Vol. 35 (2015)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

关于 Ω - 型模李超代数

徐晓宁, 卢亚男
(辽宁大学数学学院, 辽宁 沈阳 110036)

摘 要: 本文研究了文献 [1] 中新的有限维 Ω - 型单模李超代数的结构问题. 利用 Ω - 型模李超代数的偶部生成元集, 将导子作用在其偶部生成元集上, 获得了 Ω - 型模李超代数偶部到奇部的具有负 $\mathbb{Z}$ - 次数的导子.

关键词: 模李超代数; 生成元; 导子
MR(2010) **主题分类号**: 17B50; 17B40　　　　**中图分类号**: O152.5
文献标识码: A　　　　**文章编号**: 0255-7797(2015)03-0643-13

1 引言

李超代数是在李代数基础上发展起来的一个代数学的分支. 由于基域的特征数不同, 李超代数分为非模李超代数与模李超代数. 目前, 非模李超代数 (即特征零域上的李超代数) 的研究已经取得了丰富的成果, 尤其是 Kac 的分类工作, Kac 完成了有限维单李超代数及无限维单的线性紧致李超代数的分类 [2,3]. 模李超代数 (即素特征域上的李超代数) 的研究起步较晚 (早期文献见 [4, 5]), 但近年来也取得了相当丰硕的研究成果. 我们知道, Cartan 型模李代数在有限维单模李代数的分类中占有重要地位 [6], 因此 Cartan 型模李超代数也将在有限维单模李超代数的分类中起到重要作用. 1997 年, 张永正教授构造了四族有限维 Cartan 型单模李超代数 W, S, H, K(相应于特征零的情形), 并讨论了它们的单性与限制性 [7]. 此后, 开始了对 Cartan 型单模李超代数的深入研究, 如导子超代数、滤过、自同构群等等 [8−11]. 刘文德教授于 2004 年发现了一族新的有限维 Cartan 型单模李超代数 HO [12]. 文献 [13] 研究了有限维 Cartan 型单模李超代数 KO. 可见, 有限维 Cartan 型单模李超代数的分类将不会是平凡的. 2009 年 S. Bouarroudj 给出了具有不可分解 Cartan 矩阵的模李超代数的分类, 发现了 11 类新的例外单模李超代数 [14]. 目前, 有限维 Cartan 型单模李超代数的分类仍是重要而公开的问题. 2009 年, 张永正教授利用截头多项式代数与 Grassmann 超代数做张量积, 得到了一族新的有限维单模李超代数 Ω, 即 Ω - 型模李超代数, 给出了其导子超代数, 证明了其与已知的 Cartan 型模李超代数都不同构 [1]. 文献 [15] 讨论了 Ω - 型模李超代数的滤过不变性.

李超代数的偶部可以看作是李代数, 并在李超代数结构的研究中起重要作用. Cartan 型模李超代数 W, S, 接触李超代数 K 及奇 Hamiltonian 李超代数的偶部导子的研究已经完成 [16−19]. 对于 Ω - 型模李超代数 $\Omega = \Omega_{\bar{0}} \bigoplus \Omega_{\bar{1}}$, 在伴随表示下可以把 $\Omega_{\bar{1}}$ 看作是 $\Omega_{\bar{0}}$ - 模, 进而可以研究偶部到奇部的导子. 本文将确定 Ω - 型模李超代数的偶部到奇部的具有负 $\mathbb{Z}$ - 次数的导子.

*收稿日期: 2013-05-13　　接收日期: 2013-06-21
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11126129); 辽宁大学博士启动基金资助 (2012002).
作者简介: 徐晓宁 (1976–), 女, 山东诸城, 副教授, 主要研究方向: 李代数, 李超代数.

本节中的定义及结果来自文献 [1]. 本文总设 $\mathbb{F}$ 是特征数 $p>3$ 的域, 并且 $\mathbb{F}$ 不等于它的素域 Π. 设 $\mathbb{E}=\{z_1,\cdots,z_m\}$ 是 $\mathbb{F}$ 中有限子集, 且 $\mathbb{E}$ 在 Π 上是线性无关的. 设由 $\mathbb{E}$ 生成的 $\mathbb{F}$ 的加法子群 H 不包含 1. 设 $\mathbb{N}$ 与 $\mathbb{N}_0$ 分别是自然数集与非负整数集. 设 $n\in\mathbb{N}$, $r=2n+2$. 令 $\mu_1,\cdots,\mu_{r-1}\in\mathbb{F}$, 且满足: $\mu_1=0$, $\mu_j+\mu_{n+j}=1$, $j=2,\cdots,n+1$. 置 $M=\{1,\cdots,r-1\}$, 令 $s_i\in\mathbb{N}_0$, $i=1,\cdots,r-1$. 我们定义截头多项式代数

$$A=\mathbb{F}[x_{10},x_{11},\cdots,x_{1s_1},\cdots,x_{r-10},x_{r-11},\cdots,x_{r-1s_{r-1}},y_1,\cdots,y_m]$$

使得

$$x_{ij}^p=0,\forall\, i\in M,\ j=0,1,\cdots,s_i;\ y_i^p=1,\ i=1,\cdots,m.$$

对任意 $i\in M$, 令 $\pi_i=p^{s_i+1}-1$. 设 $k\in\mathbb{N}_0$, $0\le k_i\le\pi_i$, 则 k 可唯一地表示为 p-adic 的形式: $k_i=\sum\limits_{v=0}^{s_i}\varepsilon_v(k_i)p^v$，其中 $0\le\varepsilon_v(k_i)<p$. 定义 $x_i^{k_i}=\prod\limits_{v=0}^{s_i}x_{iv}^{\varepsilon_v(k_i)}$. 设 $Q=\{(k_1,\cdots,k_{r-1})\mid 0\le k_i\le\pi_i,\ i\in M\}$. 若 $k=(k_1,\cdots,k_{r-1})\in Q$, 则令 $x^k=x_1^{k_1}\cdots x_{r-1}^{k_{r-1}}$. 约定 $x_i^{k_i}=0$, 若 $k_i<0$ 或 $k_i>\pi_i$, $i\in M$. 若 $0\le k_i,k_i'\le\pi_i$, 易见

$$x_i^{k_i}x_i^{k_i'}=x_i^{k_i+k_i'}\ne 0\Leftrightarrow\varepsilon_v(k_i)+\varepsilon_v(k_i')<p,\ v=0,1,\cdots,s_i.$$

任取 $\lambda\in H$, 可设 $\lambda=\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_iz_i$, 其中 $0\le\lambda_i<p$. 定义 $y^\lambda=y_1^{\lambda_1}\cdots y_m^{\lambda_m}$. 设 $q\in\mathbb{N}$, 且 $q>1$. 令 $\Lambda(q)$ 是具有变元 $\xi_{r+1},\cdots,\xi_{r+q}$ 的 Grassmann 超代数. 置 $\tilde\Omega:=A\otimes\Lambda(q)$. 设 $\mathbb{Z}_2=\{\bar0,\bar1\}$ 是整数模 2 的剩余类环, 则 A 的平凡的 $\mathbb{Z}_2$ - 阶化与 $\Lambda(q)$ 的自然的 $\mathbb{Z}_2$ - 阶化诱导了 $\tilde\Omega$ 的一个 $\mathbb{Z}_2$ - 阶化, 使得 $\tilde\Omega$ 是一个结合超代数. 若 $f\in A,g\in\Lambda(q)$, 则将 $\tilde\Omega$ 中的元素 $f\otimes g$ 简记为 fg. 对 $k\in\{1,\cdots,q\}$, 定义

$$\mathbb{B}_k=\{\langle i_1,i_2,\cdots,i_k\rangle\mid r+1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le r+q\}.$$

令 $\mathbb{B}(q)=\bigcup\limits_{k=0}^{q}\mathbb{B}_k$, 其中 $\mathbb{B}_0=\emptyset$. 若 $u=\langle i_1,\cdots,i_k\rangle\in\mathbb{B}_k$, 则令 $|u|=k,\{u\}=\{i_1,\cdots,i_k\}$ 与 $\xi^u=\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_k}$. 约定 $|\emptyset|=0$ 与 $\xi^\emptyset=1$. 则 $\{x^ky^\lambda\xi^u\mid k\in Q,\lambda\in H,u\in\mathbb{B}(q)\}$ 是 $\tilde\Omega$ 的一个 $\mathbb{F}$ - 基底. 若 $|x|$ 出现本文的某个表达式中, 则约定 x 是 $\mathbb{Z}_2$ - 齐次元素, $|x|$ 是 x 的 $\mathbb{Z}_2$ - 次数.

设 $s=r+q$, $T=\{r+1,\cdots,s\}$. 若 $i\in M$, 则定义 $\tilde i=\bar0\in\mathbb{Z}_2$. 若 $i\in T$, 则定义 $\tilde i=\bar1\in\mathbb{Z}_2$.

若 $2\le i\le n+1$, 则令 $i'=i+n$ 与 $[i]=1$; 若 $n+2\le i\le r-1$, 则令 $i'=i-n$ 与 $[i]=-1$; 若 $i\in T$, 则令 $i'=i$ 与 $[i]=1$.

设 $e_i=(\delta_{i1},\cdots,\delta_{ir-1}),i=1,\cdots,r-1$. 定义 $D_j\in\mathbb{E}nd(\tilde\Omega)$, $j\in T$, 使得 $D_j(x^ky^\lambda\xi^u)=\frac{\partial}{\partial\xi_j}$. 易见 D_j 是 $\tilde\Omega$ 的奇导子. 定义 $D_i\in\mathbb{E}nd(\tilde\Omega)$, $i\in M$, 使得 $D_i(x^ky^\lambda\xi^u)=k_i^*x^{k-e_i}y^\lambda\xi^u$, 其中 k_i^* 为 $\varepsilon_0(k_i),\varepsilon_1(k_i),\cdots,\varepsilon_{s_i}(k_i)$ 的第一个非零元. 易见 D_i 是 $\tilde\Omega$ 的偶导子. 设 $M_1=\{2,3,\cdots,r-1\}$. 令

$$\bar\partial=I-\sum_{j\in M_1}\mu_jx_{j\,0}\frac{\partial}{\partial x_{j\,0}}-\sum_{j=1}^{m}z_jy_j\frac{\partial}{\partial y_j}-2^{-1}\sum_{j\in T}\xi_j\frac{\partial}{\partial\xi_j},$$

这里 I 是 $\tilde{\Omega}$ 的恒等变换. 在 $\tilde{\Omega}$ 中定义双线性 [,] 运算, 使得对任意 $f\in h(\tilde{\Omega}), g\in\tilde{\Omega}$, 有

$$[f,g]=D_1(f)\bar{\partial}(g)-\bar{\partial}(f)D_1(g)+\sum_{i\in M_1\cup T}[i](-1)^{\tilde{i}|f|}D_i(f)D_{i'}(g).$$

容易证明, 关于上式定义的 [,] 运算, $\tilde{\Omega}$ 是一个单李超代数, 且当 $2n+4-q\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)$ 时, $\lambda+2^{-1}q-n-2\neq 0$. 以下总假设 $2n+4-q\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}p)$, 并记 $\tilde{\Omega}$ 为 Ω.

令 $x_i=x_i^1=x_{i0},\forall i\in M$. 置 $\pi=(\pi_1,\cdots,\pi_{r-1})$, $\omega=\langle r+1,\cdots,s\rangle$. 设 $i\in\mathbb{Z}$, 令

$$\Omega_i=\langle x^k y^\eta \xi^u \mid \sum_{i\in M_1}k_i+2k_1+|u|-2=i\rangle,$$

则 $\Omega=\bigoplus_{i=-2}^{i=\tau}\Omega_i$ 是 $\mathbb{Z}$ - 阶化李超代数, 其中 $\tau=\sum\limits_{i\in M_1}\pi_i+2\pi_1+q-2$.

2 生成元集

下面将给出 Ω - 型模李超代数的偶部生成元集. 令

$$\mathbb{B}^0=\{\langle i_1,i_2,\cdots,i_k\rangle \mid r+1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq r+q,\, k=2l, l\in\mathbb{N}_0\},$$
$$\mathbb{B}^1=\{\langle i_1,i_2,\cdots,i_k\rangle \mid r+1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq r+q,\, k=2l, l\in\mathbb{N}\}.$$

易见 $\Omega_{\bar{0}}:=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x^k y^\lambda \xi^u \mid k\in Q,\, \lambda\in H,\, u\in\mathbb{B}^0\}$.

命题 2.1 设

$$R_1:=\{x_i x_{j'} x_j y^\lambda \mid i,j,j'\in M_1,\, \lambda\in H\},$$
$$R_2:=\{x_i\xi_d\xi_h y^\lambda \mid i\in M, d,h\in T,\, \lambda\in H\},$$
$$R_3:=\{x_i^{k_i}y^\lambda \mid 0\leq k_i\leq\pi_i,\, i\in M,\, \lambda\in H\},$$

则 $R_1\bigcup R_2\bigcup R_3$ 生成 $\Omega_{\bar{0}}$.

证 设由 $R_1\bigcup R_2\bigcup R_3$ 生成的子代数为 L. 对于 $\forall i\in M_1$, $d,h,t,v,z\in T,\lambda\in H$, 有

$$x_i^{\pi_i-1}\xi_t\xi_v y^\lambda=-[i][x_i^{\pi_i},x_{i'}\xi_t\xi_v y^\lambda]\in L,$$
$$x_i^{\pi_i}\xi_t\xi_v y^\lambda=-[x_i^{\pi_i-1}\xi_t\xi_d,x_i\xi_d\xi_v y^\lambda]\in L,$$
$$x_i^{\pi_i-1}\xi_d\xi_h\xi_t\xi_v y^\lambda=[x_{i'}\xi_d\xi_h,x_i^{\pi_i}\xi_t\xi_v y^\lambda]\in L,$$

并且有

$$x_i^{\pi_i}\xi_d\xi_h\xi_t\xi_v y^\lambda=-[x_i\xi_z\xi_d,x_i^{\pi_i-1}\xi_z\xi_h\xi_t\xi_v y^\lambda]\in L. \tag{2.1}$$

利用归纳法容易证明 $x_i^{\pi_i}y^\lambda\xi^u\in L$, $\forall i\in M_1,\lambda\in H, u\in\mathbb{B}^1$. 进而, 对于 $\forall i\in M_1$, $d,h,t\in T$, 得到

$$x_1^{\pi_1}\xi_d\xi_h y^\lambda=(\lambda-1)^{-1}[x_1^{\pi_1}y^\lambda,x_1\xi_d\xi_h]\in L, \tag{2.2}$$
$$x_1^{\pi_1}x_i^{\pi_i}\xi_h\xi_t y^\lambda=[x_1^{\pi_1}\xi_d\xi_h y^\lambda,x_i^{\pi_i}\xi_d\xi_t]\in L,$$
$$x_1^{\pi_1}x_2^{\pi_2}x_i^{\pi_i}\xi_t\xi_d y^\lambda=[x_1^{\pi_1}x_i^{\pi_i}\xi_h\xi_t y^\lambda,x_2^{\pi_2}\xi_h\xi_d]\in L.$$

同样用归纳法可以证明 $x^\pi y^\lambda \xi^u \in L, \forall\, \lambda \in H,\, u \in \mathbb{B}_2$. $\forall\, i \in M_1,\, d, h, t, v, z \in T$, 由 (2.1) 和 (2.2) 式, 有

$$x_1^{\pi_1} x_i^{\pi_i} \xi_h \xi_z \xi_v \xi_t y^\lambda = [x_1^{\pi_1} \xi_d \xi_h y^\lambda, x_i^{\pi_i} \xi_d \xi_z \xi_v \xi_t] \in L,$$
$$x_1^{\pi_1} x_i^{\pi_i} x_2^{\pi_2} \xi_z \xi_v \xi_t \xi_d y^\lambda = [x_1^{\pi_1} x_i^{\pi_i} \xi_h \xi_z \xi_v \xi_t y^\lambda, x_2^{\pi_2} \xi_h \xi_d] \in L.$$

以此类推, 可以得到 $x^\pi y^\lambda \xi^u \in L, \forall\, \lambda \in H,\, u \in \mathbb{B}_4$. 进一步, 可以得到 $x^\pi y^\lambda \xi^u \in L, \forall\, \lambda \in H,\, u \in \mathbb{B}^1$.

下面将证明 $x^\pi y^\lambda \in L, \forall\, \lambda \in H$. 由于 $4[i] x_i x_{i'} y^\lambda = [x_i^2 y^\lambda, x_i'^2] \in L$, 因此

$$-2\lambda x_1 x_i x_{i'} y^\lambda = [x_1^2, x_i x_{i'} y^\lambda] \in L.$$

当 $\lambda \neq 0$ 时,

$$2\lambda(1+\lambda) x_1 x_i x_{i'} y^\lambda = [x_1, [x_1^2, x_i x_{i'} y^\lambda]] \in L,$$
$$2\lambda x_1 x_i x_{i'} = [x_1, [x_1^2 y^{-\lambda}, x_i x_{i'} y^\lambda]] \in L.$$

从而, 得到 $x_1 x_i x_{i'} y^\lambda \in L$. 由于 $x_2^{\pi_2} x_1 y^\lambda = -[2][x_2^{\pi_2} y^\lambda, x_1 x_2 x_{2'}] \in L$, 于是有

$$(\lambda - \mu_2 - 2) x_1^{\pi_1} x_2^{\pi_2} y^\lambda = [x_1^{\pi_1} y^\lambda, x_2^{\pi_2} x_1] \in L.$$

若 $\lambda - \mu_2 - 2 \not\equiv 0 \pmod p$, 那么有 $x_1^{\pi_1} x_2^{\pi_2} y^\lambda \in L$. $\forall\, i, j \in M_1$, 有

$$6 x_i x_{i'} x_i y^\lambda = [i'][x_{i'}^2 y^\lambda, x_i^3] \in L,$$
$$2 x_i x_{i'} x_j x_{j'} y^\lambda = [i'][x_i x_{i'} x_i y^\lambda, x_{i'} x_j x_{j'}] \in L,$$
$$x_1^{\pi_1} x_2^{\pi_2} x_3 x_{3'} y^\lambda = [2][x_1^{\pi_1} x_2^{\pi_2} y^\lambda, x_2 x_{2'} x_3 x_{3'}] \in L,$$
$$x_1^{\pi_1} x_2^{\pi_2} x_3^{\pi_3} y^\lambda = -[3][x_3^{\pi_3} y^\lambda, x_1^{\pi_1} x_2^{\pi_2} x_3 x_{3'}] \in L,$$
$$x_1^{\pi_1} x_2^{\pi_2} x_3^{\pi_3} x_4 x_{4'} y^\lambda = [3][x_1^{\pi_1} x_2^{\pi_2} x_3^{\pi_3} y^\lambda, x_3 x_{3'} x_4 x_{4'}] \in L,$$
$$x_1^{\pi_1} x_2^{\pi_2} x_3^{\pi_3} x_4^{\pi_4} y^\lambda = -[4][x_4^{\pi_4} y^\lambda, x_1^{\pi_1} x_2^{\pi_2} x_3^{\pi_3} x_4 x_{4'}] \in L.$$

如此做下去, 可以得到 $x^\pi y^\lambda \in L$. 设 $\lambda - \mu_2 - 2 \equiv 0 \,(\mathrm{mod} p)$. 直接计算可知

$$x_1 x_3^{\pi_3} y^\lambda = [3][x_3^{\pi_3} y^\lambda, x_1 x_3 x_{3'}] \in L.$$

同理 $x_1 x_{3'}^{\pi_{3'}} y^\lambda \in L$. 于是

$$[x_1 x_3^{\pi_3} y^\lambda, x_{3'}^{\pi_{3'}}] = (1 + \mu_{3'}) x_3^{\pi_3} x_{3'}^{\pi_{3'}} y^\lambda + [3] x_1 x_3^{\pi_3 - 1} x_{3'}^{\pi_{3'} - 1} y^\lambda \in L. \tag{2.3}$$

因为 $x_3^{\pi_3-1} x_{3'}^{\pi_{3'}-1} y^\lambda = [3][x_3^{\pi_3} y^\lambda, x_{3'}^{\pi_{3'}}] \in L$, 所以 $6 x_1 x_3^{\pi_3-1} x_{3'}^{\pi_{3'}-1} y^\lambda = [x_1^2 y^\lambda, x_3^{\pi_3-1} x_{3'}^{\pi_{3'}-1}] \in L$. 由式 (2.3), 可以知道 $(1+\mu_{3'}) x_3^{\pi_3} x_{3'}^{\pi_{3'}} y^\lambda \in L$. 于是, 若 $1 + \mu_{3'} \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod} p)$, 则 $x_3^{\pi_3} x_{3'}^{\pi_{3'}} y^\lambda \in L$. 若 $1 + \mu_{3'} \equiv 0 \,(\mathrm{mod} p)$, 则 $1 + \mu_3 \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod} p)$. 将 (2.3) 式中的 3 换成 $3'$, 同样得到 $(1+\mu_3) x_3^{\pi_3} x_{3'}^{\pi_{3'}} y^\lambda \in L$. 因此 $x_3^{\pi_3} x_{3'}^{\pi_{3'}} y^\lambda \in L$. 进而有

$$-2 x_3^{\pi_3} x_{3'}^{\pi_{3'}} x_2 x_{2'} y^\lambda = [x_3^{\pi_3} x_{3'}^{\pi_{3'}}, x_1 x_2 x_{2'} y^\lambda] \in L,$$
$$x_3^{\pi_3} x_{3'}^{\pi_{3'}} x_{2'}^{\pi_{2'}} y^\lambda = -[2'][x_3^{\pi_3} x_{3'}^{\pi_{3'}} x_2 x_{2'} y^\lambda, x_2^{\pi_2}] \in L,$$
$$x_3^{\pi_3} x_{3'}^{\pi_{3'}} x_2^{\pi_2} x_1 y^\lambda = [2][x_2^{\pi_2} x_3^{\pi_3} x_{3'}^{\pi_{3'}} y^\lambda, x_1 x_2 x_{2'}] \in L.$$

故 $(\lambda-\mu_2-3)x_1^{\pi_1}x_2^{\pi_2}x_3^{\pi_3}x_{3'}^{\pi_{3'}}y^\lambda=[x_1^{\pi_1}y^\lambda,x_2^{\pi_2}x_3^{\pi_3}x_{3'}^{\pi_{3'}}x_1]\in L$. 显然, $\lambda-\mu_2-3\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}p)$. 类似于 $\lambda-\mu_2-2\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}p)$ 情形的讨论, 我们可以得到 $x^\pi y^\lambda\in L$.

注意到 $(1-\lambda)x^{\pi-\varepsilon_1}y^\lambda\xi^u=[y^\lambda,x^\pi\xi^u]\in L$ 及 $x^{\pi-\varepsilon_{i'}}y^\lambda\xi^u=[i][x_iy^\lambda,x^\pi\xi^u]\in L$, $\forall i\in M_1$, $\lambda\in H$, $u\in\mathbb{B}^0$.

综上所述, 对于任意的 $k\in Q$, $\lambda\in H$, $u\in\mathbb{B}^0$, 有 $x^ky^\lambda\xi^u\in L$. 即 $\Omega_{\bar 0}=L$.

令 $G:=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\xi^uy^\lambda\mid u\in\mathbb{B},\lambda\in H,|\xi^uy^\lambda|=\bar 1\}$.

引理 2.2 设 $\phi\in\mathrm{Der}(\Omega_{\bar 0},\Omega_{\bar 1})$, $\phi(\Omega_{-2}\oplus\Omega_{-1})=0$ 及 $[E,\Omega_{-2}\oplus\Omega_{-1}]\subseteq\ker(\phi)$, 其中 $E\in\Omega_{\bar 0}$. 则有 $\phi(E)\in G$.

证 由已知条件 $[E,\Omega_{-2}\oplus\Omega_{-1}]\subseteq\ker(\phi)$, 就可以得到

$$\phi[E,\Omega_{-2}\oplus\Omega_{-1}]=[\phi(E),\Omega_{-2}\oplus\Omega_{-1}]=[\phi(E),\Omega_{-2}]\oplus[\phi(E),\Omega_{-1}]=0. \tag{2.4}$$

由于 $\phi\in\mathrm{Der}(\Omega_{\bar 0},\Omega_{\bar 1})$ 及 $E\in\Omega_{\bar 0}$, 故 $\phi(E)\in\Omega_{\bar 1}$. 利用 (2.4) 式可知 $D_i(\phi(E))=0$, $\forall i\in M$. 从而得到 $\phi(E)\in G$.

3 偶部到奇部的导子

本节将确定 Ω - 型模李超代数偶部到奇部的具有负 $\mathbb{Z}$ - 次数的导子. 这里约定: $q>3$ 并且 q 是偶数.

引理 3.1 设 $\phi\in\mathrm{Der}_{-1}(\Omega_{\bar 0},\Omega_{\bar 1})$ 且 $\phi(\Omega_0)=0$, 则 $\phi=0$.

证 利用命题 2.1, 首先证明 $\phi(x_i\xi_d\xi_hy^\lambda)=0$, $\forall i\in M$, $d,h\in T$, $\lambda\in H$.

$\forall i\in M_1$, 有 $[x_i\xi_d\xi_hy^\lambda,x_1]=(\lambda+\mu_i)x_i\xi_d\xi_hy^\lambda$. 故

$$[\phi(x_i\xi_d\xi_hy^\lambda),x_1]=\phi[x_i\xi_d\xi_hy^\lambda,x_1]=(\lambda+\mu_i)\phi(x_i\xi_d\xi_hy^\lambda).$$

又由于 $\phi(x_i\xi_d\xi_hy^\lambda)\in\Omega_{\bar 1}$ 且 $\phi(x_i\xi_d\xi_hy^\lambda)$ 的 $\mathbb{Z}$ - 次数为 0, 则可设

$$\phi(x_i\xi_d\xi_hy^\lambda)=\sum_{i\in M_1,d\in T,\lambda\in H}\alpha_{id\lambda}x_i\xi_dy^\lambda,\alpha_{id\lambda}\in\mathbb{F}.$$

从而

$$[\phi(x_i\xi_d\xi_hy^\lambda),x_1]=\sum_{i\in M_1,d\in T,\lambda\in H}\alpha_{id\lambda}[x_i\xi_dy^\lambda,x_1]=(\lambda+\mu_i-2^{-1})\phi(x_i\xi_d\xi_hy^\lambda).$$

由此可以得到 $\phi(x_i\xi_d\xi_hy^\lambda)=0$, $\forall i\in M_1$. 同理, $\phi(x_ix_jx_{j'}y^\lambda)=0$, $\forall i,j\in M_1$, $\lambda\in H$.

现在证明 $\phi(x_1\xi_d\xi_hy^\lambda)=0$, $\forall d,h\in T$, $\lambda\in H$. 因为 $\phi(x_1\xi_d\xi_hy^\lambda)\in\Omega_{\bar 1}$ 且 $\phi(x_1\xi_d\xi_hy^\lambda)$ 的 $\mathbb{Z}$ - 次数为 1, 故可设

$$\phi(x_1\xi_d\xi_hy^\lambda)=\sum_{z\in T,\lambda\in H}\alpha_{z\lambda}x_1\xi_zy^\lambda+\sum_{i,j\in M_1,f\in T,\lambda\in H}\beta_{ijf\lambda}x_ix_j\xi_fy^\lambda+\sum_{g,v,t\in T,\lambda\in H}\gamma_{gvt\lambda}\xi_g\xi_v\xi_ty^\lambda,$$

这里 $\alpha_{z\lambda}$, $\beta_{ijf\lambda}$, $\gamma_{gvt\lambda}\in\mathbb{F}$. 进而,

$$\begin{aligned}
&[\phi(x_1\xi_d\xi_h y^\lambda),\xi_d\xi_h]\\
=\;&\sum_{z\in T,\lambda\in H}\alpha_{z\lambda}[x_1\xi_z y^\lambda,\xi_d\xi_h]+\sum_{i,j\in M_1,f\in T,\lambda\in H}\beta_{ijf\lambda}[x_ix_j\xi_f y^\lambda,\xi_d\xi_h]\\
&+\sum_{g,v,t\in T,\lambda\in H}\gamma_{gvt\lambda}[\xi_g\xi_v\xi_t y^\lambda,\xi_d\xi_h]\\
=\;&-\sum_{\lambda\in H}\alpha_{d\lambda}x_1\xi_h y^\lambda+\sum_{\lambda\in H}\alpha_{h\lambda}x_1\xi_d y^\lambda-\sum_{i,j\in M_1,\lambda\in H}\beta_{ijd\lambda}x_ix_j\xi_h y^\lambda+\sum_{i,j\in M_1,\lambda\in H}\beta_{ijh\lambda}x_ix_j\xi_d y^\lambda\\
&-\sum_{v,t\in T\setminus\{d,h\},\lambda\in H}\gamma_{dvt\lambda}\xi_h\xi_v\xi_t y^\lambda+\sum_{v,t\in T\setminus\{d,h\},\lambda\in H}\gamma_{hvt\lambda}\xi_d\xi_v\xi_t y^\lambda.
\end{aligned}$$

又因为 $[x_1\xi_d\xi_h y^\lambda,\xi_d\xi_h]=0$, 所以 $[\phi(x_1\xi_d\xi_h y^\lambda),\xi_d\xi_h]=0$. 通过上式表明

$$\alpha_{d\lambda}=\alpha_{h\lambda}=0,\ \beta_{ijd\lambda}=\beta_{ijh\lambda}=0,\ \gamma_{dvt\lambda}=\gamma_{hvt\lambda}=0.$$

由于 $[x_1\xi_d\xi_h y^\lambda,\xi_c\xi_e]=0$, 进而可以得到 $[\phi(x_1\xi_d\xi_h y^\lambda),\xi_c\xi_e]=0$, 其中 $d,h,c,e\in T$ 且彼此互不相同. 类似的, 有

$$\begin{aligned}
&[\phi(x_1\xi_d\xi_h y^\lambda),\xi_c\xi_e]\\
=\;&\sum_{z\in T,\lambda\in H}\alpha_{z\lambda}[x_1\xi_z y^\lambda,\xi_c\xi_e]+\sum_{i,j\in M_1,f\in T,\lambda\in H}\beta_{ijf\lambda}[x_ix_j\xi_f y^\lambda,\xi_c\xi_e]\\
&+\sum_{g,v,t\in T,\lambda\in H}\gamma_{gvt\lambda}[\xi_g\xi_v\xi_t y^\lambda,\xi_c\xi_e]\\
=\;&-\sum_{\lambda\in H}\alpha_{c\lambda}x_1\xi_e y^\lambda+\sum_{\lambda\in H}\alpha_{e\lambda}x_1\xi_c y^\lambda-\sum_{i,j\in M_1,\lambda\in H}\beta_{ijc\lambda}x_ix_j\xi_e y^\lambda+\sum_{i,j\in M_1,\lambda\in H}\beta_{ije\lambda}x_ix_j\xi_c y^\lambda\\
&-\sum_{v,t\in T\setminus\{c,e\},\lambda\in H}\gamma_{cvt\lambda}\xi_e\xi_v\xi_t y^\lambda+\sum_{v,t\in T\setminus\{c,e\},\lambda\in H}\gamma_{evt\lambda}\xi_c\xi_v\xi_t y^\lambda.
\end{aligned}$$

故 $\alpha_{c\lambda}=\alpha_{e\lambda}=0$, $\beta_{ijc\lambda}=\beta_{ije\lambda}=0$, $\gamma_{cvt\lambda}=\gamma_{evt\lambda}=0$. 以此类推, 可以得到

$$\sum_{z\in T,\lambda\in H}\alpha_{z\lambda}=\sum_{i,j\in M_1,f\in T,\lambda\in H}\beta_{ijf\lambda}=\sum_{g,v,t\in T,\lambda\in H}\gamma_{gvt\lambda}=0.$$

进而, 最终可以得到 $\phi(x_1\xi_d\xi_h y^\lambda)=0$.

下面将证明 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda)=0$, $\forall\, i\in M$, $0\le k_i\le\pi_i$, $\lambda\in H$.

(i) 设 $i\in M_1$. 我们利用数学归纳法. $k_i=0$ 时显然成立. 由于 $[x_i^{k_i}y^\lambda,y^\lambda]=0$ 及 $\phi(\Omega_{-2})=0$, 有 $\phi[x_i^{k_i}y^\lambda,\Omega_{-2}]=0$. 显然 $[x_i^{k_i}y^\lambda,x_j]=[i]\delta_{i'j}k_i^*x_i^{k_i-1}y^\lambda$, $\forall\, i,j\in M_1$, $\lambda\in H$. 将 ϕ 作用上式, 并由归纳假设知 $\phi[x_i^{k_i}y^\lambda,\Omega_{-1}]=0$. 则由引理 2.2, 可知 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda)\in G_{k_i-3}$. 又由于 $k_i-3\ge 0$, 于是可设

$$\phi(x_i^{k_i}y^\lambda)=\sum_{u\in\mathbb{B}_a(a\ge 3),\lambda\in H}\theta_{u\lambda}\xi^u y^\lambda,\quad \theta_{u\lambda}\in\mathbb{F}.\tag{3.1}$$

如果 $k_i-3=q-2$, 则根据 (3.1) 式, 有 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda)=\sum\limits_{\lambda\in H}\theta_{\omega\lambda}\xi^\omega y^\lambda$, 其中 $\theta_{\omega\lambda}\in\mathbb{F}$. 显然

$$[\phi(x_i^{k_i}y^\lambda),x_i\xi_j]=\sum_{\lambda\in H}\theta_{\omega\lambda}[\xi^\omega y^\lambda,x_i\xi_j]=-\sum_{\lambda\in H}\theta_{\omega\lambda}\xi^{w-<j>}x_iy^\lambda.$$

由于 $[\phi(x_i^{k_i}y^\lambda),x_i\xi_j]=0$, 故 $\sum\limits_{\lambda\in H}\theta_{\omega\lambda}=0$. 因而 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda)=0$.

如果 $0\leq k_i-3\leq q-3$, 有 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda)=\sum\limits_{u\in\mathbb{B}_a(3\leq a\leq q-1),\lambda\in H}\theta_{u\lambda}\xi^uy^\lambda$, 其中 $\theta_{u\lambda}\in\mathbb{F}$. 由于 $3\leq|u|\leq q-1$, 所以可以取 $t\in u,v\notin u,t,v\in T$. 易见,

$$[\phi(x_i^{k_i}y^\lambda),\xi_t\xi_v]=\sum_{u\in\mathbb{B}_a(3\leq a\leq q-1),\lambda\in H}\theta_{u\lambda}[\xi^uy^\lambda,\xi_t\xi_v]=-\sum_{u\in\mathbb{B}_a(3\leq a\leq q-1),\lambda\in H}\theta_{u\lambda}\xi^{u-<t>}\xi_vy^\lambda.$$

因为 $[\phi(x_i^{k_i}y^\lambda),\xi_t\xi_v]=0$, 所以 $\sum\limits_{u\in\mathbb{B}_a(3\leq a\leq q-1),\lambda\in H}\theta_{u\lambda}=0$. 因此得到 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda)=0$.

如果 $k_i-3>q-2$, 由引理 2.2 知 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda)\in G$. 注意到 $G\subseteq\bigoplus_{i=-2}^{q-2}(\Omega_{\bar{1}})_i$, 有

$$\phi(x_i^{k_i}y^\lambda)\in G\bigcap\Omega_{k_i-3}=0.$$

综上, 得到 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda)=0,\forall\, i\in M_1,\ 0\leq k_i\leq\pi_i,\ \lambda\in H$.

(ii) 现在证明 $\phi(x_1^{k_1}y^\lambda)=0,\ 0\leq k_1\leq\pi_1,\ \lambda\in H$. 当 $k_1=0$ 时, 显然有 $\phi(x_1^{k_1}y^\lambda)=0$. 当 $k_1=1$ 时, 由已知条件 $\phi(\Omega_0)=0$, 可知 $\phi(x_1^{k_1}y^\lambda)=0$. 设 $k_1>1$. 令 $\phi(\Omega_{\bar{1}})=0$, 则 ϕ 可扩充成 Ω 的导子. 易见 $\phi(x_1^{k_1-1}\xi_j)=0$ 及 $\phi(x_i\xi_jy^\lambda)=0,\forall\, i\in M_1,\ j\in T$. 所以有 $\phi[x_1^{k_1}y^\lambda,\xi_j]=0$ 及 $\phi(x_1^{k_1-1}x_iy^\lambda)=-\phi[x_1^{k_1-1}\xi_j,x_i\xi_jy^\lambda]=0,\forall\, i\in M_1,\ j\in T$. 进而, 我们可以得到 $\phi[x_1^{k_1}y^\lambda,x_i]=0$. 又因为 $\phi(x_i)=\phi(\xi_j)=0$, 所以由文献 [1, 引理 3.5] 可知 $\phi(x_1^{k_1}y^\lambda)\in\Omega_{-2}$. 然而 $\phi(x_1^{k_1}y^\lambda)\in\Omega_{2k_1-3}$, $k_1>1$, 于是 $\phi(x_1^{k_1}y^\lambda)\in\Omega_{-2}\bigcap\Omega_{2k_1-3}=0$. 故 $\phi(x_1^{k_1}y^\lambda)=0$.

综上, 由命题 2.1 知 $\phi=0$.

定理 3.2 $\mathrm{Der}_{-1}(\Omega_{\bar{0}},\Omega_{\bar{1}})=\mathrm{ad}(\Omega_{\bar{1}})_{-1}$.

证 设 $\phi\in\mathrm{Der}_{-1}(\Omega_{\bar{0}},\Omega_{\bar{1}})$ 且

$$(\Omega_{\bar{0}})_0=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\big\{x_ix_jy^\lambda,\xi_d\xi_hy^\lambda,x_1y^\lambda\mid i,j\in M_1,\ d,h\in T,\ \lambda\in H\big\}.$$

因为 $\phi(\Omega_{\bar{0}})\in(\Omega_{\bar{1}})_{-1}$, 则可以设 $\phi(\Omega_{\bar{0}})=\sum\limits_{t\in T,\eta\in H}\theta_{t\eta}\xi_ty^\eta$. 由于 $\eta-\lambda\in H$, 所以 $\eta-\lambda\neq1$. 设

$$E:=\sum_{t\in T,\eta\in H}(\eta-\lambda-2^{-1})^{-1}\theta_{t\eta}\xi_ty^{\eta-\lambda}.$$

令 $\varphi:=\phi-\mathrm{ad}E$. 当 $\eta-\lambda-2^{-1}\neq0$ 时, 直接计算得到 $\varphi(x_1y^\lambda)=(\phi-\mathrm{ad}E)(x_1y^\lambda)=0$. 若 $j\neq i'$, 由于 $x_ix_jy^\lambda=[i'][x_ix_{i'},x_ix_jy^\lambda]$, 所以 $\varphi(x_ix_jy^\lambda)=0$. 若 $j=i'$, 由

$$x_ix_{i'}y^\lambda=4^{-1}[i][x_i^2,x_{i'}^2y^\lambda],$$

得到 $\varphi(x_ix_{i'}y^\lambda)=0,\forall\, i\in M_1$. 因而 $\varphi(x_ix_jy^\lambda)=0$. 因为

$$\varphi(\xi_d\xi_hy^\lambda)=\sum_{t\in T,\eta\in H}\theta_{t\eta}\xi_ty^\eta+\sum_{\eta\in H}(\eta-\lambda-2^{-1})^{-1}\theta_{d\eta}\xi_hy^\eta-\sum_{\eta\in H}(\eta-\lambda-2^{-1})^{-1}\theta_{h\eta}\xi_dy^\eta,$$

所以可以得到

$$\begin{aligned}&[\varphi(\xi_d\xi_h y^{\lambda}),x_1]\\=&\sum_{t\in T,\eta\in H}\theta_{t\eta}[\xi_t y^{\eta},x_1]+\sum_{\eta\in H}(\eta-\lambda-2^{-1})^{-1}\theta_{d\eta}[\xi_h y^{\eta},x_1]-\sum_{\eta\in H}(\eta-\lambda-2^{-1})^{-1}\theta_{h\eta}[\xi_d y^{\eta},x_1]\\=&(\eta-2^{-1})[\sum_{t\in T,\eta\in H}\theta_{t\eta}\xi_t y^{\eta}+\sum_{\eta\in H}(\eta-\lambda-2^{-1})^{-1}\theta_{d\eta}\xi_h y^{\eta}-\sum_{\eta\in H}(\eta-\lambda-2^{-1})^{-1}\theta_{h\eta}\xi_d y^{\eta}]\\=&(\eta-2^{-1})\varphi(\xi_d\xi_h y^{\lambda}).\end{aligned}\tag{3.2}$$

又

$$[\varphi(\xi_d\xi_h y^{\lambda}),x_1]=\varphi[\xi_d\xi_h y^{\lambda},x_1]=\lambda(\varphi(\xi_d\xi_h y^{\lambda})).\tag{3.3}$$

于是由 (3.2) 和 (3.3) 式知道, 当 $\eta\neq\lambda+2^{-1}$ 时, $\varphi(\xi_d\xi_h y^{\lambda})=0$. 而当 $\eta\neq\lambda+2^{-1}$ 时, 由于 $\varphi=\phi-\mathrm{ad}E$, 故 $\sum\limits_{t\in T,\eta\in H}\theta_{t\eta}=0$. 因此 $\varphi(\xi_d\xi_h y^{\lambda})=0$.

综上所述, $\varphi((\Omega_{\bar{0}})_0)=0$. 由引理 3.1 知 $\varphi=\phi-\mathrm{ad}E=0$. 进而 $\phi=\mathrm{ad}E$.

定理 3.3 $\mathrm{Der}_{-2}(\Omega_{\bar{0}},\Omega_{\bar{1}})=0$.

证 设 $\phi\in\mathrm{Der}_{-2}(\Omega_{\bar{0}},\Omega_{\bar{1}})$, 则 $\phi(x_ix_{j'})=0$. 先证明 $\phi(x_i\xi_d\xi_h y^{\lambda})=0$, $\forall i\in M$, $d,h\in T$, $\lambda\in H$. 对于 $i\in M_1$, 有

$$[\phi(x_j\xi_d\xi_h y^{\lambda}),x_ix_{j'}]=\phi[x_j\xi_d\xi_h y^{\lambda},x_ix_{j'}]=-[j]\phi(x_i\xi_d\xi_h y^{\lambda}).$$

又由于 $\phi(x_j\xi_d\xi_h y^{\lambda})\in(\Omega_{\bar{1}})_{-1}$, 可设 $\phi(x_j\xi_d\xi_h y^{\lambda})=\sum\limits_{t\in T,\lambda\in H}\theta_{t\lambda}\xi_t y^{\lambda}$, 其中 $\theta_{t\lambda}\in\mathbb{F}$. 所以

$$[\phi(x_j\xi_d\xi_h y^{\lambda}),x_ix_{j'}]=\sum_{t\in T,\lambda\in H}\theta_{t\lambda}[\xi_t y^{\lambda},x_ix_{j'}]=0.$$

于是 $\phi(x_i\xi_d\xi_h y^{\lambda})=0$. 同理有 $\phi(x_ix_jx_{j'}y^{\lambda})=0$. 注意到 $[x_1\xi_d\xi_h y^{\lambda},\xi_d\xi_h]=0$, 因此

$$[\phi(x_1\xi_d\xi_h y^{\lambda}),\xi_d\xi_h]=0.$$

因为 $\phi(x_1\xi_d\xi_h y^{\lambda})\in\Omega_{\bar{1}}$ 且 $\phi(x_1\xi_d\xi_h y^{\lambda})$ 的 $\mathbb{Z}$ - 次数为 0, 则可设

$$\phi(x_1\xi_d\xi_h y^{\lambda})=\sum_{i\in M_1,j\in T,\lambda\in H}\alpha_{ij\lambda}x_i\xi_j y^{\lambda},\alpha_{ij\lambda}\in\mathbb{F}.$$

于是有

$$[\phi(x_1\xi_d\xi_h y^{\lambda}),\xi_d\xi_h]=\sum_{i\in M_1,j\in T,\lambda\in H}\alpha_{ij\lambda}[x_i\xi_j y^{\lambda},\xi_d\xi_h]=\sum_{i\in M_1,\lambda\in H}\alpha_{id\lambda}x_i\xi_h y^{\lambda}-\sum_{i\in M_1,\lambda\in H}\alpha_{ih\lambda}x_i\xi_d y^{\lambda}.$$

进而得到 $\alpha_{id\lambda}=\alpha_{ih\lambda}=0$. 又由于 $[x_1\xi_d\xi_h y^{\lambda},\xi_t\xi_v]=0$, 这里 $d,h,t,v\in T$ 且互不相同, 所以 $[\phi(x_1\xi_d\xi_h y^{\lambda}),\xi_t\xi_v]=0$. 而

$$[\phi(x_1\xi_d\xi_h y^{\lambda}),\xi_t\xi_v]=\sum_{i\in M_1,j\in T,\lambda\in H}\alpha_{ij\lambda}[x_i\xi_j y^{\lambda},\xi_t\xi_v]=\sum_{i\in M_1,\lambda\in H}\alpha_{it\lambda}x_i\xi_v y^{\lambda}-\sum_{i\in M_1,\lambda\in H}\alpha_{iv\lambda}x_i\xi_t y^{\lambda}.$$

于是可得 $\alpha_{it\lambda}=\alpha_{iv\lambda}=0$. 以此类推, 有 $\sum\limits_{i\in M_1,j\in T,\lambda\in H}\alpha_{ij\lambda}=0$, 最终得到 $\phi(x_1\xi_d\xi_h y^\lambda)=0$.

下面将证明 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda)=0, \forall i\in M, 0\le k_i\le\pi_i, \lambda\in H$.

(i) 设 $i\in M_1$. 我们利用数学归纳法. $k_i=0$ 时显然成立. 由于 $[x_i^{k_i}y^\lambda, y^\lambda]=0$ 及 $\phi(\Omega_{-2})=0$, 有 $\phi[x_i^{k_i}y^\lambda,\Omega_{-2}]=0$. 显然 $[x_i^{k_i}y^\lambda,x_j]=[i]\delta_{i'j}k_i^*x_i^{k_i-1}y^\lambda, \forall i,j\in M_1, \lambda\in H$. 将 ϕ 作用上式, 并由归纳假设知 $\phi[x_i^{k_i}y^\lambda,\Omega_{-1}]=0$. 则由引理 2.2, 可知 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda)\in G_{k_i-4}$. 又由于 $k_i-4\ge -1$, 于是可设

$$\phi(x_i^{k_i}y^\lambda)=\sum_{u\in\mathbb{B}_a(a\ge 1),\lambda\in H}\theta_{u\lambda}\xi^u y^\lambda,\quad \theta_{u\lambda}\in\mathbb{F}. \tag{3.4}$$

如果 $k_i-4=q-2$, 则根据 (3.4) 式, 有 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda)=\sum\limits_{\lambda\in H}\theta_{\omega\lambda}\xi^\omega y^\lambda$, 其中 $\theta_{\omega\lambda}\in\mathbb{F}$. 显然

$$[\phi(x_i^{k_i}y^\lambda),x_i\xi_j]=\sum_{\lambda\in H}\theta_{\omega\lambda}[\xi^\omega y^\lambda,x_i\xi_j]=-\sum_{\lambda\in H}\theta_{\omega\lambda}\xi^{w-<j>}x_i y^\lambda.$$

由于 $[\phi(x_i^{k_i}y^\lambda),x_i\xi_j]=0$, 故 $\sum\limits_{\lambda\in H}\theta_{\omega\lambda}=0$. 因而 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda)=0$.

如果 $0\le k_i-4\le q-3$, 有 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda)=\sum\limits_{u\in\mathbb{B}_a(3\le a\le q-1),\lambda\in H}\theta_{u\lambda}\xi^u y^\lambda$, 其中 $\theta_{u\lambda}\in\mathbb{F}$. 由于 $3\le|u|\le q-1$, 所以可以取 $t\in u, v\notin u, t,v\in T$. 易见

$$[\phi(x_i^{k_i}y^\lambda),\xi_t\xi_v]=\sum_{u\in\mathbb{B}_a(3\le a\le q-1),\lambda\in H}\theta_{u\lambda}[\xi^u y^\lambda,\xi_t\xi_v]=-\sum_{u\in\mathbb{B}_a(3\le a\le q-1),\lambda\in H}\theta_{u\lambda}\xi^{u-<t>}\xi_v y^\lambda.$$

因为 $[\phi(x_i^{k_i}y^\lambda),\xi_t\xi_v]=0$, 所以 $\sum\limits_{u\in\mathbb{B}_a(3\le a\le q-1),\lambda\in H}\theta_{u\lambda}=0$. 因此得到 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda)=0$.

如果 $k_i-4>q-2$, 由引理 2.2 知 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda)\in G$. 注意到 $G\subseteq\bigoplus_{i=-2}^{q-2}(\Omega_{\bar 1})_i$, 有

$$\phi(x_i^{k_i}y^\lambda)\in G\bigcap\Omega_{k_i-4}=0.$$

综上, 得到 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda)=0, \forall i\in M_1, 0\le k_i\le\pi_i, \lambda\in H$.

(ii) 现在证明 $\phi(x_1^{k_1}y^\lambda)=0, 0\le k_1\le\pi_1, \lambda\in H$. 如果 $k_1=0$, 显然 $\phi(x_1^{k_1}y^\lambda)=0$. 如果 $k_1=1$, 由已知条件 $\phi\in\mathrm{Der}_{-2}(\Omega_{\bar 0},\Omega_{\bar 1})$ 可知 $\phi(x_1^{k_1}y^\lambda)=0$. 设 $k_1>1$. 令 $\phi(\Omega_{\bar 1})=0$, 则 ϕ 可扩充成 Ω 的导子. 易见 $\phi(x_1^{k_1-1}\xi_j)=0$ 及 $\phi(x_i\xi_j y^\lambda)=0, \forall i\in M_1, j\in T$. 所以有 $\phi[x_1^{k_1}y^\lambda,\xi_j]=0$ 及 $\phi(x_1^{k_1-1}x_i y^\lambda)=-\phi[x_1^{k_1-1}\xi_j,x_i\xi_j y^\lambda]=0, \forall i\in M_1, j\in T$. 进而, 可以得到 $\phi[x_1^{k_1}y^\lambda,x_i]=0$. 又因为 $\phi(x_i)=\phi(\xi_j)=0$, 所以由文献 [1, 引理 3.5] 可知 $\phi(x_1^{k_1}y^\lambda)\in\Omega_{-2}$. 然而 $\phi(x_1^{k_1}y^\lambda)\in\Omega_{2k_1-4}$, $k_1>1$, 于是 $\phi(x_1^{k_1}y^\lambda)\in\Omega_{-2}\bigcap\Omega_{2k_1-4}=0$. 故 $\phi(x_1^{k_1}y^\lambda)=0$.

综上, 由命题 2.1 知 $\phi=0$.

定理 3.4 $\mathrm{Der}_{-3}(\Omega_{\bar 0},\Omega_{\bar 1})=0$.

证 设 $\phi\in\mathrm{Der}_{-3}(\Omega_{\bar 0},\Omega_{\bar 1})$, 则 $\phi(x_i\xi_d\xi_h y^\lambda)=\phi(x_ix_jx_{j'}y^\lambda)=0, \forall i,j\in M_1, d,h\in T, \lambda\in H$. 由于 $\phi(x_1\xi_d\xi_h y^\lambda)\in\Omega_{\bar 1}$ 且 $\phi(x_1\xi_d\xi_h y^\lambda)$ 的 $\mathbb{Z}$ - 次数为 -1, 则可以设

$$\phi(x_1\xi_d\xi_h y^\lambda)=\sum_{t\in T,\lambda\in H}\theta_{t\lambda}\xi_t y^\lambda,$$

其中 $\theta_{t\lambda}\in\mathbb{F}$. 由 $[\phi(x_1\xi_d\xi_h y^\lambda),\xi_d\xi_h]=0$ 知

$$[\phi(x_1\xi_d\xi_h y^\lambda),\xi_d\xi_h]=\sum_{t\in T,\lambda\in H}\theta_{t\lambda}[\xi_t y^\lambda,\xi_d\xi_h]=-\sum_{\lambda\in H}\theta_{d\lambda}\xi_h y^\lambda+\sum_{\lambda\in H}\theta_{h\lambda}\xi_d y^\lambda.$$

又因为 $[\phi(x_1\xi_d\xi_h y^\lambda),\xi_z\xi_v]=0$, 这里 $d,\ h,\ z,\ v\in T$ 且互不相同, 进而

$$[\phi(x_1\xi_d\xi_h y^\lambda),\xi_z\xi_v]=\sum_{t\in T,\lambda\in H}\theta_{t\lambda}[\xi_t y^\lambda,\xi_z\xi_v]=-\sum_{\lambda\in H}\theta_{z\lambda}\xi_v y^\lambda+\sum_{\lambda\in H}\theta_{v\lambda}\xi_z y^\lambda.$$

于是 $\theta_{d\lambda}=\theta_{h\lambda}=\theta_{z\lambda}=\theta_{v\lambda}=0$. 以此类推, 有 $\sum\limits_{t\in T,\lambda\in H}\theta_{t\lambda}=0$. 故而 $\phi(x_1\xi_d\xi_h y^\lambda)=0$.

下面将证明 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda)=0,\ \forall i\in M,\ 0\le k_i\le\pi_i,\ \lambda\in H$.

(i) 设 $i\in M_1$. 利用数学归纳法. $k_i=0$ 时显然成立. 由于 $[x_i^{k_i}y^\lambda,y^\lambda]=0$ 及 $\phi(\Omega_{-2})=0$, 我们有 $\phi[x_i^{k_i}y^\lambda,\Omega_{-2}]=0$. 显然 $[x_i^{k_i}y^\lambda,x_j]=[i]\delta_{i'j}k_i^*x_i^{k_i-1}y^\lambda,\ \forall i,j\in M_1,\ \lambda\in H$. 将 ϕ 作用上式, 并由归纳假设知 $\phi[x_i^{k_i}y^\lambda,\Omega_{-1}]=0$. 则由引理 2.2, 可知 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda)\in G_{k_i-5}$. 又由于 $k_i-5\ge-1$, 于是可设

$$\phi(x_i^{k_i}y^\lambda)=\sum_{u\in\mathbb{B}_a(a\ge1),\lambda\in H}\theta_{u\lambda}\xi^u y^\lambda,\quad \theta_{u\lambda}\in\mathbb{F}. \tag{3.5}$$

如果 $k_i-5=q-2$, 则根据 (3.5) 式, 有 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda)=\sum\limits_{\lambda\in H}\theta_{\omega\lambda}\xi^\omega y^\lambda$, 其中 $\theta_{\omega\lambda}\in\mathbb{F}$. 显然

$$[\phi(x_i^{k_i}y^\lambda),x_i\xi_j]=\sum_{\lambda\in H}\theta_{\omega\lambda}[\xi^\omega y^\lambda,x_i\xi_j]=-\sum_{\lambda\in H}\theta_{\omega\lambda}\xi^{w-<j>}x_i y^\lambda.$$

由于 $[\phi(x_i^{k_i}y^\lambda),x_i\xi_j]=0$, 故 $\sum\limits_{\lambda\in H}\theta_{\omega\lambda}=0$. 因而 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda)=0$.

如果 $0\le k_i-5\le q-3$, 有 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda)=\sum\limits_{u\in\mathbb{B}_a(3\le a\le q-1),\lambda\in H}\theta_{u\lambda}\xi^u y^\lambda$, 其中 $\theta_{u\lambda}\in\mathbb{F}$. 由于 $3\le|u|\le q-1$, 所以可以取 $t\in u,\ v\notin u,t,v\in T$. 易见,

$$[\phi(x_i^{k_i}y^\lambda),\xi_t\xi_v]=\sum_{u\in\mathbb{B}_a(3\le a\le q-1),\lambda\in H}\theta_{u\lambda}[\xi^u y^\lambda,\xi_t\xi_v]=-\sum_{u\in\mathbb{B}_a(3\le a\le q-1),\lambda\in H}\theta_{u\lambda}\xi^{u-<t>}\xi_v y^\lambda.$$

因为 $[\phi(x_i^{k_i}y^\lambda),\xi_t\xi_v]=0$, 所以 $\sum\limits_{u\in\mathbb{B}_a(3\le a\le q-1),\lambda\in H}\theta_{u\lambda}=0$. 因此得到 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda)=0$.

如果 $k_i-5>q-2$, 由引理 2.2 知 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda)\in G$. 注意到 $G\subseteq\bigoplus_{i=-2}^{q-2}(\Omega_{\bar1})_i$, 有

$$\phi(x_i^{k_i}y^\lambda)\in G\bigcap\Omega_{k_i-5}=0.$$

综上, 得到 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda)=0,\ \forall i\in M_1,\ 0\le k_i\le\pi_i,\ \lambda\in H$.

(ii) 下面证明 $\phi(x_1^{k_1}y^\lambda)=0,\ 0\le k_1\le\pi_1,\ \lambda\in H$. 如果 $k_1=0$, 显然 $\phi(x_1^{k_1}y^\lambda)=0$. 如果 $k_1=1$, 由已知条件 $\phi\in\mathrm{Der}_{-3}(\Omega_{\bar0},\Omega_{\bar1})$ 可知 $\phi(x_1^{k_1}y^\lambda)=0$. 设 $k_1>1$. 令 $\phi(\Omega_{\bar1})=0$, 则 ϕ 可扩充成 Ω 的导子. 易见 $\phi(x_1^{k_1-1}\xi_j)=0$ 及 $\phi(x_i\xi_j y^\lambda)=0,\forall i\in M_1,\ j\in T$. 所以有 $\phi[x_1^{k_1}y^\lambda,\xi_j]=0$ 及

$$\phi(x_1^{k_1-1}x_i y^\lambda)=-\phi[x_1^{k_1-1}\xi_j,x_i\xi_j y^\lambda]=0,\forall i\in M_1,\ j\in T.$$

进而, 可以得到 $\phi[x_1^{k_1}y^\lambda, x_i] = 0$. 又因为 $\phi(x_i) = \phi(\xi_j) = 0$, 所以由文献 [1, 引理 3.5] 可知 $\phi(x_1^{k_1}y^\lambda) \in \Omega_{-2}$. 然而 $\phi(x_1^{k_1}y^\lambda) \in \Omega_{2k_1-5}$, $k_1 > 1$, 于是 $\phi(x_1^{k_1}y^\lambda) \in \Omega_{-2}\bigcap\Omega_{2k_1-5} = 0$. 故 $\phi(x_1^{k_1}y^\lambda) = 0$.

综上, 由命题 2.1 可知 $\phi = 0$.

定理 3.5 设 $\phi \in \mathrm{Der}_{-\mathrm{t}}(\Omega_{\bar{0}}, \Omega_{\bar{1}}), \mathrm{t} > 3$. 如果 $\phi(x_i^t y^\lambda) = 0$, 则有 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda) = 0, 0 \le k_i \le \pi_i, i \in M_1, \lambda \in H$.

证 对于 $k_i \ge t+1$, 用归纳法来证明 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda) = 0, 0 \le k_i \le \pi_i, i \in M_1, \lambda \in H$. 由于 $[x_i^{k_i}y^\lambda, y^\lambda] = 0$ 及 $\phi(\Omega_{-2}) = 0$, 有 $\phi[x_i^{k_i}y^\lambda, \Omega_{-2}] = 0$. 显然

$$[x_i^{k_i}y^\lambda, x_j] = [i]\delta_{i'j}k_i^* x_i^{k_i-1}y^\lambda, \forall\, i, j \in M_1,\ \lambda \in H.$$

将 ϕ 作用上式, 并由归纳假设知 $\phi[x_i^{k_i}y^\lambda, \Omega_{-1}] = 0$. 则由引理 2.2, 可知 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda) \in G_{k_i-2-t}$. 又由于 $k_i - 2 - t \ge -1$, 于是可设

$$\phi(x_i^{k_i}y^\lambda) = \sum_{u\in\mathbb{B}_a(a\ge1),\lambda\in H} \theta_{u\lambda}\xi^u y^\lambda, \quad \theta_{u\lambda} \in \mathbb{F}. \tag{3.6}$$

如果 $k_i - 2 - t = q - 2$, 根据 (3.6) 式有 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda) = \sum\limits_{\lambda\in H}\theta_{\omega\lambda}\xi^\omega y^\lambda$, 其中 $\theta_{\omega\lambda} \in \mathbb{F}$. 显然

$$[\phi(x_i^{k_i}y^\lambda), x_i\xi_j] = -\sum_{\lambda\in H}\theta_{\omega\lambda}\xi^{w-\langle j\rangle}x_i y^\lambda.$$

又由于 $[\phi(x_i^{k_i}y^\lambda), x_i\xi_j] = 0$, 故 $\sum\limits_{\lambda\in H}\theta_{\omega\lambda} = 0$. 因此得到 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda) = 0$.

如果 $-1 \le k_i - t - 2 \le q - 3$, 由 (3.6) 式可令

$$\phi(x_i^{k_i}y^\lambda) = \sum_{u\in\mathbb{B}_a(3\le a\le q-1),\lambda\in H}\theta_{u\lambda}\xi^u y^\lambda,$$

其中 $\theta_{\omega\lambda} \in \mathbb{F}$. 由于 $3 \le |u| \le q - 1$, 所以可以取 $t \in u, v \notin u, t, v \in T$. 因为

$$[\phi(x_i^{k_i}y^\lambda), \xi_t\xi_v] = -\sum_{u\in\mathbb{B}_a(3\le a\le q-1),\lambda\in H}\theta_{u\lambda}\xi^{u-<t>}\xi_v y^\lambda,$$

并且 $[\phi(x_i^{k_i}y^\lambda), \xi_t\xi_v] = 0$, 故

$$\sum_{u\in\mathbb{B}_a(3\le a\le q-1),\lambda\in H}\theta_{u\lambda} = 0.$$

于是有 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda) = 0$.

如果 $k_i - t - 2 > q - 2$, 由引理 2.2, 得到 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda) \in G$. 注意到 $G \subseteq \bigoplus_{i=-2}^{q-2}(\Omega_{\bar{1}})_i$, 所以 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda) \in G\bigcap\Omega_{k_i-t-2} = 0$.

综上, 得到 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda) = 0, i \in M_1$.

定理 3.6 设 $\phi \in \mathrm{Der}_{-\mathrm{t}}(\Omega_{\bar{0}}, \Omega_{\bar{1}}), \mathrm{t} > 3$. 设 $l = [\frac{t}{2}]$ 表示 $\frac{t}{2}$ 的整数部分. 如果 $\phi(x_1^l y^\lambda) = 0$, 则有 $\phi(x_1^{k_1}y^\lambda) = 0$, $0 \le k_1 \le \pi_1, \lambda \in H$.

证 如果 $k_1 < l$, 则 $2k_1 < t$, 进而 $\phi(x_1^{k_1}y^\lambda)$ 的 $\mathbb{Z}$ 次数为 $2k_1-t-2$. 因为 $2k_1-t-2 \leq -3$, 所以得到 $\phi(x_1^{k_1}y^\lambda) = 0$. 设 $k_1 > l$, 令 $\phi(\Omega_{\bar{1}}) = 0$, 则 ϕ 可扩充成 Ω 的导子. 易见 $\phi(x_1^{k_1-1}\xi_j) = 0$ 及 $\phi(x_i\xi_jy^\lambda) = 0, \forall i \in M_1, j \in T$. 所以有 $\phi[x_1^{k_1}y^\lambda, \xi_j] = 0$ 及

$$\phi(x_1^{k_1-1}x_iy^\lambda) = -\phi[x_1^{k_1-1}\xi_j, x_i\xi_jy^\lambda] = 0, \forall i \in M_1, j \in T.$$

进而, 可以得到 $\phi[x_1^{k_1}y^\lambda, x_i] = 0$. 又因为 $\phi(x_i) = \phi(\xi_j) = 0$, 所以由文献 [1, 引理 3.5] 可知 $\phi(x_1^{k_1}y^\lambda) \in \Omega_{-2}$. 然而 $\phi(x_1^{k_1}y^\lambda) \in \Omega_{2k_1-2-t}$, $k_1 > l$, 于是

$$\phi(x_1^{k_1}y^\lambda) \in \Omega_{-2} \bigcap \Omega_{2k_1-2-t} = 0.$$

故 $\phi(x_1^{k_1}y^\lambda) = 0$.

推论 3.7 设 $\phi \in \mathrm{Der}_{-t}(\Omega_{\bar{0}}, \Omega_{\bar{1}})$, 其中 $t > 3$ 是奇数, 则 $\phi(x_1^{k_1}y^\lambda) = 0, 0 \leq k_1 \leq \pi_1$.

证 令 $l = [\frac{t}{2}]$ 表示 $\frac{t}{2}$ 的整数部分, 则可知 $\phi(x_1^ly^\lambda)$ 的 $\mathbb{Z}$ - 次数为

$$2l-2-t = (t-1-2)-t = -3.$$

因而有 $\phi(x_1^ly^\lambda) = 0$. 由定理 3.6 可知 $\phi(x_1^{k_1}y^\lambda) = 0$.

定理 3.8 设 $t > 3$, 则 $\mathrm{Der}_{-t}(\Omega_{\bar{0}}, \Omega_{\bar{1}}) = 0$.

证 设 $\phi \in \mathrm{Der}_{-t}(\Omega_{\bar{0}}, \Omega_{\bar{1}})$. 由于 $\phi(x_i^ty^\lambda) \in \Omega_{\bar{1}}$ 且 $\phi(x_i^ty^\lambda)$ 的 $\mathbb{Z}$ - 次数为 -2, 所以我们有 $\phi(x_i^ty^\lambda) = 0, \forall i \in M_1$. 由定理 3.5, 有 $\phi(x_i^{k_i}y^\lambda) = 0$, $i \in M_1$, $0 \leq k_i \leq \pi_i$. 如果 t 为奇数, 由推论 3.7 知 $\phi(x_1^{k_i}y^\lambda) = 0$. 如果 t 为偶数, 设 $l = [\frac{t}{2}]$. 则 $\phi(x_1^ly^\lambda) \in \Omega_{\bar{1}}$ 且 $\mathbb{Z}$ 次数为 -2, 于是 $\phi(x_1^ly^\lambda) = 0$. 由定理 3.6 知 $\phi(x_1^{k_i}y^\lambda) = 0$. 又因为 $\phi \in \mathrm{Der}_{-t}(\Omega_{\bar{0}}, \Omega_{\bar{1}})$, $t > 3$, 所以

$$\phi(x_ix_jx_{j'}y^\lambda) = \phi(x_i\xi_d\xi_hy^\lambda) = 0.$$

进而由命题 2.1, 得到 $\phi = 0$.

参 考 文 献

[1] Zhang Yongzheng, Zhang Qingcheng. Finite-dimensional modular Lie superalgebra Ω [J]. J. Algebra, 2009, 321: 3601–3619.

[2] Kac V G. Lie superalgebras[J]. Adv. Math., 1977, 26: 8–96.

[3] Kac V G. Classification of infinite-dimensional simple linearly compact Lie superalgebras[J]. Adv. Math., 1998, 139: 1–55.

[4] Petrogradski V M. Identities in the enveloping algebras for modular Lie superalgebras[J]. J. Algebra, 1992, 145: 1–21.

[5] Kochetkov Y U, Leites D. Simple Lie algebras in characteristic 2 recovered from superalgebras and on the notion of a simple finite group[J]. Contemp. Math., 1992, 131: 59–67.

[6] Strade H, Wilson R L. The classification of the simple modular Lie algebras over algebraically closed fields of prime characteristic[J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1991, 24(2): 337–362.

[7] Zhang Yongzheng. Finite-dimensional Lie superalgebras of Cartan-type over fields of prime characteristic[J]. Chin. Sci. Bull., 1997, 42: 720–724.

[8] 张永正, 刘文德. 模李超代数 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[9] Zhang Yongzheng, Fu Hongchen. Finite-dimensional Hamiltonian Lie superalgebras[J]. Comm. Algebra, 2002, 30: 2651–2673.

[10] Liu Wende, Zhang Yongzheng. Automorphism groups of restricted Cartan-type Lie superalgebrs[J]. Comm. Algebra, 2006, 34: 1–18.

[11] Guan Baoling, Chen Liangyun. Derivations of the even part of contact Lie superalgebra[J]. J. Pure Appl. Algebra, 2012, 216: 1454–1466.

[12] Liu Wende, Zhang Yongzheng, Wang Xiuling. The derivation algebra of the Cartan-type Lie superalgebra HO[J]. J. Algebra, 2004, 273: 176–205.

[13] Fu Jiayuan, Zhang Qingcheng, Jiang Cuibo. The Cartan-type modular Lie superalgebra KO[J]. Comm. Algebra, 2006, 34(1): 107–128.

[14] Bouarroudj S, Grozman P, Leites D. Classification of finite dimensional modular Lie superalgebras with indecomposable Cartan matrix[J]. SIGMA, 2009, 5.

[15] Xu Xiaoning, Chen Liangyun, Zhang Yongzheng. On the modular Lie superalgebra Ω[J]. J. Pure Appl. Algebra, 2011, 215: 1093–1101.

[16] Liu Wende, Guan Baoling. Derivations from the even parts into the odd parts for Lie superalgebras W and S[J]. J. Lie Theory, 2007, 17: 449–468.

[17] Liu Wende, Hua Xiuying, Su Yucai. Derivations of the even part of odd Hamiltonian superalgebra in modular case[J]. Acta Math. Sin. English Ser. Mar., 2009, 25(3): 355–378.

[18] Liu Wende, Zhang Yongzheng. Derivations for the even parts of modular Lie superalgebras W and S of Cartan type[J]. Int. J. Algebra Computation, 2007, 714: 661–714.

[19] 关宝玲, 刘文德. Contact 李超代数偶部的生成元及其应用 [J]. 数学杂志, 2008, 28(4): 418–424.

ON THE MODULAR LIE SUPERALGEBRA OF Ω-TYPE

XU Xiao-ning, LU Ya-nan

(*School of Mathematics, Liaoning University, Shenyang 110036, China*)

Abstract: The constitutive property of the finite-dimensional new simple modular Lie superalgebra of Ω-type in [1] is discussed. By using the generating set of the even part of modular Lie superalgebra of Ω-type, we obtain the derivations with negative $\mathbb{Z}$-degrees of the even part into the odd part by means of acting derivations on its generating set of the even part.

Keywords: modular Lie superalgebra; generator; derivation

2010 MR Subject Classification: 17B50; 17B40