Vol. 35 (2015)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

若干点不交的 n 阶路的并图的非正规强度

郭 靖 [1], 陈祥恩 [1], 王治文 [2], 姚 兵 [1]

(1. 西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州 730070)

(2. 宁夏大学数学与计算机科学学院, 宁夏 银川 750021)

摘 要: 本文研究了若干点不交的 n 阶路的并图的非正规强度. 利用构造矩阵的方法, 获得了若干点不交的 n 阶路的并图 ($n=1(\mathrm{mod}\ 4)$) 的非正规强度, 推广了文献 [5] 中的结论.

关键词: 边赋权; 非正规分配; 权度; 非正规强度

MR(2010) **主题分类号**: 05C15 **中图分类号**: O157.5

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2015)03-0699-06

1 引言及准备工作

所谓图 G 的一个 m - 边赋权是指从 G 的边集 $E(G)$ 到权集合 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的一个映射. 称 $\{1,2,\cdots,m\}$ 里的每个数为对 G 进行边赋权所使用的权, w 是 G 的一个边赋权, 对 G 的每条边 e, 在 w 下 e 的象 $w(e)$ 称为 e 在 w 下的权. 对图 G 的每个顶点 v 来说, 用 $\tilde{S}(v)$ 表示与 v 关联的所有边的权构成的多重集, 称 $\tilde{S}(v)$ 为 v 的权集.

$\tilde{S}(v)$ 中全体元素的和记为 $w(v)$, 即

$$w(v)=\sum_{j\in\tilde{S}(v)} j,$$

称 $w(v)$ 为 v 在 G 的边赋权 w 下的权度.

若 w 是 G 的一个 m - 边赋权, 且对 G 中任意两个不同的顶点 u 和 v, 都有 $w(u)\neq w(v)$, 则称 G 的 m - 边赋权 w 是允许的或称 w 为 G 的一个 m - 非正规分配. 使得 G 存在 m - 非正规分配的最小的正整数 m 称为 G 的非正规强度, 记为 $s(G)$, 即 $s(G)=\min\{m|G$ 存在 m - 非正规分配 $\}$.

显然, G 存在非正规强度当且仅当 G 存在非正规分配, 亦即当且仅当 G 没有孤立边且最多只有一个孤立点.

图的非正规强度这一概念是由 Chartrand, Jacobson, Lehel, Oellerman, Ruiz 和 Saba 于 1986 年提出的 (参见文献 [1]), 此后在文 [2–8] 中均有研究. 在文 [1] 中得到了重要结论:"对任意没有孤立边且最多只有一个孤立点的简单图 G 来说, $s(G)\leq 2n-3$", 在文 [2] 中得到了结论:"阶数为 $n(n\geq 4)$ 的连通图 G 的非正规强度 $s(G)\leq n-1$, 且对 n 阶星有 $s(St_n)=n-1$", 在文 [3] 中对 t 条 3 阶路的点不交的并的非正规强度进行了研究, 得到了如下结论:

*收稿日期: 2014-01-22 接收日期: 2014-05-15

基金项目: 国家自然科学基金资助 (61163037); 国家自然科学基金资助 (61163054); 国家自然科学基金资助 (61363060); 国家自然科学基金资助 (11261046); 宁夏回族自治区百人计划资助.

作者简介: 郭靖 (1988–), 男, 甘肃兰州, 硕士, 研究方向: 图论及其应用.

定理 A [3] $\lceil\dfrac{15t-1}{7}\rceil \le s(\ tP_3\ ) \le \lceil\dfrac{15t-1}{7}\rceil + 1.$

Kinch 和 Lehel 在文 [3] 中猜想 $s(\ tP_3\ )=\lceil\frac{15t-1}{7}\rceil$, 但是, Aigner 和 Triesch 于 1990 年在文 [4] 中对此问题进行了彻底的解决, 给出了下述定理 B.

定理 B [4] $s(\ tP_3\ )=\lceil\dfrac{15t-1}{7}\rceil$, 除非当 $n \equiv 45,\ 66 \pmod{84}$ 时, $s(\ tP_3\ )=\lceil\dfrac{15t-1}{7}\rceil + 1$.

而后, Cahit 和 Tezer 于 1998 年在文 [5] 中对若干点不交的 n 阶路的并图的非正规强度进行了研究, 得到了以下结论:

定理 C [5] $s(tP_n) = \begin{cases} \dfrac{tn}{2}, & n \equiv 0 \pmod 4; \\ \lfloor\dfrac{tn}{2}\rfloor + 1, & n \equiv 1 \pmod 4. \end{cases}$

定理 D [5] 当 $n \equiv 2 \pmod 4$ 时, 若 $t \equiv 0 \pmod 2$, 则 $s(tP_n) = \frac{tn}{2}$; 若 $t \equiv 1 \pmod 2$, 则 $s(tP_n) \le \frac{tn}{2} + 1$.

但是, 在定理 C 中, 关于 $tP_n(n \equiv 1 \pmod 4)$ 的非正规强度的结果不正确, 因为在 $(t \equiv 0 \pmod 4)$ 时结果应该为 $\frac{tn}{2}$.

在文献 [6–7] 中, 分别对正则图和有向图的非正规强度进行了研究. 文献 [8] 中, 对任意两个度不为 2 的点的距离至少是 8 的树 T 进行了研究, 得到了结论:"$s(T) = \lceil\frac{n_1+n_2}{2}\rceil$, $n_1 \ge 3$, 其中 n_i 表示树 T 中度为 i 的顶点的个数".

2 重要结果及其证明

在本文中, 我们利用构造矩阵的方法精确求出了 tP_n $(n \equiv 1 \pmod 4)$ 的非正规强度.

需要注意的是, 对 tP_n 进行 $m-$ 边赋权时, 每个点的权度 $w(v)$, 要么是权集合 $\{1, 2, \cdots, m\}$ 中的一个数, 要么是权集合 $\{1, 2, \cdots, m\}$ 中两个数 (可以相同) 的和.

引理 1 [5] 设 $F(P_{i_1}, P_{i_2}, \cdots, P_{i_k})$ 表示由路 $P_{i_1}, P_{i_2}, \cdots, P_{i_k}$ 的点不交的并构成的森林, 则 F 的非正规强度的下界为

$$\max\{\frac{|V|}{2}, |V_e|\} \le s(F(P_{i_1}, P_{i_2}, \cdots, P_{i_k})),$$

其中 $|V_e|$ 表示 F 中端点的个数.

定理 1 设 $n \ge 5$, 且 $n \equiv 1 \pmod 4$, 则

$$s(tP_n) = \begin{cases} \dfrac{tn}{2}, & t \equiv 0 \pmod 4, \\ \lfloor\dfrac{tn}{2}\rfloor + 1, & t \not\equiv 0 \pmod 4, \end{cases} \qquad (t \ge 2).$$

证 当 $t \equiv 0 \pmod 4$ 时, tP_n 中所有顶点的个数为 tn, 由引理 1 知 $s(tP_n) \ge \frac{tn}{2}$.

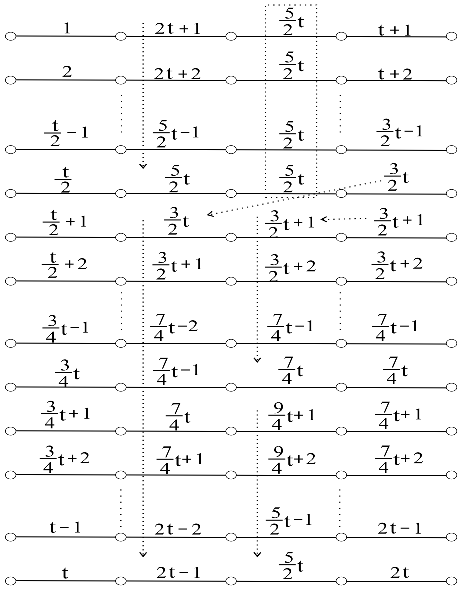
当 $t \equiv 1, 3 \pmod 4$ 时, tP_n 中所有顶点的个数为 tn, 是一个奇数, 则至少需要使用 $\frac{tn+1}{2}$ 个数进行边赋权, 即

$$s(tP_n) \ge \frac{tn+1}{2} = \lfloor\frac{tn}{2}\rfloor + 1.$$

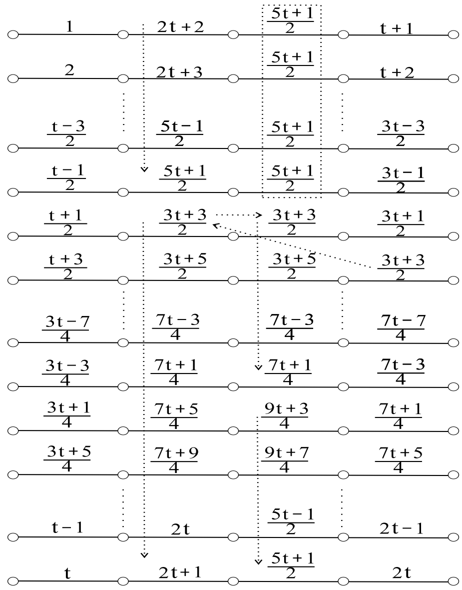
当 $t \equiv 2 \pmod 4$ 时, 假设 tP_n 存在 $\frac{tn}{2}$ - 边赋权, 则在 w 下, 所有点可能产生的权度依次为 $1, 2, \cdots, tn$, 所有点的权度之和为 $\frac{tn(tn+1)}{2}$, 由于 $\frac{tn}{2}$ 和 $tn+1$ 都是奇数, 即 $\frac{tn(tn+1)}{2}$ 也是奇数. 这与所有点的权度之和等于边的权之和的 2 倍, 是一个偶数相矛盾! 故 $s(tP_n) \ge \frac{tn}{2} + 1$.

下面分 $n = 5$ 和 $n \ge 9(n \equiv 1 \pmod 4)$ 两种情况来讨论.

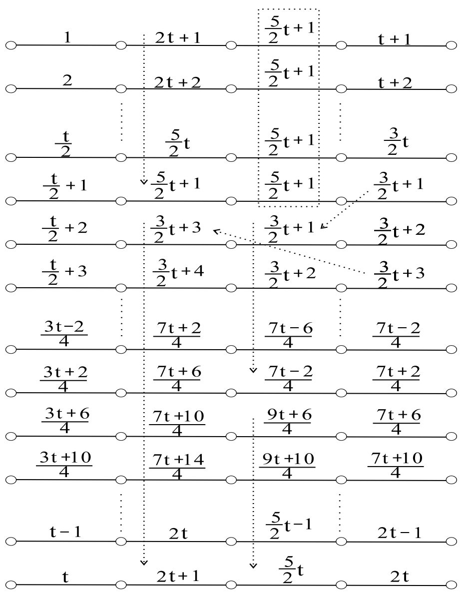
(1) 当 $n=5$ 时, 如图 1 所示, 只需分别给出 $t\equiv 0 \pmod 4$ 和 $t\not\equiv 0 \pmod 4$ 时, tP_5 的 $\frac{5t}{2}$ - 边赋权和 $(\lfloor\frac{5t}{2}\rfloor+1)$ - 边赋权即可.



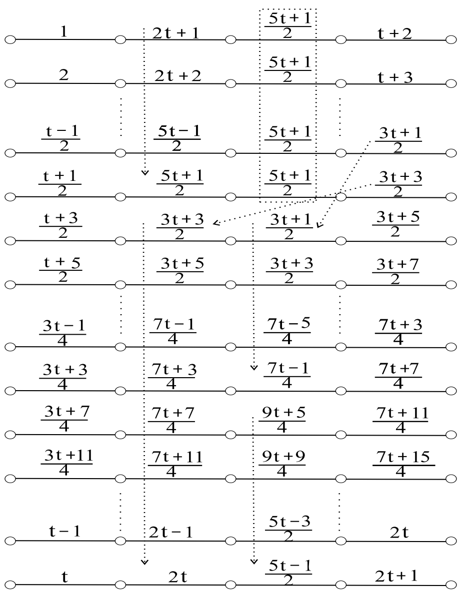
(a) 当 $t\equiv 0 \pmod 4$ 时, tP_5 的 $\frac{5t}{2}$ - 边赋权



(b) 当 $t\equiv 1 \pmod 4$ 时, tP_5 的 $(\lfloor\frac{5t}{2}\rfloor+1)$ - 边赋权 (其中 $2t+1$ 不是任何点的权度)



(c) 当 $t\equiv 2 \pmod 4$ 时, tP_5 的 $(\lfloor\frac{5t}{2}\rfloor+1)$ - 边赋权 (其中 $2t+1$ 和 $2t+3$ 不是任何点的权度)



(d) 当 $t\equiv 3 \pmod 4$ 时, tP_5 的 $(\lfloor\frac{5t}{2}\rfloor+1)$ - 边赋权 (其中 $t+1$ 不是任何点的权度)

图 1: tP_5 的 $\frac{5t}{2}$ - 边赋权和 $(\lfloor\frac{5t}{2}\rfloor+1)$ - 边赋权

(2) 当 $n \geq 9$, 且 $n \equiv 1 \pmod 4$ 时, 用一个 $t \times (n-1)$ 矩阵 $\mathbf{M}$ 表示 tP_n 的所有边的权. 若 $t \equiv 0 \pmod 4$, 与 tP_n 相应的矩阵 $\mathbf{M_1}$ 为

$$\begin{pmatrix}
1 & 2t & 2t+1 & 4t\cdots & \frac{(n-5)t+2}{2} & \frac{(n-1)t+2}{2} & \frac{tn}{2} & \frac{(n-3)t+2}{2} & \cdots 4t & 3t+1 & 2t & t+1 \\
2 & 2t & 2t+2 & 4t\cdots & \frac{(n-5)t+4}{2} & \frac{(n-1)t+4}{2} & \frac{tn}{2} & \frac{(n-3)t+4}{2} & \cdots 4t & 3t+2 & 2t & t+2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{t}{2}-1 & 2t & \frac{5t}{2}-1 & 4t\cdots & \frac{(n-4)t-2}{2} & \frac{tn-2}{2} & \frac{tn}{2} & \frac{(n-2)t-2}{2} & \cdots 4t & \frac{7t}{2}-1 & 2t & \frac{3t}{2}-1 \\
\frac{t}{2} & 2t & \frac{5t}{2} & 4t\cdots & \frac{(n-4)t}{2} & \frac{tn}{2} & \frac{tn}{2} & \frac{(n-2)t}{2} & \cdots 4t & \frac{7t}{2} & 2t & \frac{3t}{2} \\
\frac{t}{2}+1 & 2t & \frac{5t}{2}+1 & 4t\cdots & \frac{(n-4)t+2}{2} & \frac{(n-2)t}{2} & \frac{(n-2)t+2}{2} & \frac{(n-2)t+2}{2} & \cdots 4t & \frac{7t}{2}+1 & 2t & \frac{3t}{2}+1 \\
\frac{t}{2}+2 & 2t & \frac{5t}{2}+2 & 4t\cdots & \frac{(n-4)t+4}{2} & \frac{(n-2)t+2}{2} & \frac{(n-2)t+4}{2} & \frac{(n-2)t+4}{2} & \cdots 4t & \frac{7t}{2}+2 & 2t & \frac{3t}{2}+2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{3t}{4}-1 & 2t & \frac{11t}{4}-1 & 4t\cdots & \frac{(2n-7)t-4}{4} & \frac{(2n-3)t-8}{4} & \frac{(2n-3)t-4}{4} & \frac{(2n-3)t-4}{4} & \cdots 4t & \frac{15t}{4}-1 & 2t & \frac{7t}{4}-1 \\
\frac{3t}{4} & 2t & \frac{11t}{4} & 4t\cdots & \frac{(2n-7)t}{4} & \frac{(2n-3)t-4}{4} & \frac{(2n-3)t}{4} & \frac{(2n-3)t}{4} & \cdots 4t & \frac{15t}{4} & 2t & \frac{7t}{4} \\
\frac{3t}{4}+1 & 2t & \frac{11t}{4}+1 & 4t\cdots & \frac{(2n-7)t+4}{4} & \frac{(2n-3)t}{4} & \frac{(2n-1)t+4}{4} & \frac{(2n-3)t+4}{4} & \cdots 4t & \frac{15t}{4}+1 & 2t & \frac{7t}{4}+1 \\
\frac{3t}{4}+2 & 2t & \frac{11t}{4}+2 & 4t\cdots & \frac{(2n-7)t+8}{4} & \frac{(2n-3)t+4}{4} & \frac{(2n-1)t+8}{4} & \frac{(2n-3)t+8}{4} & \cdots 4t & \frac{15t}{4}+2 & 2t & \frac{7t}{4}+2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
t-1 & 2t & 3t-1 & 4t\cdots & \frac{(n-3)t-2}{2} & \frac{(n-1)t-4}{2} & \frac{tn}{2}-1 & \frac{(n-1)t-2}{2} & \cdots 4t & 4t-1 & 2t & 2t-1 \\
t & 2t & 3t & 4t\cdots & \frac{(n-3)t}{2} & \frac{(n-1)t-2}{2} & \frac{tn}{2} & \frac{(n-1)t}{2} & \cdots 4t & 4t & 2t & 2t
\end{pmatrix}.$$

给第 h 条路 $u_1^{(h)}u_2^{(h)}\cdots u_{n-1}^{(h)}u_n^{(h)}$ 上的边, 依次用 $\mathbf{M_1}$ 中的第 h 行的元素赋权, $h=1,2,\cdots,t$, 得到了 tP_n 的 $\frac{tn}{2}$ - 边赋权 w. 在 w 下, 所有点的权度依次为 $1,2,\cdots,tn$, 因此, w 是非正规分配. 所以, 当 $t \equiv 0 \pmod 4$ 时, $s(tP_n)=\frac{tn}{2}$.

若 $t \equiv 1 \pmod 4$, 与 tP_n 相应的矩阵 $\mathbf{M_2}$ 为

$$\begin{pmatrix}
1 & 2t & 2t+1 & 4t\cdots & \frac{(n-5)t+2}{2} & \frac{(n-1)t+4}{2} & \frac{tn+1}{2} & \frac{(n-3)t+2}{2} & \cdots 4t & 3t+1 & 2t & t+1 \\
2 & 2t & 2t+2 & 4t\cdots & \frac{(n-5)t+4}{2} & \frac{(n-1)t+6}{2} & \frac{tn+1}{2} & \frac{(n-3)t+4}{2} & \cdots 4t & 3t+2 & 2t & t+2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{t-3}{2} & 2t & \frac{5t-3}{2} & 4t\cdots & \frac{(n-4)t-3}{2} & \frac{tn-1}{2} & \frac{tn+1}{2} & \frac{(n-2)t-3}{2} & \cdots 4t & \frac{7t-3}{2} & 2t & \frac{3t-3}{2} \\
\frac{t-1}{2} & 2t & \frac{5t-1}{2} & 4t\cdots & \frac{(n-4)t-1}{2} & \frac{tn+1}{2} & \frac{tn+1}{2} & \frac{(n-2)t-1}{2} & \cdots 4t & \frac{7t-1}{2} & 2t & \frac{3t-1}{2} \\
\frac{t+1}{2} & 2t & \frac{5t+1}{2} & 4t\cdots & \frac{(n-4)t+1}{2} & \frac{(n-2)t+3}{2} & \frac{(n-2)t+3}{2} & \frac{(n-2)t+1}{2} & \cdots 4t & \frac{7t+1}{2} & 2t & \frac{3t+1}{2} \\
\frac{t+3}{2} & 2t & \frac{5t+3}{2} & 4t\cdots & \frac{(n-4)t+3}{2} & \frac{(n-2)t+5}{2} & \frac{(n-2)t+5}{2} & \frac{(n-2)t+3}{2} & \cdots 4t & \frac{7t+3}{2} & 2t & \frac{3t+3}{2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{3t-7}{4} & 2t & \frac{11t-7}{4} & 4t\cdots & \frac{(2n-7)t-7}{4} & \frac{(2n-3)t-3}{4} & \frac{(2n-3)t-3}{4} & \frac{(2n-3)t-7}{4} & \cdots 4t & \frac{15t-7}{4} & 2t & \frac{7t-7}{4} \\
\frac{3t-3}{4} & 2t & \frac{11t-3}{4} & 4t\cdots & \frac{(2n-7)t-3}{4} & \frac{(2n-3)t+1}{4} & \frac{(2n-3)t+1}{4} & \frac{(2n-3)t-3}{4} & \cdots 4t & \frac{15t-3}{4} & 2t & \frac{7t-3}{4} \\
\frac{3t+1}{4} & 2t & \frac{11t+1}{4} & 4t\cdots & \frac{(2n-7)t+1}{4} & \frac{(2n-3)t+5}{4} & \frac{(2n-1)t+3}{4} & \frac{(2n-3)t+1}{4} & \cdots 4t & \frac{15t+1}{4} & 2t & \frac{7t+1}{4} \\
\frac{3t+5}{4} & 2t & \frac{11t+5}{4} & 4t\cdots & \frac{(2n-7)t+5}{4} & \frac{(2n-3)t+9}{4} & \frac{(2n-1)t+7}{4} & \frac{(2n-3)t+5}{4} & \cdots 4t & \frac{15t+5}{4} & 2t & \frac{7t+5}{4} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
t-1 & 2t & 3t-1 & 4t\cdots & \frac{(n-3)t-2}{2} & \frac{(n-1)t}{2} & \frac{tn-1}{2} & \frac{(n-1)t-2}{2} & \cdots 4t & 4t-1 & 2t & 2t-1 \\
t & 2t & 3t & 4t\cdots & \frac{(n-3)t}{2} & \frac{(n-1)t+2}{2} & \frac{tn+1}{2} & \frac{(n-1)t}{2} & \cdots 4t & 4t & 2t & 2t
\end{pmatrix}.$$

给第 i 条路 $u_1^{(i)}u_2^{(i)}\cdots u_{n-1}^{(i)}u_n^{(i)}$ 上的边, 依次用 $\mathbf{M_2}$ 中的第 i 行的元素赋权, $i=1,2,\cdots,t$, 得到了 tP_n 的 $\frac{tn+1}{2}$ - 边赋权 w. 在 w 下, 除了 $(n-3)t+1$ 不是任何点的权度之外, 其余从 1 到 $tn+1$ 的每个数都是某个点的权度. 这说明所给的 $\frac{tn+1}{2}$ - 边赋权是非正规分配. 所以, $s(tP_n)=\lfloor\frac{tn}{2}\rfloor+1$.

若 $t\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)$, 与 tP_n 相应的矩阵 $\mathbf{M_3}$ 为

$$\begin{pmatrix}
1 & 2t & 2t+1 & 4t\cdots & \frac{(n-5)t+2}{2} & \frac{(n-1)t+2}{2} & \frac{tn+2}{2} & \frac{(n-3)t+2}{2} & \cdots 4t & 3t+1 & 2t & t+1\\
2 & 2t & 2t+2 & 4t\cdots & \frac{(n-5)t+4}{2} & \frac{(n-1)t+4}{2} & \frac{tn+2}{2} & \frac{(n-3)t+4}{2} & \cdots 4t & 3t+2 & 2t & t+2\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\frac{t}{2} & 2t & \frac{5t}{2} & 4t\cdots & \frac{(n-4)t}{2} & \frac{tn}{2} & \frac{tn+2}{2} & \frac{(n-2)t}{2} & \cdots 4t & \frac{7t}{2} & 2t & \frac{3t}{2}\\
\frac{t}{2}+1 & 2t & \frac{5t}{2}+1 & 4t\cdots & \frac{(n-4)t+2}{2} & \frac{tn+2}{2} & \frac{tn+2}{2} & \frac{(n-2)t+2}{2} & \cdots 4t & \frac{7t}{2}+1 & 2t & \frac{3t}{2}+1\\
\frac{t}{2}+2 & 2t & \frac{5t}{2}+2 & 4t\cdots & \frac{(n-4)t+4}{2} & \frac{(n-2)t+6}{2} & \frac{(n-2)t+2}{2} & \frac{(n-2)t+4}{2} & \cdots 4t & \frac{7t}{2}+2 & 2t & \frac{3t}{2}+2\\
\frac{t}{2}+3 & 2t & \frac{5t}{2}+3 & 4t\cdots & \frac{(n-4)t+6}{2} & \frac{(n-2)t+8}{2} & \frac{(n-2)t+4}{2} & \frac{(n-2)t+6}{2} & \cdots 4t & \frac{7t}{2}+3 & 2t & \frac{3t}{2}+3\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\frac{3t-2}{4} & 2t & \frac{11t-2}{4} & 4t\cdots & \frac{(2n-7)t-2}{4} & \frac{(2n-3)t+2}{4} & \frac{(2n-3)t-6}{4} & \frac{(2n-3)t-2}{4} & \cdots 4t & \frac{15t-2}{4} & 2t & \frac{7t-2}{4}\\
\frac{3t+2}{4} & 2t & \frac{11t+2}{4} & 4t\cdots & \frac{(2n-7)t+2}{4} & \frac{(2n-3)t+6}{4} & \frac{(2n-3)t-2}{4} & \frac{(2n-3)t+2}{4} & \cdots 4t & \frac{15t+2}{4} & 2t & \frac{7t+2}{4}\\
\frac{3t+6}{4} & 2t & \frac{11t+6}{4} & 4t\cdots & \frac{(2n-7)t+6}{4} & \frac{(2n-3)t+10}{4} & \frac{(2n-1)t+6}{4} & \frac{(2n-3)t+6}{4} & \cdots 4t & \frac{15t+6}{4} & 2t & \frac{7t+6}{4}\\
\frac{3t+10}{4} & 2t & \frac{11t+10}{4} & 4t\cdots & \frac{(2n-7)t+10}{4} & \frac{(2n-3)t+14}{4} & \frac{(2n-1)t+10}{4} & \frac{(2n-3)t+10}{4} & \cdots 4t & \frac{15t+10}{4} & 2t & \frac{7t+10}{4}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
t-1 & 2t & 3t-1 & 4t\cdots & \frac{(n-3)t-2}{2} & \frac{(n-1)t}{2} & \frac{tn-2}{2} & \frac{(n-1)t-2}{2} & \cdots 4t & 4t-1 & 2t & 2t-1\\
t & 2t & 3t & 4t\cdots & \frac{(n-3)t}{2} & \frac{(n-1)t+2}{2} & \frac{tn}{2} & \frac{(n-1)t}{2} & \cdots 4t & 4t & 2t & 2t
\end{pmatrix}.$$

给第 j 条路 $u_1^{(j)}u_2^{(j)}\cdots u_{n-1}^{(j)}u_n^{(j)}$ 上的边, 依次用 $\mathbf{M_3}$ 中的第 j 行的元素赋权, $j=1,2,\cdots,t$, 得到了 tP_n 的 $(\frac{tn}{2}+1)$ - 边赋权 w. 在 w 下, 除了 $(n-3)t+1$ 和 $(n-3)t+3$ 不是任何点的权度之外, 其余从 1 到 $tn+2$ 的每个数都是某个点的权度. 这说明所给的 $(\frac{tn}{2}+1)$ - 边赋权是非正规分配. 所以, $s(tP_n)=\frac{tn}{2}+1$.

若 $t\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4)$, 与 tP_n 相应的矩阵 $\mathbf{M_4}$ 为

$$\begin{pmatrix}
1 & 2t & 2t+1 & 4t\cdots & \frac{(n-5)t+2}{2} & \frac{(n-1)t+2}{2} & \frac{tn+1}{2} & \frac{(n-3)t+4}{2} & \cdots 4t & 3t+1 & 2t & t+1\\
2 & 2t & 2t+2 & 4t\cdots & \frac{(n-5)t+4}{2} & \frac{(n-1)t+4}{2} & \frac{tn+1}{2} & \frac{(n-3)t+6}{2} & \cdots 4t & 3t+2 & 2t & t+2\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\frac{t-1}{2} & 2t & \frac{5t-1}{2} & 4t\cdots & \frac{(n-4)t-1}{2} & \frac{tn-1}{2} & \frac{tn+1}{2} & \frac{(n-2)t+1}{2} & \cdots 4t & \frac{7t-1}{2} & 2t & \frac{3t-1}{2}\\
\frac{t+1}{2} & 2t & \frac{5t+1}{2} & 4t\cdots & \frac{(n-4)t+1}{2} & \frac{tn+1}{2} & \frac{tn+1}{2} & \frac{(n-2)t+3}{2} & \cdots 4t & \frac{7t+1}{2} & 2t & \frac{3t+1}{2}\\
\frac{t+3}{2} & 2t & \frac{5t+3}{2} & 4t\cdots & \frac{(n-4)t+3}{2} & \frac{(n-2)t+3}{2} & \frac{(n-2)t+1}{2} & \frac{(n-2)t+5}{2} & \cdots 4t & \frac{7t+3}{2} & 2t & \frac{3t+3}{2}\\
\frac{t+5}{2} & 2t & \frac{5t+5}{2} & 4t\cdots & \frac{(n-4)t+5}{2} & \frac{(n-2)t+5}{2} & \frac{(n-2)t+3}{2} & \frac{(n-2)t+7}{2} & \cdots 4t & \frac{7t+5}{2} & 2t & \frac{3t+5}{2}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\frac{3t-1}{4} & 2t & \frac{11t-1}{4} & 4t\cdots & \frac{(2n-7)t-1}{4} & \frac{(2n-3)t-1}{4} & \frac{(2n-3)t-5}{4} & \frac{(2n-3)t+3}{4} & \cdots 4t & \frac{15t-1}{4} & 2t & \frac{7t-1}{4}\\
\frac{3t+3}{4} & 2t & \frac{11t+3}{4} & 4t\cdots & \frac{(2n-7)t+3}{4} & \frac{(2n-3)t+3}{4} & \frac{(2n-3)t-1}{4} & \frac{(2n-3)t+7}{4} & \cdots 4t & \frac{15t+3}{4} & 2t & \frac{7t+3}{4}\\
\frac{3t+7}{4} & 2t & \frac{11t+7}{4} & 4t\cdots & \frac{(2n-7)t+7}{4} & \frac{(2n-3)t+7}{4} & \frac{(2n-1)t+5}{4} & \frac{(2n-3)t+11}{4} & \cdots 4t & \frac{15t+7}{4} & 2t & \frac{7t+7}{4}\\
\frac{3t+11}{4} & 2t & \frac{11t+11}{4} & 4t\cdots & \frac{(2n-7)t+11}{4} & \frac{(2n-3)t+11}{4} & \frac{(2n-1)t+9}{4} & \frac{(2n-3)t+15}{4} & \cdots 4t & \frac{15t+11}{4} & 2t & \frac{7t+11}{4}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
t-1 & 2t & 3t-1 & 4t\cdots & \frac{(n-3)t-2}{2} & \frac{(n-1)t-2}{2} & \frac{tn-3}{2} & \frac{(n-1)t}{2} & \cdots 4t & 4t-1 & 2t & 2t-1\\
t & 2t & 3t & 4t\cdots & \frac{(n-3)t}{2} & \frac{(n-1)t}{2} & \frac{tn-1}{2} & \frac{(n-1)t+2}{2} & \cdots 4t & 4t & 2t & 2t
\end{pmatrix}.$$

给第 k 条路 $u_1^{(k)}u_2^{(k)}\cdots u_{n-1}^{(k)}u_n^{(k)}$ 上的边, 依次用 $\mathbf{M_4}$ 中的第 k 行的元素赋权, $k=1,2,\cdots,t$, 得到了 tP_n 的 $\frac{tn+1}{2}$ - 边赋权 w. 在 w 下, 除了 $\frac{(n-3)t}{2}+1$ 不是任何点的权度之外, 其余从 1 到 $tn+1$ 的每个数都是某个点的权度. 这说明所给的 $\frac{tn+1}{2}$ - 边赋权是非正规分配. 所以 $s(tP_n)=\frac{tn+1}{2}=\lfloor\frac{tn}{2}\rfloor+1$.

参 考 文 献

[1] Chartrand G, Jacobson M, Lehel J, et al. Irregular networks[J]. Congr. Numer, 1988, 64: 197–210.

[2] Jacobson M, Lehel J. A bound for the strength of an irregular network[J]. Louisville: University of Louisville, 1986.

[3] Kinch L, Lehel J. The irregularity strength of tP_3[J]. Discrete Math., 1991, 94(1): 75–79.

[4] Aigner M, Triesch E. Irregular assignments of trees and forests[J]. SIAM J. Discrete Math., 1990, 3(4): 439–449.

[5] Cahit I, Tezer M. Irregular assignments of the forest of paths[C]. Electronic Colloquium on Computational Complexity (ECCC), 1998, 5(3): 1–14.

[6] Przybyło J. Irregularity strength of regular graphs[J]. Electronic J. Com., 2008, 15(1): R82.

[7] Ferrara M, Gilbert J, Jacobson M, et al. Irregularity strength of digraphs[J]. Discrete Math., 2009, 309(19): 5834–5840.

[8] Ferrara M, Gould R, Karo ski M, et al. An iterative approach to graph irregularity strength[J]. Discrete Applied Math., 2010, 158(11): 1189–1194.

IRREGULAR ASSIGNMENTS OF SEVERAL VERTEX-DISJOINT UNION OF PATHS WITH ORDER N

GUO Jing[1], CHEN Xiang-en[1], WANG Zhi-wen[2], YAO Bing[1]

(*1.College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China*)

(*2.School of Mathematics and Computer Sciences, Ningxia University, Yinchuan 750021, China*)

Abstract: In this paper, we investigated the irregularity strength of the vertex-disjoint union of t paths with order n. By structuring the matrix, the irregularity strength of the vertex-disjoint union of t paths with order n ($n \equiv 1 \pmod 4$) is obtained, which extends the result in [5].

Keywords: edge-weighted; irregular assignments; weighted degree; irregularity strength

2010 MR Subject Classification: 05C15