

4 类图完美匹配数目的递推求法

唐保祥¹, 任 韩²

(1. 天水师范学院数学与统计学院, 甘肃 天水 741001)

(2. 华东师范大学数学系, 上海 200062)

摘 要: 本文研究了 4 类特殊图完美匹配数目的显式表达式. 利用划分, 求和, 再递推的方法分别给出了图 $3-nZ_4$, $2-n(2-C_6)$, $2-n(2-K_4)$ 和 $3-n(C_4-C_6)$ 的完美匹配数目的计算公式.

关键词: 完美匹配; 线性递推式; 特征方程

MR(2010) 主题分类号: 05C30; 05C70

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2015)03-0626-09

1 引言及预备知识

完美匹配的计数理论在量子化学、晶体物理学和计算机科学中都有重要的应用, 例如, 二分图的完美匹配的数目可以方便地表示为计算积和式的值^[1-4]. 由于完美匹配的计数理论在化学、物理学和计算机科学中有重要的理论价值和现实意义, 所以引起人们对此问题的广泛研究^[5-16]. 本文研究特殊图类完美匹配的计数方法, 给出了 4 类图完美匹配数的显式表达式, 其研究方法为得到一般有完美匹配图的所有完美匹配数目提供了借鉴.

定义 1 若图 G 的两个完美匹配 M_1 和 M_2 中有一条边不同, 则称 M_1 和 M_2 是 G 的两个不同的完美匹配.

定义 2 分别连接 n 圈 $u_1u_2 \cdots u_nu_1$ 与 $v_1v_2 \cdots v_nv_1$ 的顶点 u_i 与 v_i ($i = 1, 2, \cdots, n$), 得到的图称为 n 棱柱, 记为 Z_n .

2 主要结果

定理 1 $2n$ 个 6 圈为 $C_{i1} : u_{i1}u_{i2} \cdots u_{i6}u_{i1}$, $C_{i2} : v_{i1}v_{i2} \cdots v_{i6}v_{i1}$ ($i = 1, 2, \cdots, n$), 分别连接圈 C_{i1} 和 C_{i2} 的顶点 u_{i4} 与 v_{i2} , u_{i5} 与 v_{i1} ; 再分别连接 C_{i1} 与 $C_{i+1,1}$, C_{i2} 与 $C_{i+1,2}$ 的顶点 u_{i3} 与 $u_{i+1,6}$, v_{i2} 与 $v_{i+1,1}$ ($i = 1, 2, \cdots, n-1$), 这样所得的图记为 $2-n(2-C_6)$, 如图 1 所示. $f(n)$ 表示图 $2-n(2-C_6)$ 的完美匹配的数目. 则

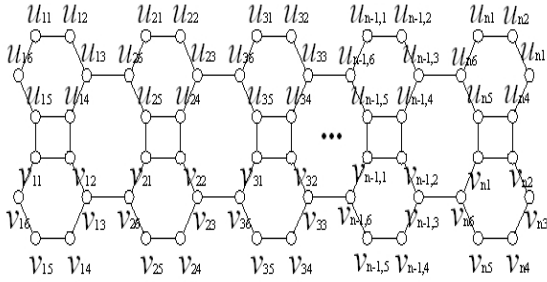
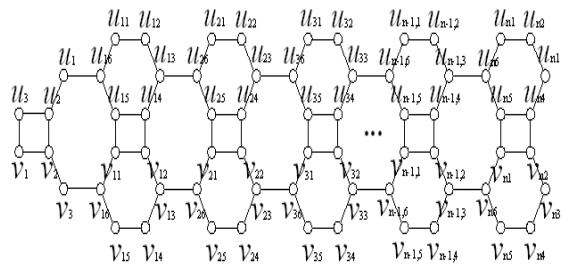
$$f(n) = \frac{13+3\sqrt{13}}{26} \left(\frac{7+\sqrt{13}}{2} \right)^n + \frac{13-3\sqrt{13}}{26} \left(\frac{7-\sqrt{13}}{2} \right)^n.$$

证 为了求 $f(n)$, 先定义 1 个图 G_1 , 并求其完美匹配的数目. 将长为 5 的路 $u_1u_2u_3v_1v_2v_3$ 的顶点 u_1, v_3 与圈 C_{11} 和 C_{12} 的顶点 u_{16}, v_{16} 分别连接一条边得到的图记为 G_1 , 如图 2 所示. $\alpha(n)$ 表示图 G_1 的完美匹配的数目.

*收稿日期: 2013-02-19 接收日期: 2013-06-13

基金项目: 国家自然科学基金 (11171114).

作者简介: 唐保祥 (1961-), 男, 甘肃天水, 教授, 主要研究方向: 图论和组合数学.

图 1: $2-n(2-C_6)$ 图图 2: G_1 图

先求 $\alpha(n)$. 易知图 G_1 有完美匹配. 设图 G_1 的完美匹配集合为 $\mathcal{M}$, 图 G_1 含边 u_3u_2, u_3v_1 的完美匹配集合分别为 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$, 则 $\mathcal{M}_i \neq \phi (i = 1, 2)$, $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \phi$, 所以 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$, 故

$$\alpha(n) = |\mathcal{M}| = |\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2|.$$

求 $|\mathcal{M}_1|$. $\forall M_1 \in \mathcal{M}_1$, 因为 $u_3u_2 \in M_1$, 所以 $v_1v_2, u_1u_{16}, v_3v_{16}, u_{11}u_{12}, v_{15}v_{14} \in M_1$. 故由 $\alpha(n)$ 的定义知

$$|\mathcal{M}_1| = \alpha(n-1).$$

求 $|\mathcal{M}_2|$.

情形 1 $\mathcal{M}_{21} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{21} \in \mathcal{M}_{21}, u_3v_1, u_2v_2, u_1u_{16}, v_1v_{16}, u_{11}u_{12}, v_{15}v_{14} \in M_{21}$, 故由 $\alpha(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{21}| = \alpha(n-1)$.

情形 2 $\mathcal{M}_{22} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{22} \in \mathcal{M}_{22}, u_3v_1, u_1u_2, v_2v_3 \in M_{22}$, 由 $f(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{22}| = f(n)$.

易知 $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_{21} \cup \mathcal{M}_{22}, \mathcal{M}_{21} \cap \mathcal{M}_{22} = \phi$, 故 $|\mathcal{M}_2| = f(n) + \alpha(n-1)$. 故

$$\alpha(n) = f(n) + 2\alpha(n-1). \quad (1)$$

再求 $f(n)$. 易知图 $2-n(2-C_6)$ 有完美匹配. 设图 $2-n(2-C_6)$ 的完美匹配集合为 $\mathcal{M}$, 图 $2-n(2-C_6)$ 含边 $u_{16}u_{11}, u_{16}u_{15}$ 的完美匹配集合分别为 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$, 则 $\mathcal{M}_i \neq \phi (i = 1, 2)$, $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \phi$, 所以 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$. 故 $f(n) = |\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2|$.

求 $|\mathcal{M}_1|$.

情形 1 $\mathcal{M}_{11} \subseteq \mathcal{M}_1, \forall M_{11} \in \mathcal{M}_{11}, u_{16}u_{11}, u_{12}u_{13}, u_{15}u_{14}, v_{16}v_{11}, v_{12}v_{13}, v_{15}v_{14} \in M_{11}$, 由 $f(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{11}| = f(n-1)$.

情形 2 $\mathcal{M}_{12} \subseteq \mathcal{M}_1, \forall M_{12} \in \mathcal{M}_{12}, u_{16}u_{11}, u_{12}u_{13}, u_{15}u_{14}, v_{16}v_{15}, v_{11}v_{12}, v_{14}v_{13} \in M_{12}$, 由 $f(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{12}| = f(n-1)$.

情形 3 $\mathcal{M}_{13} \subseteq \mathcal{M}_1, \forall M_{13} \in \mathcal{M}_{13}, u_{16}u_{11}, u_{12}u_{13}, u_{15}v_{11}, u_{14}v_{12}, v_{16}v_{15}, v_{14}v_{13} \in M_{13}$, 由 $f(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{13}| = f(n-1)$.

易知 $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_{11} \cup \mathcal{M}_{12} \cup \mathcal{M}_{13}, \mathcal{M}_{1i} \cap \mathcal{M}_{1j} = \phi (1 \leq i < j \leq 3)$, 故 $|\mathcal{M}_1| = 3f(n-1)$.

求 $|\mathcal{M}_2|$.

情形 1 $\mathcal{M}_{21} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{21} \in \mathcal{M}_{21}, u_{16}u_{15}, u_{11}u_{12}, u_{13}u_{14}, v_{16}v_{11}, v_{15}v_{14}, v_{12}v_{13} \in M_{21}$, 由 $f(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{21}| = f(n-1)$.

情形 2 $\mathcal{M}_{22} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{22} \in \mathcal{M}_{22}, u_{16}u_{15}, u_{11}u_{12}, u_{13}u_{26}, u_{14}v_{12}, v_{16}v_{11}, v_{15}v_{14}, v_{13}v_{26}, u_{21}u_{22}, v_{25}v_{24} \in M_{22}$, 由 $\alpha(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{22}| = \alpha(n-2)$.

情形 3 $\mathcal{M}_{23} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{23} \in \mathcal{M}_{23}, u_{16}u_{15}, u_{11}u_{12}, u_{13}u_{14}, v_{16}v_{15}, v_{11}v_{12}, v_{14}v_{13} \in M_{23}$, $f(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{23}| = f(n-1)$.

易知 $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_{21} \cup \mathcal{M}_{22} \cup \mathcal{M}_{23}, \mathcal{M}_{2i} \cap \mathcal{M}_{2j} = \emptyset (1 \leq i < j \leq 3)$, 故

$$|\mathcal{M}_2| = 2f(n-1) + \alpha(n-2).$$

综上所述

$$f(n) = 5f(n-1) + \alpha(n-2), \quad (2)$$

把 (1) 式代入 (2) 式, 得

$$f(n) = 5f(n-1) + f(n-2) + 2\alpha(n-3), \quad (3)$$

由 (2) 式, 得

$$f(n-1) = 5f(n-2) + \alpha(n-3), \quad (4)$$

(3) - 2×(4) 式, 得

$$f(n) = 7f(n-1) - 9f(n-2). \quad (5)$$

(5) 式的特征方程的根为 $x = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$. 易知 $f(1) = 5, f(2) = 26$, 所以 (5) 式的通解为

$$f(n) = \frac{13 + 3\sqrt{13}}{26} \left(\frac{7 + \sqrt{13}}{2} \right)^n + \frac{13 - 3\sqrt{13}}{26} \left(\frac{7 - \sqrt{13}}{2} \right)^n.$$

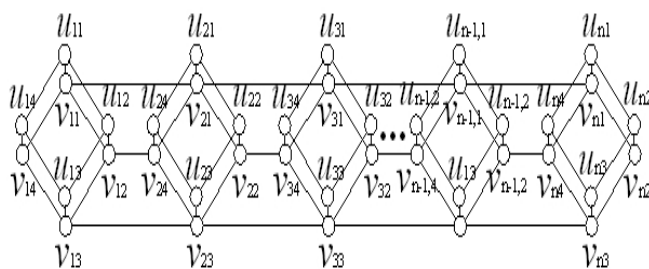
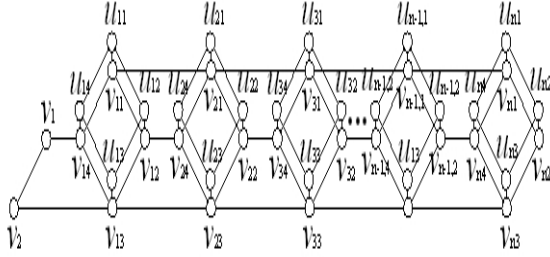
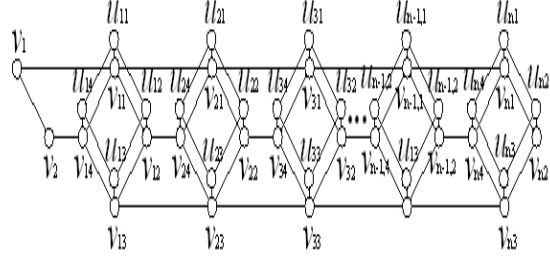


图 3: $3-nZ_4$ 图

定理 2 n 个 4 棱柱 Z_4^i 的顶点集为 $V(Z_4^i) = \{u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, u_{i4}, v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}, v_{i4}\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 分别连接 4 棱柱 Z_4^i 和 Z_4^{i+1} 的顶点 v_{i1} 和 $v_{i+1,1}$, v_{i2} 和 $v_{i+1,4}$, v_{i3} 和 $v_{i+1,3}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$). 这样得到的图记为 $3-nZ_4$, 如图 5 所示. $g(n)$ 表示图 $3-nZ_4$ 的完美匹配的数目. 则 $g(n) = 9 \times 11^n$.

证 为了求 $g(n)$, 先定义 2 个图 G_2 和 G_3 , 并求其完美匹配的数目. 将长为 1 的路 v_1v_2 的端点 v_1 和 v_2 分别与图 $3-nZ_4$ 的顶点 v_{14} 和 v_{13} , v_{11} 和 v_{14} 各连接一条边得到的图分别记为 G_2, G_3 , 如图 4, 5 所示. 易知图 G_2, G_3 均有完美匹配. $\beta(n), \gamma(n)$ 分别表示图 G_2, G_3 的完美匹配的数目. 显然 $G_2 \cong G_3$, 故 $\beta(n) = \gamma(n)$.

图 4: G_2 图图 5: G_3 图

先求 $\beta(n)$. 设图 G_2 的完美匹配的集合为 $\mathcal{M}$, G_2 含边 u_1u_2, u_1u_{15} 的完美匹配集合分别为 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$. 则 $\mathcal{M}_i \neq \phi (i = 1, 2)$, $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \phi$, 所以 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$, $\alpha(n) = |\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2|$.

求 $|\mathcal{M}_1|$. $\forall M_1 \in \mathcal{M}_1$, 因为 $v_1v_2 \in M_1$, 所以由 $g(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_1| = g(n)$.

求 $|\mathcal{M}_2|$.

情形 1 $\mathcal{M}_{21} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{21} \in \mathcal{M}_{21}, v_1v_{14}, v_2v_{13}, u_{14}u_{11}, u_{13}u_{12} \in M_{21}$, 故由 $\gamma(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{21}| = \gamma(n-1) = \beta(n-1)$.

情形 2 $\mathcal{M}_{22} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{22} \in \mathcal{M}_{22}, v_1v_{14}, v_2v_{13}, u_{14}u_{13}, u_{11}v_{11}, u_{12}v_{12} \in M_{22}$, 故由 $g(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{22}| = g(n-1)$.

情形 3 $\mathcal{M}_{23} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{23} \in \mathcal{M}_{23}, v_1v_{14}, v_2v_{13}, u_{14}u_{13}, u_{11}u_{12} \in M_{23}$, 故由 $\gamma(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{23}| = \gamma(n-1) = \beta(n-1)$.

易知 $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_{21} \cup \mathcal{M}_{22} \cup \mathcal{M}_{23}$, $\mathcal{M}_{2i} \cap \mathcal{M}_{2j} = \phi (1 \leq i < j \leq 3)$, 故 $|\mathcal{M}_2| = f(n-1) + 2\beta(n-1)$. 故

$$\beta(n) = g(n) + g(n-1) + 2\beta(n-1). \quad (6)$$

再求 $g(n)$. 易知图 $3-nZ_4$ 有完美匹配. 设图 $3-nZ_4$ 的完美匹配集合为 $\mathcal{M}$, 图 $3-nZ_4$ 含边 $u_{14}u_{11}, u_{14}v_{14}, u_{14}u_{13}$ 的完美匹配集合分别为 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$, 则 $\mathcal{M}_i \neq \phi (i = 1, 2, 3)$, $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_j = \phi (1 \leq i < j \leq 3)$, 所以 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_3$. 故 $g(n) = |\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2| + |\mathcal{M}_3|$, 由图 $3-nZ_4$ 的对称性知, $|\mathcal{M}_1| = |\mathcal{M}_3|$, 故 $g(n) = 2|\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2|$.

求 $|\mathcal{M}_1|$.

情形 1 $\mathcal{M}_{11} \subseteq \mathcal{M}_1, \forall M_{11} \in \mathcal{M}_{11}, u_{14}u_{11}, v_{14}v_{11}, u_{13}v_{13}, u_{12}v_{12} \in M_{11}$, 故由 $g(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{11}| = g(n-1)$.

情形 2 $\mathcal{M}_{12} \subseteq \mathcal{M}_1, \forall M_{12} \in \mathcal{M}_{12}, u_{14}u_{11}, v_{14}v_{11}, u_{13}u_{12} \in M_{12}$, 由 $\beta(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{12}| = \beta(n-1)$.

情形 3 $\mathcal{M}_{13} \subseteq \mathcal{M}_1, \forall M_{13} \in \mathcal{M}_{13}, u_{14}u_{11}, v_{14}v_{13}, u_{13}u_{12} \in M_{13}$, 由 $\gamma(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{13}| = \gamma(n-1) = \beta(n-1)$.

易知 $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_{11} \cup \mathcal{M}_{12} \cup \mathcal{M}_{13}$, $\mathcal{M}_{1i} \cap \mathcal{M}_{1j} = \phi (1 \leq i < j \leq 3)$, 故 $|\mathcal{M}_1| = g(n-1) + 2\beta(n-1)$.

求 $|\mathcal{M}_2|$.

情形 1 $\mathcal{M}_{21} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{21} \in \mathcal{M}_{21}, u_{14}v_{14}, u_{11}v_{11}, u_{12}v_{12}, u_{13}v_{13} \in M_{21}$, 故由 $g(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{21}| = g(n-1)$.

情形 2 $\mathcal{M}_{22} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{22} \in \mathcal{M}_{22}, u_{14}v_{14}, u_{11}v_{11}, u_{13}u_{12} \in M_{22}$, 由 $\beta(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{22}| = \beta(n-1)$.

情形 3 $\mathcal{M}_{23} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{23} \in \mathcal{M}_{23}, u_{14}v_{14}, u_{13}v_{13}, u_{11}u_{12} \in M_{23}$, 由 $\gamma(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{23}| = \gamma(n-1) = \beta(n-1)$.

易知 $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_{21} \cup \mathcal{M}_{22} \cup \mathcal{M}_{23}$, $\mathcal{M}_{2i} \cap \mathcal{M}_{2j} = \phi (1 \leq i < j \leq 3)$, 故 $|\mathcal{M}_1| = g(n-1) + 2\beta(n-1)$. 故

$$g(n) = 3g(n-1) + 6\beta(n-1), \quad (7)$$

把 (6) 式代入 (7) 式, 得

$$g(n) = 9g(n-1) + 6g(n-2) + 12\beta(n-2), \quad (8)$$

由 (7) 式, 得

$$g(n-1) = 3g(n-2) + 6\alpha(n-2), \quad (9)$$

(8) - 2 × (9) 式, 得 $g(n) = 11g(n-1) = 11^{n-1}g(1)$, 易知 $g(1) = 9$. 故 $g(n) = 9 \times 11^{n-1}$.

定理 3 4 个顶点的完全图分别为 K_4^{i1} 和 K_4^{i2} , 其中 $V(K_4^{i1}) = \{u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, u_{i4}\}$, $V(K_4^{i2}) = \{v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}, v_{i4}\} (i = 1, 2, \dots, n)$. 分别连接圈 K_4^{i1} 和 K_4^{i2} 的顶点 u_{i2} 与 v_{i2} , u_{i3} 与 v_{i3} ; 再分别连接 K_4^{i1} 和 $K_4^{i+1,1}$, K_4^{i2} 和 $K_4^{i+1,2}$ 的顶点 u_{i2} 与 $u_{i+1,3}$, v_{i2} 与 $v_{i+1,3}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$), 这样所得的图记为 $2-n(2-K_4)$, 如图 6 所示. $\sigma(n)$ 表示图 $2-n(2-K_4)$ 的完美匹配的数目. 则

$$\sigma(n) = \frac{85 + 9\sqrt{85}}{170} \left(\frac{11 + \sqrt{85}}{2} \right)^n + \frac{85 - 9\sqrt{85}}{170} \left(\frac{11 - \sqrt{85}}{2} \right)^n.$$

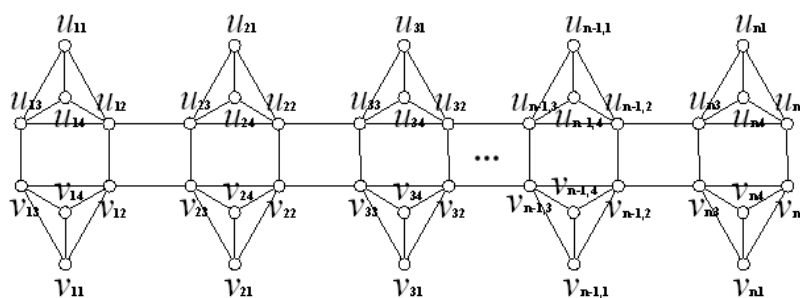


图 6: $2-n(2-K_4)$ 图

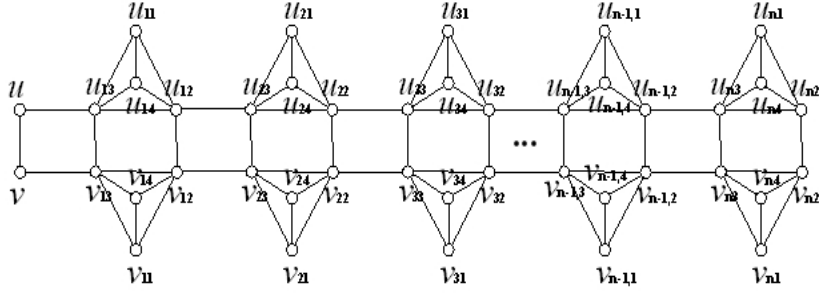
证 为了求 $\sigma(n)$, 先定义 1 个图 G_4 , 并求其完美匹配的数目. 将长为 1 的路 uv 的端点 u 和 v 分别与图 $2-n(2-K_4)$ 的顶点 u_{13} 和 v_{13} 各连接一条边, 得到的图记为 G_4 , 如图 7 所示. 易知图 G_4 有完美匹配. $\gamma(n)$ 表示图 G_4 的完美匹配的数目.

求 $\gamma(n)$. 设图 G_4 的完美匹配的集合为 $\mathcal{M}$, G_4 含边 uv, uu_{13} 的完美匹配集合分别为 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$. 则 $\mathcal{M}_i \neq \phi (i = 1, 2)$, $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \phi$, 所以 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$, $\gamma(n) = |\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2|$.

求 $|\mathcal{M}_1|$. $\forall M_1 \in \mathcal{M}_1$, 由于 $uv \in M_1$, 所以由 $\sigma(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_1| = \sigma(n)$.

求 $|\mathcal{M}_2|$. $\forall M_2 \in \mathcal{M}_2$, $uu_{13}, vv_{13}, u_{11}u_{14}, v_{11}v_{14} \in M_2$, 由 $\gamma(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_2| = \gamma(n-1)$. 故

$$\gamma(n) = \sigma(n) + \gamma(n-1). \quad (10)$$

图 7: G_4 图

再求 $\sigma(n)$. 易知图 $2 - n(2 - K_4)$ 有完美匹配. 设图 $2 - n(2 - K_4)$ 的完美匹配的集合为 $\mathcal{M}$, 图 $2 - n(2 - K_4)$ 含边 $u_{11}u_{13}, u_{11}u_{14}, u_{11}u_{12}$ 的完美匹配的集合分别为 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$, 则 $\mathcal{M}_i \neq \phi (i = 1, 2, 3)$, $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_j = \phi (1 \leq i < j \leq 3)$, 所以 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_3$. 故 $\sigma(n) = |\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2| + |\mathcal{M}_3|$.

求 $|\mathcal{M}_1|$.

情形 1 $\mathcal{M}_{11} \subseteq \mathcal{M}_1, \forall M_{11} \in \mathcal{M}_{11}, u_{11}u_{13}, u_{14}u_{12}, v_{13}v_{12}, v_{14}v_{11} \in M_{11}$, 故由 $\sigma(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{11}| = \sigma(n-1)$.

情形 2 $\mathcal{M}_{12} \subseteq \mathcal{M}_1, \forall M_{12} \in \mathcal{M}_{12}, u_{11}u_{13}, u_{14}u_{12}, v_{13}v_{14}, v_{12}v_{11} \in M_{12}$, 由 $\sigma(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{12}| = \sigma(n-1)$.

情形 3 $\mathcal{M}_{13} \subseteq \mathcal{M}_1, \forall M_{13} \in \mathcal{M}_{13}, u_{11}u_{13}, u_{14}u_{12}, v_{13}v_{11}, v_{14}v_{12} \in M_{13}$, 由 $\sigma(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{13}| = \sigma(n-1)$.

显然, $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_{11} \cup \mathcal{M}_{12} \cup \mathcal{M}_{13}, \mathcal{M}_{1i} \cap \mathcal{M}_{1j} = \phi (1 \leq i < j \leq 3)$, 故 $|\mathcal{M}_1| = 3\sigma(n-1)$.

求 $|\mathcal{M}_2|$.

情形 1 $\mathcal{M}_{21} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{21} \in \mathcal{M}_{21}, u_{11}u_{14}, u_{13}u_{12}, v_{13}v_{12}, v_{14}v_{11} \in M_{21}$, 故由 $\sigma(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{21}| = \sigma(n-1)$.

情形 2 $\mathcal{M}_{22} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{22} \in \mathcal{M}_{22}, u_{11}u_{14}, u_{13}u_{12}, v_{13}v_{14}, v_{12}v_{11} \in M_{22}$, 由 $\sigma(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{22}| = \sigma(n-1)$.

情形 3 $\mathcal{M}_{23} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{23} \in \mathcal{M}_{23}, u_{11}u_{14}, u_{13}u_{12}, v_{13}v_{11}, v_{14}v_{12} \in M_{23}$, 由 $\sigma(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{23}| = \sigma(n-1)$.

情形 4 $\mathcal{M}_{24} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{24} \in \mathcal{M}_{24}, u_{11}u_{14}, u_{13}v_{13}, v_{14}v_{11} \in M_{24}$, 由 $\gamma(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{24}| = \gamma(n-1)$.

显然, $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_{21} \cup \mathcal{M}_{22} \cup \mathcal{M}_{23} \cup \mathcal{M}_{24}, \mathcal{M}_{2i} \cap \mathcal{M}_{2j} = \phi (1 \leq i < j \leq 4)$, 故 $|\mathcal{M}_2| = 3\sigma(n-1) + \gamma(n-1)$.

求 $|\mathcal{M}_3|$.

情形 1 $\mathcal{M}_{31} \subseteq \mathcal{M}_3, \forall M_{31} \in \mathcal{M}_{31}, u_{13}u_{14}, u_{11}u_{12}, v_{13}v_{12}, v_{14}v_{11} \in M_{31}$, 故由 $\sigma(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{31}| = \sigma(n-1)$.

情形 2 $\mathcal{M}_{32} \subseteq \mathcal{M}_3, \forall M_{32} \in \mathcal{M}_{32}, u_{13}u_{14}, u_{11}u_{12}, v_{13}v_{14}, v_{12}v_{11} \in M_{32}$, 由 $\sigma(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{32}| = \sigma(n-1)$.

情形 3 $\mathcal{M}_{33} \subseteq \mathcal{M}_3, \forall M_{33} \in \mathcal{M}_{33}, u_{13}u_{14}, u_{11}u_{12}, v_{13}v_{11}, v_{14}v_{12} \in M_{33}$, 由 $\sigma(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{33}| = \sigma(n-1)$.

显然, $\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_{31} \cup \mathcal{M}_{32} \cup \mathcal{M}_{33}$, $\mathcal{M}_{3i} \cap \mathcal{M}_{3j} = \phi (1 \leq i < j \leq 3)$, 故 $|\mathcal{M}_3| = 3\sigma(n-1)$.

综上所述

$$\sigma(n) = 9\sigma(n-1) + \gamma(n-1). \quad (11)$$

把 (10) 式代入 (11) 式, 得

$$\sigma(n) = 10\sigma(n-1) + \gamma(n-2), \quad (12)$$

再由 (11) 式, 得

$$\sigma(n-1) = 9\sigma(n-2) + \gamma(n-2), \quad (13)$$

(12) - (13) 式, 得

$$\sigma(n) = 11\sigma(n-1) - 9\sigma(n-2). \quad (14)$$

(14) 式的特征方程的根为 $x = \frac{11 \pm \sqrt{85}}{2}$. 易知 $\sigma(1) = 10$, $\gamma(1) = 11$. 故由 (11) 式得 $\sigma(2) = 101$. 所以 (14) 式的通解为

$$\sigma(n) = \frac{85 + 9\sqrt{85}}{170} \left(\frac{11 + \sqrt{85}}{2} \right)^n + \frac{85 - 9\sqrt{85}}{170} \left(\frac{11 - \sqrt{85}}{2} \right)^n.$$

定理 4 n 个 6 圈 $C_6^i : u_{i1}u_{i2} \cdots u_{i6}u_{i1}$ 和 4 圈 $C_4^i : v_{i1}v_{i2}v_{i3}v_{i4}v_{i1}$, 分别连接 C_6^i 与 C_4^i 的顶点 u_{i1} 与 v_{i1} , u_{i2} 与 v_{i2} , u_{i4} 与 v_{i3} , u_{i5} 与 v_{i4} ($i = 1, 2, \dots, n$); 再分别连接 C_6^i 与 C_6^{i+1} 的顶点 u_{i2} 和 $u_{i+1,1}$, u_{i3} 和 $u_{i+1,6}$, u_{i4} 和 $u_{i+1,5}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$), 这样得到的图记为 $3-n(C_4 - C_6)$, 如图 8 所示. $\psi(n)$ 表示图 $3-n(C_4 - C_6)$ 的完美匹配的数目. 则 $\psi(n) = 6 \times 9^{n-1}$.

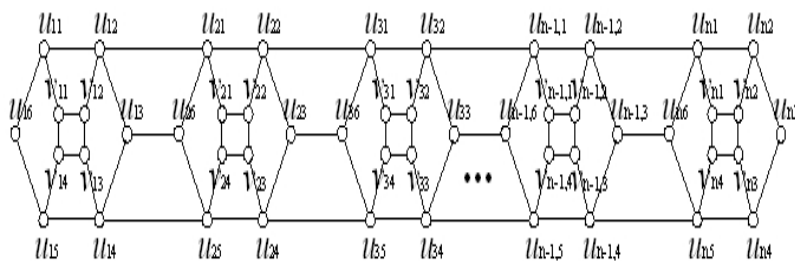


图 8: $3-n(C_4 - C_6)$ 图

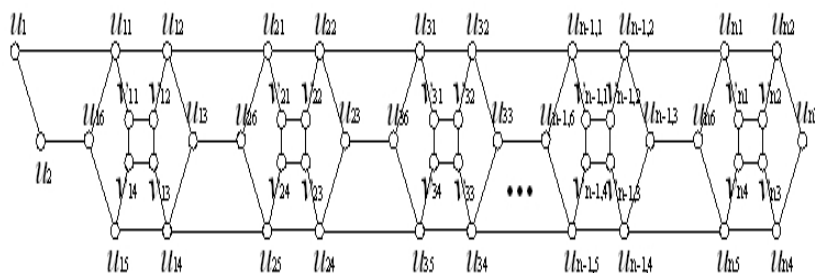
证 为了求 $\psi(n)$, 先定义 1 个图 G_5 , 并求其完美匹配的数目. 将长为 1 的路 u_1u_2 的端点 u_1 和 u_2 分别与图 $3-n(C_4 - C_6)$ 的顶点 u_{11} 和 u_{16} 各连接一条边, 得到的图记为 G_5 , 如图 9 所示. 易知图 G_5 有完美匹配. $\delta(n)$ 表示图 G_5 的完美匹配的数目.

求 $\delta(n)$. 设图 G_5 的完美匹配的集合为 $\mathcal{M}$, G_5 含边 u_1u_2 , u_1u_{11} 的完美匹配集合分别为 $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, 则 $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \phi$. 所以 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$, $\delta(n) = |\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2|$.

求 $|\mathcal{M}_1|$. $\forall M_1 \in \mathcal{M}_1$, 因为 $u_1u_2 \in M_1$, 所以由 $\psi(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_1| = \psi(n)$.

求 $|\mathcal{M}_2|$.

情形 1 $\mathcal{M}_{21} \subseteq \mathcal{M}_2$, $\forall M_{21} \in \mathcal{M}_{21}$, $u_1u_{11}, u_2u_{16}, u_{15}v_{14}, v_{11}v_{12}, v_{13}u_{14} \in M_{21}$, 故由 $\delta(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{21}| = \delta(n-1)$.

图 9: G_5 图

情形 2 $\mathcal{M}_{22} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{22} \in \mathcal{M}_{22}, u_1u_{11}, u_2u_{16}, u_{15}u_{14}, v_{11}v_{12}, v_{13}u_{14} \in M_{22}$, 由 $\delta(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{22}| = \delta(n-1)$.

情形 3 $\mathcal{M}_{23} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{23} \in \mathcal{M}_{23}, u_1u_{11}, u_2u_{16}, u_{15}u_{14}, v_{11}v_{14}, v_{12}u_{13} \in M_{23}$, 由 $\delta(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{23}| = \delta(n-1)$.

因为 $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_{21} \cup \mathcal{M}_{22} \cup \mathcal{M}_{23}, \mathcal{M}_{2i} \cap \mathcal{M}_{2j} = \phi (1 \leq i < j \leq 3)$, 故 $|\mathcal{M}_2| = 3\delta(n-1)$.

综上所述

$$\delta(n) = \psi(n) + 3\delta(n-1). \quad (15).$$

求 $\psi(n)$. 易知图 $3-n(C_4-C_6)$ 有完美匹配. 设图 $3-n(C_4-C_6)$ 的完美匹配的集合为 $\mathcal{M}$, $3-n(C_4-C_6)$ 含边 $u_{16}u_{11}, u_{16}u_{15}$ 的完美匹配集合分别为 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$, 所以 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$, $\psi(n) = |\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2|$. 由图 $3-n(C_4-C_6)$ 的对称性可知, $|\mathcal{M}_1| = |\mathcal{M}_2|$, 故 $\psi(n) = 2|\mathcal{M}_1|$.

求 $|\mathcal{M}_1|$.

情形 1 $\mathcal{M}_{11} \subseteq \mathcal{M}_1, \forall M_{11} \in \mathcal{M}_{11}, u_{16}u_{11}, u_{15}v_{14}, v_{11}v_{12}, v_{13}u_{14} \in M_{11}$, 故由 $\delta(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{11}| = \delta(n-1)$.

情形 2 $\mathcal{M}_{12} \subseteq \mathcal{M}_1, \forall M_{12} \in \mathcal{M}_{12}, u_{16}u_{11}, u_{15}u_{14}, v_{14}u_{13}, v_{11}v_{12} \in M_{12}$, 故由 $\delta(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{12}| = \delta(n-1)$.

情形 3 $\mathcal{M}_{13} \subseteq \mathcal{M}_1, \forall M_{13} \in \mathcal{M}_{13}, u_{16}u_{11}, u_{15}u_{14}, v_{11}v_{14}, v_{12}v_{13} \in M_{13}$, 故由 $\delta(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{13}| = \delta(n-1)$.

因为 $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_{11} \cup \mathcal{M}_{12} \cup \mathcal{M}_{13}, \mathcal{M}_{1i} \cap \mathcal{M}_{1j} = \phi (1 \leq i < j \leq 3)$, 故 $|\mathcal{M}_1| = 3\delta(n-1)$.

综上所述

$$\psi(n) = 6\delta(n-1), \quad (16)$$

把 (15) 式代入 (16) 式, 得

$$\psi(n) = 6\psi(n-1) + 18\delta(n-2), \quad (17)$$

再由 (16) 式, 得

$$\psi(n-1) = 6\delta(n-2), \quad (18)$$

(17) - 3 × (18) 式, 得 $\psi(n) = 9\psi(n-1) = 9^{n-1}\psi(1)$, 易知 $\psi(1) = 6$. 故 $\psi(n) = 6 \times 9^{n-1}$.

参 考 文 献

- [1] Kasteleyn P W. Dimmer statistics and phase transition[J]. Math Phys, 1963, 4: 287–293.
- [2] Valiant L G. The complexity of computing the permanent [J]. Theoretical Compute Science, 1979, 8(2): 189–201.
- [3] Cyvin S J, Gutman I. Kekulé structures in Benzenoid hydrocarbons[M]. Berlin: Springer Press, 1988.
- [4] Fournrei J C. Combinatorics of perfect matchings in planar bipartite graphs and application to tilings[J]. Theoretical Computer Science, 2003, 303: 333–351.
- [5] Zhang Heping. The connectivity of Z -transformation graphs of perfect matchings of polyominoes[J]. Discrete Mathematics, 1996, 158: 257–272.
- [6] Zhang Heping, Zhang Fuji. Perfect matchings of polyomino graphs[J]. Graphs and Combinatorics, 1997, 13 : 259–304.
- [7] Yan Weigen, Zhang Fuji. Enumeration of perfect matchings of a type of Cartesian products of graphs [J]. Discrete Applied Mathematics, 2006, 154: 145–157.
- [8] 唐保祥, 任韩. 几类图完美匹配的数目 [J]. 南京师大学报 (自然科学版), 2010, 33 (3): 1–6.
- [9] 唐保祥, 李刚, 任韩. 3 类图完美匹配的数目 [J]. 浙江大学学报 (理学版), 2011, 38 (4): 16–19.
- [10] 唐保祥, 任韩. 2 类图完美匹配的数目 [J]. 西南师范大学学报 (自然科学版), 2011, 36 (5): 16–21.
- [11] 唐保祥, 任韩. 3 类图完美匹配的计数 [J]. 南京师大学报 (自然科学版), 2012, 35 (1): 16–21.
- [12] 唐保祥, 任韩. 6 类图完美匹配的数目 [J]. 中山大学学报 (自然科学版), 2012, 51 (2): 40–44.
- [13] 唐保祥, 任韩. 四类图完美匹配的计数公式 [J]. 福州大学学报 (自然科学版), 2012, 40(4): 437–440.
- [14] 唐保祥, 任韩. 5 类图完美匹配的数目 [J]. 中山大学学报 (自然科学版), 2012, 51(4): 31–37.
- [15] 唐保祥, 任韩. 2 类偶图完美匹配的数目 [J]. 西南大学学报 (自然科学版), 2012, 34(10): 91–95.
- [16] 唐保祥, 任韩. 4 类图完美匹配的计数 [J]. 武汉大学学报 (理学版), 2012, 58(5): 441–446.

RECURSIVE METHOD FOR FINDING THE NUMBER OF PERFECT MATCHINGS OF THE FOUR TYPES OF GRAPHS

TANG Bao-xiang¹, REN Han²

(1. School of Mathematics and Statistics, Tianshui Normal University, Tianshui 741001, China)

(2. Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

Abstract: In this paper, we study the explicit expression of the perfect matching number of four types of graphs. By using differentiation, summation and re-recursion, the counting formula of the perfect matching for graphs $3 - nZ_4$, $2 - n(2 - C_6)$, $2 - n(2 - K_4)$ and $3 - n(C_4 - C_6)$ is made.

Keywords: perfect matching; linear recurrence relation; characteristic equation

2010 MR Subject Classification: 05C30; 05C70