le C\prod_{k=i+1}^{N}(1+\frac{\beta_1h_{x,k}}{\varepsilon})^{-1}\le CN^{-1}. \tag{3.12}$$

下面考虑 $\Omega_{21}\cup\Omega_{22}$ 区域, 此时 $i=N/2+1,\cdots,N-1,\ j=1,2,\cdots,N-1$. 由引理 2.1 至引理 2.4 以及网格函数 (2.2) 和网格分布 (2.4), 有

$$\begin{aligned}&|L^{N,N}(E_3(x_i,y_j)-E_{3,ij}^{N,N})|\\ =\ &|(L^{N,N})E_3(x_i,y_j)-(LE_3)_{ij})|\\ \le\ &C(\varepsilon^{-2}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}e^{-\beta_1(1-x)/\varepsilon}e^{-\beta_2(1-y_j)/\varepsilon}dx+\varepsilon^{-2}\int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}}e^{-\beta_1(1-x_i)/\varepsilon}e^{-\beta_2(1-y)/\varepsilon}dy)\\ \le\ &C(\varepsilon^{-1}\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_{i+1}}e^{-\beta_1(1-x(\xi))/\varepsilon}e^{-\beta_2(1-y_j)/\varepsilon}d\xi+\varepsilon^{-2}\int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}}e^{-\beta_1(1-x_i)/\varepsilon}e^{-\beta_2(1-y)/\varepsilon}dy)\\ \le\ &C\varepsilon^{-2}N^{-1}(\varepsilon+1)e^{-\beta_1(1-x_i)/\varepsilon}e^{-\beta_2(1-y_j)/\varepsilon}\\ \le\ &C\varepsilon^{-2}N^{-1}(\varepsilon+1)\prod_{k=1}^{N}[(1+\frac{\beta_1h_{x,k}}{\varepsilon})^{-1}(1+\frac{\beta_2h_{y,k}}{\varepsilon})^{-1}]S_{ij}\\ \le\ &CN^{-1}(1+\varepsilon)\prod_{k=1}^{N}[(1+\frac{\beta_1h_{x,k}}{\varepsilon})^{-1}(1+\frac{\beta_2h_{y,k}}{\varepsilon})^{-1}]L^{N,N}S_{i+1,j+1}.\end{aligned}$$

由比较定理, 当 $(x_i, y_j) \in \Omega_{21} \cup \Omega_{22}$ 时有

$$\begin{aligned} |E_3(x_i, y_j) - E_{3,ij}^{N,N}| &\le CN^{-1}(1+\varepsilon)\prod_{k=1}^{N}[(1+\frac{\beta_1 h_{x,k}}{\varepsilon})^{-1}(1+\frac{\beta_2 h_{y,k}}{\varepsilon})^{-1}]S_{i+1,j+1} \\ &\le CN^{-1}(1+\varepsilon). \end{aligned} \tag{3.13}$$

因此由 (3.12) 和 (3.13) 式有 (3.11) 式成立. 证毕.

定理 3.5 设 u 是问题 (1.1) 的解, $u_{ij}^{N,N}$ 是差分格式 (2.1) 在网格 (2.4) – (2.5) 上求得的数值解, 则有 $|u(x_i, y_j) - u_{ij}^{N,N}| \le CN^{-1}(1+\varepsilon)$, $(x_i, y_j) \in \Omega$.

证 由 (3.3) 和定理 3.1 至定理 3.4 结论即得. 证毕.

定理 3.6 设 u 是问题 (1.1) 的解, $u_{ij}^{N,N}$ 是差分格式 (2.1) 在网格 (2.4) – (2.5) 上求得的数值解, 则 $u_{ij}^{N,N}$ 一致一阶收敛于 u, 且有 $|u(x_i, y_j) - u_{ij}^{N,N}| \le CN^{-1}$, $(x_i, y_j) \in \Omega$.

证 由定理 3.5 结论以及 $\varepsilon \ll 1$ 即得. 证毕.

推论 3.1 若我们在网格 $\overline{W}_{N,M} = \{(x_i, y_j)|0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1,\ 0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_M = 1\}$ 上考虑问题 (1.1), 其中 x_i 和 y_j 类似 (2.4) 和 (2.5) 定义, 算子 $L^{N,M}$ 由 (2.1) 所定义的 $L^{N,N}$ 作相应改变, $u_{ij}^{N,M}$ 为 $L^{N,M}u_{ij}^{N,M} = f_{ij}$, $\quad 1 \le i \le N-1,\ 1 \le j \le M-1$ 的解, 则类似的有收敛性估计

$$|u(x_i, y_j) - u_{ij}^{N,M}| \le C(N^{-1} + M^{-1}),\ (x_i, y_j) \in \Omega.$$

4 数值实验

我们用下面的算例来验证结论的正确性和方法的可行性.

例 1

$$\begin{cases} -\varepsilon\triangle u + \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = f(x,y), \\ u|_\Gamma = g(x,y),\ \ \Gamma = \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

这里我们取 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 为满足解为 $u(x,y) = \frac{e^{\frac{x-1}{\varepsilon}} + e^{\frac{y-1}{\varepsilon}} - 2e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} + \sin(x+y)$ 的函数.

对于算例 (4.1), 我们在网格 (2.4)–(2.5) 上按照 (2.1) 式构造迎风差分格式, 网格函数中我们取 $\sigma = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 0.5$, 求出问题的数值解. 表 1 和表 2 列出了数值解与真解的最大误差和离散的 l_2 误差. 我们分别计算了当 $\varepsilon = 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-7}$, $N = 64, 128, 256$ 时的最大误差和离散的 l_2 误差.

表中 r 表示收敛率, 由 $r = \log_2(e_N/e_{2N})$ 计算得出, 这里 e_N 和 e_{2N} 分别对应于网格剖分数为 $N \times N$ 和 $2N \times 2N$ 时的误差. 由表中数据可看出, 当 ε 极小时, 差分格式 (2.1) 求得的数值解一致一阶收敛于真解, 结果非常稳定, 与定理 3.6 的结论一致.

表 1: 数值解与真解的最大误差

$N \times N$	$\varepsilon = 10^{-4}$	r	$\varepsilon = 10^{-5}$	r	$\varepsilon = 10^{-7}$	r
64×64	3.370e-002	1.02	3.374e-002	1.02	3.375e-002	1.02
128×128	1.659e-002	1.02	1.661e-002	1.02	1.661e-002	1.02
256×256	8.166e-003		8.174e-003		8.175e-003	

表 2: 数值解与真解的 l_2 误差

$N \times N$	$\varepsilon = 10^{-4}$	r	$\varepsilon = 10^{-5}$	r	$\varepsilon = 10^{-7}$	r
64×64	1.450e-002	1.02	1.452e-002	1.02	1.453e-002	1.02
128×128	7.135e-003	1.02	7.146e-003	1.02	7.147e-003	1.02
256×256	3.512e-003		3.517e-003		3.517e-003	

参 考 文 献

[1] 周琴. 一类奇异摄动问题差分格式的一致收敛性分析 [J]. 湖南工程学院学报自然科学版, 2009, 19(3): 34–36.

[2] 梁克维, 李大明, 江金生. 中点迎风差分格式在 Bakhvalov-Shishkin 网格上的注记 [J]. 浙江大学学报 (理学版), 2002, 29(1): 20–24.

[3] Zhou Qin, Chen Yanping, Yang Yin. Two improved algorithms and implementation for a singularly perturbed problem on moving meshes [J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2011, 24: 1232–1240.

[4] Torsten Linβ, Martin Stynes. Asymptotic analysis and Shishkin-type decomposition for an elliptic convection-diffusion Problem [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 261: 604–632.

[5] Hans-Görg Roos. Optimal convergence of basic schemes for elliptic boundary value problems with strong parabolic Layers [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2002, 267: 194–208.

[6] Dyrk Schneider, Hans-Görg Roos, Torsten Linβ. Uniform convergence of an upwind finite element method on layer-adapted grids [J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2001, 190: 4519–4530.

[7] Teofanov Lj, Hans-Görg Roos. An elliptic singularly perturbed problem with two parameters I: solution decomposition [J]. Journal of Computational and Applied Mathmatics, 2007, 206: 1082–1097.

ANALYSIS OF UNIFORM CONVERGENCE FOR DIFFERENCE SCHEME OF AN ELLIPTIC SINGULARLY PERTURBED PROBLEM

ZHOU Qin

(*School of Information Science and Engineering, Hunan International Economics University, Changsha 410205, China*)

Abstract: In this article, we study an elliptic singularly perturbed problem. By using the difference method on the Bakhvalov-Shishkin mesh, we prove that the numerical solution is uniformly first-order convergent to the exact solution.

Keywords: singular perturbation; Bakhvalov-Shishkin mesh; difference scheme; comparison theory; uniformly convergence

2010 MR Subject Classification: 65M06; 65M12