Vol. 35 (2015)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

可加稳定过程的自相交局部时

林敏莹

(杭州师范大学, a. 应用数学研究所; b. 数学系, 浙江 杭州 310036)

摘 要: 本文研究了可加稳定过程的自相交局部时的问题. 利用 Borel–Canteil 引理等方法, 得到可加稳定过程的自相交局部时的 Hölder 上界, 推广了文献 [5] 中的结果.

关键词: 可加稳定过程; 局部时; 自相交; Hölder 上界

MR(2010) **主题分类号**: 60G52 **中图分类号**: O211.6

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2015)03-0615-11

1 引言

设 $X_1,\cdots,X_N$ 是取值于 R^d 的 N 个独立的 (严格) 稳定过程, $X(t)=\sum\limits_{j=1}^{N}X_j(t_j)$ 我们则称这 N 个参数 R^d 值的过程 $X=\{X(t),t\in R_+^N\}$ 为一可加稳定过程. 并记为 $X=X_1\oplus\cdots\oplus X_N$.

本文我们主要研究 $X=X_1\oplus\cdots\oplus X_N$ 是 $X_1,\cdots,X_N$ 具有不同指数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_N\in(0,2]$ 的可加稳定过程. 我们假定 $X(0)=0$.

具有平稳独立增量且取值与 R^d 的随机过程 $Z=\{Z(t);t\geq 0\}$ 称为 Lévy 过程. 众所周知, 对于 $t>s\geq 0, Z(t)-Z(s)$ 的特征函数有下列 Lévy-Khintchine 公式:

$$
\begin{aligned}
&E[\exp(i\langle\xi,Z(t)-Z(s)\rangle)]=\exp[-(t-s)\Psi(\xi)],\\
&\Psi(\xi)=i\langle a,\xi\rangle+\frac{1}{2}\xi\sum\xi'+\int_{R^d}[1-e^{i\langle x,\xi\rangle}+\frac{i\langle x,\xi\rangle}{1+\parallel x\parallel^2}]v(dx),\quad \xi\in R^d,
\end{aligned}
$$

其中 a 是 R^d 中的常数, $\sum$ 是一个非负正定的 $d\times d$ 对称矩阵, v 是 $R^d\setminus\{0\}$ 上满足下式的 Borel 测度,

$$\int_{R^d}\frac{\parallel x\parallel^2}{1+\parallel x\parallel^2}v(dx)<\infty,$$

函数 Ψ 称为 Z 的 Lévy 指数, v 成为 Z 的 Lévy 测度.

取值与 R^d 的一类特殊的 Lévy 过程是所谓的 (严格) 稳定过程. 指数 $\alpha\in(0,2]$ 的 (严格) 稳定过程 Z 的 Lévy 指数有以下形式:

$$\Psi(\xi)=\sigma\parallel\xi\parallel^{\alpha}\int_{S_d}\omega_\alpha(\xi,y)\mu(dy),$$

*收稿日期: 2012-11-26 接收日期: 2013-03-04
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11101113).
作者简介: 林敏莹 (1986–), 女, 广东佛山, 硕士, 主要研究方向: 随机过程.

其中 $\sigma>0$ 是一个常数,

$$\begin{aligned}\omega_\alpha(\xi,y) &= [1-i\text{sgn}\langle\xi,y\rangle\tan(\pi\alpha/2)]|\langle\xi/\parallel\xi\parallel,y\rangle|^\alpha,\ \ \alpha\neq 1,\\ \omega_1(\xi,y) &= |\langle\xi/\parallel\xi\parallel,y\rangle|+\frac{2i}{\pi}\langle\xi,y\rangle\log|\langle\xi,y\rangle|,\end{aligned}$$

并且 μ 是 R^d 中单位球面 S_d 上的概率测度. $\alpha=1$ 时, μ 是以原点为其质量中心, 也就是说, $\int_{S_d}y\mu(dy)=0$ (具体参见文献 [1]).

如果 $p(1,0)>0$ (这里 $p(t,x)$ 是 $Z(t)$ 的密度函数), 则对应的稳定过程称为 A 型, 反之则称为 B 型. Taylor [2] 证明了如果 $\alpha\in(0,1)$, μ 支撑在一半球, 那么 Z 是 B 型. 所有其它严稳定过程 $(\alpha\neq 1)$ 是 A 型.

Blumenthal 和 Getoor [8] 引进上下指数概念, 用于研究 Lévy 过程的样本轨道性质. Lévy 过程 Z 的上指数 β 与下指数 β'' 的定义如下:

$$\begin{aligned}\beta &= \inf\{\gamma\ge 0:\parallel\xi\parallel^{-\gamma}\text{Re}\Psi(\xi)\to\infty,\quad 当\|\xi\|\to 0\},\\ \beta'' &= \sup\{\gamma\ge 0:\parallel\xi\parallel^{-\gamma}\text{Re}\Psi(\xi)\to\infty,\quad 当\|\xi\|\to\infty\}.\end{aligned}$$

我们知道 $0\le\beta'\le\beta\le 2$, 并且当 Z 为指数 α 的稳定过程是则 $\beta''=\beta=\alpha$

关于局部时, 我们记参数 (时间) 空间为 $R_+^N=[0,\infty]^N$, 其元素记为 $t=(t_1,\cdots,t_N)$, 当 $t_1=t_2=\cdots=t_N=c$ 时记为 $\langle c\rangle$. 在 R_+^N 中定义一个序“$\preceq$”: 如果对 $\forall 1\le\ell\le N$ 有 $s_\ell\le t_\ell$, 则记 $s\preceq t$. 当 $s\preceq t$ 时, 记 $[s,t]=\prod_{\ell=1}^N[s_\ell,t_\ell]$. 令 $\mathfrak{A}$ 表示所有 N 维区间 $I=[s,t]\subset R_+^N$ 的集合, $\mathfrak{A}=\{I=[s,t]\in\mathfrak{A}:0<s_\ell<t_\ell,1\le\ell\le N\}$, λ_N 表示 N 维 Lebesgus 测度.

状态空间 R^d 赋予 ℓ^2 欧氏范数 $\|\cdot\|$, 内积 $\langle x,y\rangle=\sum_{j=1}^d x_jy_j$ $(x,y\in R^d)$ 和 ℓ^∞ 范数 $|x|=\max_{1\le\ell\le d}|x_\ell|(x\in R^d)$.

$I\subset R^N$ Borel 集, 下设 $I=[0,1]^N$, 记 $\mathcal{B}(I)$, $\mathcal{B}(R^N)$ 分别为 I, R^N 上的 Borel σ 代数, 若 $X(t)$: $I\to R^d$ 是 Borel 函数, 则称 X 为 (N,d) 向量场对于 $\forall A\in\mathcal{B}(R^d)$, $\forall B\in\mathcal{B}(I)$, 令

$$\mu(A,B)=\lambda_N\{X^{-1}(A)\cap B\}=\lambda_N\{t:\in B,X(t)\in A\}=\int_B 1_A(X(t))dt,$$

其中 λ_N 是 R^N 中的 Lebesgus 测度. 固定 B 时, $\mu(\cdot,B)$ 是 $\mathcal{B}(R^d)$ 上的一个测度, 若将 B 看成时间, 则 $\mu(A,B)$ 可以看成在 B 这段时间内, $X(t)$ 在 A 中停留的时间. 我们称 $\mu(\bullet,B)$ 为 $X(t)(t\in B)$ 的逗留时分布, 记 $\mu(\bullet)=\mu(\bullet,I)$.

如果 $\mu(\bullet)$ 关于 R^d 上的 Lebesgue 测度 λ_d 绝对连续, 即 $\mu\ll\lambda_d$, 则称 X 具有局部时. 此时对 $\forall B\in\mathcal{B}(I)$, $\mu(\bullet,B)\ll\lambda_d$, 我们将其 Radon-Nikodym 导数 $\frac{d\mu(\bullet,B)}{d\lambda_d}$ 称为 $X(t)(t\in B)$ 的局部时, 记为 $L(x,B)$ 由 Radon-Nikodym 定理, $L(x,B)$ 是 $(R^d,\mathcal{B}(R^d))$ 上的可测函数, 且

$$\mu(A,B)=\int_A L(x,B)dx,\qquad\forall A\in\mathcal{B}(R^d),$$

其中 $L(x,B)$ 可以看成 $X(t)$ $(t\in B)$ 在 x 处的逗留时间. 若 $B=[0,t]$, 则记 $L(x,B)=L(x,t)$.

由鞅和单调性等经典理论, 我们能推断出局部时存在一个可测的修正满足下面的占有密度公式: 对任意的 $B \in \mathcal{B}(R^N)$ 和任意的可测函数 f: $R^d \to R$ 有

$$\int_B f(X(t))dt = \int_{R^d} f(x)L(x,B)dx.$$

因此可以在 $T = \prod_{i=1}^{N}[a_i, a_i + h_i] \in \mathfrak{A}$ 找到一个连续的修正使得

$$R^d \times \prod_{i=1}^{N}[0, h_i] \ni (x, t_1, \cdots, t_N) \mapsto L(x, \prod_{i=1}^{N}[a_i, a_i + t_i]),$$

则称 X 在 T 上的局部时联合连续.

假定 $X(t)$(也记为 X_t) 为一可加稳定过程. 令

$$Z(T) = Z(t_1, \cdots, t_r) = (X_{t_2} - X_{t_1}, \cdots, X_{t_r} - X_{t_{r-1}}),$$

其中 $T = (t_1, \cdots, t_r) \in R_+^{Nr}$, $t_m = (t_{m,1}, \cdots, t_{m,N}) \in R_+^N \quad (1 \le m \le r)$, 则称 $\{Z(T), T \in R_+^{Nr}\}$ 为 X 的汇合过程. 如果 Z 的局部时存在 (记为 $L(x, I)$), 则称 $L(x, I)$ 为 X 的自相交局部时,

$$I = \prod_{m=1}^{r} I_m \ \ (I_m = \prod_{l=1}^{m}[a_{m,l}, a_{m,l} + h], a_{m,l} + h < a_{m+1,l}, h > 0)$$

为 R_+^{Nr} 中的超立方体, $\mathfrak{R}$ 表示 R_+^{Nr} 中所有超立方体 I 的集合. 对于 $T \in R_+^{Nr}$, 这里 $T = (t_1, \cdots, t_r)$, $t_m = (t_{m,1}, \cdots, t_{m,N})$ $1 \le m \le r$. 当 $t_{m,l} = c$, $1 \le m \le r$, $1 \le l \le N$, 记 $T = \langle c \rangle$. $Z(T)$ 的局部时称为 $X(t)$ 的自相交局部时.

令 $\bar{\alpha} = \max\{\alpha_1, \cdots, \alpha_N\}$, $\underline{\alpha} = \min\{\alpha_1, \cdots, \alpha_N\}$, $\alpha' = \sum_{l=1}^{N} \alpha_l / N$, $C_1, C_2, \cdots$ 为不同的常数.

本文主要研究 A 型的不同指数可加稳定过程的自相交局部时.

2 主要结果

引理 2.1 [5] 假定 $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_N$ 是 R^d 上的可加稳定过程, 其中 $X_1, \cdots, X_N$ 的指数分别为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_N \in (0, 2]$, $Z(T) = (X_{t_2} - X_{t_1}, \cdots, X_{t_r} - X_{t_{r-1}})$. 如果 $Nr\underline{\alpha} > d(r-1)$ 那么对每个 $I \in \mathfrak{R}$, Z 有联合连续的局部时 a.s. 且令 $\gamma \in (0, 1 \bigwedge (Nr\underline{\alpha} - d(r-1))/2)$ 存在有限常数 M_1, M_2 使得任何 $I \in \mathfrak{R}$ 所有 x, $y \in R^{d(r-1)}$ 和偶数 k 有

$$E[L(Z(t) + x, I)/\lambda_{Nr}(I)^{1-d(r-1)/Nr\underline{\alpha}}]^k \le M_1^k (k!)^{Nr}$$

和

$$E[\frac{L(Z(t) + x, I) - L(Z(t) + y, I)}{\lambda_{Nr}(I)^{1-(d+2\gamma)(r-1)/Nr\underline{\alpha}} \|x - y\|^\gamma}]^k \le M_2^k (k!)^{Nr},$$

其中 $t = 0$ 或 $t = I^t$.

引理 2.2 假定 $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_N$ 是 R^d 上的可加稳定过程, 其中 $X_1, \cdots, X_N$ 的指数分别为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_N \in (0, 2]$, $Z(T) = (X_{t_2} - X_{t_1}, \cdots, X_{t_r} - X_{t_{r-1}})$. 如果 $Nr\underline{\alpha} > d(r-1)$, 那

么 $\forall\gamma\in(0,1\bigwedge(Nr\underline{\alpha}-d(r-1))/2)$, 存在有与 $I\in\mathfrak{R}$, x, $y\in R^{d(r-1)}$ 无关的正常数 b_1, b_2, M_3, M_4 使得任何 $u>0$, 有

$$P\{L(Z(t)+x,I)\geq\lambda_{Nr}(I)^{1-d(r-1)/Nr\underline{\alpha}}u^{Nr}\}\leq M_3e^{-b_1u}$$

和

$$P\{\frac{\|L(Z(t)+x,I)-L(Z(t)+y,I)\|}{\lambda_{Nr}(I)^{1-(d+2\gamma)(r-1)/Nr\underline{\alpha}}\|x-y\|^{\gamma}}\leq u^{Nr}\}\leq M_4e^{-b_2u},\quad\forall x,y\in R^{d(r-1)},x\neq y,$$

其中 $\tau=0$ 或 $\tau=I^t$.

证 记 Λ 为 $L(Z(t)+x,I)/\lambda_{Nr}(I)^{1-d(r-1)/Nr\underline{\alpha}}]^k$ 或

$$|L(Z(t)+x,I)-L(Z(t)+y,I)|/\lambda_{Nr}(I)^{1-(d+2\gamma)(r-1)/Nr\underline{\alpha}}\|x-y\|^{\gamma}$$

中任何一项, 那么由引理 1.1 偶数 k 有

$$E\Lambda^{\frac{k}{Nr}}\leq(E\Lambda^k)^{\frac{1}{Nr}}\leq C_1^{\frac{k}{Nr}}k!\ (k\text{为偶数}).$$

由 Jensen 不等式有

$$E\Lambda^{\frac{(k-1)}{Nr}}\leq(E\Lambda^{\frac{k}{Nr}})^{(k-1)/k}\leq[C_1^{\frac{k}{Nr}}k!]^{(k-1)/k}\leq C_1^{\frac{k-1}{Nr}}k!,$$

也就是对任何的整数 $m\geq0$ 有

$$E\Lambda^{\frac{m}{Nr}}\leq C_1^{\frac{m}{Nr}}(m+1)!\leq C_2(m+1)!,$$

那么当 M 足够大时, 可得

$$E\exp(\Lambda^{\frac{1}{Nr}}/M)\leq E(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}(\frac{\Lambda^{\frac{1}{Nr}}}{M})^m)\leq C_2\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)(\frac{1}{M})^m\leq C_3.$$

由 Chebyshev 不等式得

$$P(\Lambda\geq(Mu)^{\frac{1}{Nr}})=P(\frac{\Lambda^{\frac{1}{Nr}}}{M}\geq u)=P(e^{\frac{\Lambda^{\frac{1}{Nr}}}{M}}\geq e^u)\leq\frac{1}{e^u}E(e^{\frac{\Lambda^{\frac{1}{Nr}}}{M}})\leq C_3e^{-u}.$$

令 Mu 换成 u 便得要证的结论.

引理 2.3 设 $X=X_1\oplus\cdots\oplus X_N$ 是 R^d 上的可加稳定过程, 其中 $X_1,\cdots,X_N$ 的指数分别为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_N$. 那么存在一个正常数 M_5 使得对时间 $I=[0,a]\in\mathfrak{A}$ 和 $0<\xi<1$,

$$P\{\sup_{t\in I}\|X(t)\|\geq\xi\}\leq M_5|a|\xi^{-\bar{\alpha}}.$$

证 由 α 阶 stable 过程的一般结论 (Bertoin [9], P221) 可以有

$$\begin{aligned}&P\{\sup_{t\in I}\|X(t)\|\geq\xi\}\leq P\{\sup_{t\in I}\sum_{l=1}^{N}|X_l(t_l)|\geq\xi\}\leq\sum_{l=1}^{N}P\{\sup_{t_l\in[0,a_l]}t_l^{\frac{1}{\alpha_l}}|X_l(1)|\geq\xi\}\\ \leq&\sum_{l=1}^{N}P\{\sup_{t_l\in[0,a_l]}|X_l(1)|\geq\xi t_l^{-\frac{1}{\alpha_l}}\}\leq\sum_{l=1}^{N}P\{|X_l(1)|\geq\xi|a|^{-\frac{1}{\alpha_l}}\}\sim\sum_{l=1}^{N}C_4[\xi|a|^{-\frac{1}{\alpha_l}}]^{-\alpha_l}\\ \leq&M_5|a|\xi^{-\bar{\alpha}}.\end{aligned}$$

引理 2.4 假定 $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_N$ 是 R^d 上的可加稳定过程, 其中 $X_1, \cdots, X_N$ 的指数分别为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_N \in (0,2]$, $Z(T) = (X_{t_2} - X_{t_1}, \cdots, X_{t_r} - X_{t_{r-1}})$. 如果 $Nr\underline{\alpha} > d(r-1)$ 那么存在正常数 M_6, 使得对所有 $I \in \mathfrak{R}$, $0 < \xi \le 1$, 有

$$P(\sup_{s\in I}\|Z(s) - Z(I^t)\| \ge \xi) \le M_6 \xi^{-\bar{\alpha}} h,$$

其中 $I = \prod_{m=1}^{r} I_m$, $I_m = \prod_{l=1}^{N}[a_{ml}, a_{ml} + h]$.

证 由定义和引理 2.3 有

$$\begin{aligned}
& P\{\sup_{s\in I}\|Z(s) - Z(I^t)\| \ge \xi\} \\
= \ & P\{\sup_{s\in I}\|(X(s_2) - X(I_2^t)) - (X(s_1) - X(I_1^t)), \cdots, \\
& (X(s_r) - X(I_r^t)) - (X(s_{r-1}) - X(I_{r-1}^t))\| \ge \xi\} \\
\le \ & P\{\bigcup_{1\le m\le r-1} \sup_{s\in I}\|(X(s_{m+1}) - X(I_{m+1}^t)) - (X(s_m) - X(I_m^t))\| \ge \frac{\xi}{\sqrt{r-1}}\} \\
\le \ & \sum_{m=1}^{r-1} P\{\sup_{s\in I}\|(X(s_{m+1}) - X(I_{m+1}^t)) - (X(s_m) - X(I_m^t))\| \ge \frac{\xi}{\sqrt{r-1}}\} \\
\le \ & \sum_{m=1}^{r-1}[P\{\sup_{s_{m+1}\in I_{m+1}}\|(X(s_{m+1}) - X(I_{m+1}^t))\| \ge \frac{\xi}{\sqrt{2(r-1)}}\} \\
& + P\{\sup_{s_m\in I_m}\|X(s_m) - X(I_m^t)\| \ge \frac{\xi}{\sqrt{2(r-1)}}\}] \\
\le \ & 2(r-1)C_5\left(\frac{\xi}{\sqrt{2(r-1)}}\right)^{-\bar{\alpha}} h \\
= \ & M_6 \xi^{-\bar{\alpha}} h.
\end{aligned}$$

定理 2.1 假定 $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_N$ 是 R^d 上的可加稳定过程, 其中 $X_1, \cdots, X_N$ 的指数分别为

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_N \in (0,2], Z(T) = (X_{t_2} - X_{t_1}, \cdots, X_{t_r} - X_{t_{r-1}}).$$

记 $L^*(B) = \sup_{x\in R^{d(r-1)}} L(x, B), B \in \mathfrak{R}$. 如果 $Nr\underline{\alpha} > d(r-1)$, 那么对

$$\forall \gamma \in (0, 1 \wedge \frac{Nr\underline{\alpha} - d(r-1)}{2} \wedge \frac{Nr\bar{\alpha}\underline{\alpha} - d\bar{\alpha}(r-1)}{2\bar{\alpha}(r-1) - \underline{\alpha}})$$

存在正常数 M_6, M_7, 使得对每个 $s \in (0,\infty)^{Nr}$, $s = (s_1, \cdots, s_r)$, $s_m = (s_{m1}, \cdots, s_{mr})$, $(1 \le m \le r)$, $s_{m+1\ j} > s_{mj}$ 和每个 $I \in \mathfrak{R}$ 有下列两式成立

$$\limsup_{u\to 0} \frac{L^*([s - \langle u\rangle, s + \langle u\rangle])}{u^{Nr - d(r-1)/\underline{\alpha}}(u^{\frac{\underline{\alpha} - 2\bar{\alpha}(r-1)}{Nr\bar{\alpha}\underline{\alpha}}\gamma} \log\log u^{-1})^{Nr}} \le M_6 \quad \text{a.s.} \tag{2.1}$$

和

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\substack{B\in\mathfrak{R}, B\subset I \\ \lambda_{Nr}(B)<\varepsilon}} \frac{L^*(B)}{\lambda_{Nr}(B)^{1 - d(r-1)/Nr\underline{\alpha}}(\log \lambda_{Nr}(B)^{-1})^{Nr}} \le M_7 \quad \text{a.s..} \tag{2.2}$$

证 先证明 (2.1) 式, 对于固定的 s, 令 s^n 为一点列, 每个 s^n 具有 s 一样的条件, 满足 $s^n_{m+1\ l} > s^n_{m\ l}$ $(\forall n, 1\le m\le r, 1\le l\le N)$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} s^n = s$. 定义一系列超立方体

$$I_n = [s^n, s^n + \langle 2^{-n}\rangle] \quad (n\ge 1).$$

令

$$g(u) = u^{Nr-d(r-1)/\underline{\alpha}}(u^{\frac{\underline{\alpha}-2\bar{\alpha}(r-1)}{Nr\bar{\alpha}\underline{\alpha}}\gamma}\log\log u^{-1})^{Nr} \quad (u\text{充分小}),$$

对于 $0<\gamma<1\wedge \dfrac{Nr\underline{\alpha}-d(r-1)}{2}\wedge \dfrac{Nr\bar{\alpha}\underline{\alpha}-d\bar{\alpha}(r-1)}{2\bar{\alpha}(r-1)-\underline{\alpha}}$, u 充分小时

$$\begin{aligned}
& g'(u) = [u^{Nr-d(r-1)/\underline{\alpha}+\frac{\underline{\alpha}-2\bar{\alpha}(r-1)}{\bar{\alpha}\underline{\alpha}}\gamma}(\log\log\frac{1}{u})^{Nr}]' \\
= \ & \frac{Nr\bar{\alpha}\underline{\alpha}-d(r-1)\bar{\alpha}-(2\bar{\alpha}(r-1)-\underline{\alpha})\gamma}{\bar{\alpha}\underline{\alpha}} u^{\frac{Nr\bar{\alpha}\underline{\alpha}-d(r-1)\bar{\alpha}-(2\bar{\alpha}(r-1)-\underline{\alpha})\gamma}{\bar{\alpha}\underline{\alpha}}-1}(\log\log\frac{1}{u})^{Nr} \\
& + u^{\frac{Nr\bar{\alpha}\underline{\alpha}-d(r-1)\bar{\alpha}-(2\bar{\alpha}(r-1)-\underline{\alpha})\gamma}{\bar{\alpha}\underline{\alpha}}} Nr(\log\log\frac{1}{u})^{Nr-1}\frac{1}{\log u^{-1}}\frac{1}{u^{-1}}(-\frac{1}{u^2}) \\
= \ & (\frac{Nr\bar{\alpha}\underline{\alpha}-d(r-1)\bar{\alpha}-(2\bar{\alpha}(r-1)-\underline{\alpha})\gamma}{\bar{\alpha}\underline{\alpha}} - Nr\frac{1}{\log\log u^{-1}\log u^{-1}}) \\
& u^{\frac{Nr\bar{\alpha}\underline{\alpha}-d(r-1)\bar{\alpha}-(2\bar{\alpha}(r-1)-\underline{\alpha})\gamma}{\bar{\alpha}\underline{\alpha}}-1}(\log\log\frac{1}{u})^{Nr} > 0, \\
& g(2u)/g(u) = 2^{Nr-d(r-1)/\underline{\alpha}+\frac{\underline{\alpha}-2\bar{\alpha}(r-1)}{\bar{\alpha}\underline{\alpha}}\gamma}(\frac{\log\log(2u)^{-1}}{\log\log u^{-1}})^{Nr} \\
\le \ & 2^{Nr-d(r-1)/\underline{\alpha}+\frac{\underline{\alpha}-2\bar{\alpha}(r-1)}{\bar{\alpha}\underline{\alpha}}\gamma} \le C_6.
\end{aligned}$$

则 $g(r)$ 为一单调增, 限制增长的函数. 因此只需证 $\limsup\limits_{u\to 0}\dfrac{L(I_n)}{g(2^{-n})}\le M_6$. 记 $Z_n = Z(s^n)$. 分几步来证明:

(1) 由引理 1.4 得当 n 足够大时 $2^{-n/\bar{\alpha}}n^{\beta}<1$ 对任何的 $\beta>0$ 有

$$\begin{aligned}
& P(\sup_{s\in I_n}\|Z(s)-Z_n\|\ge 2^{-n/\bar{\alpha}}n^{\beta}) \\
= \ & P(\sup_{t\in[0,2^{-n}]^N}\|Z(s)\|\ge 2^{-n/\bar{\alpha}}n^{\beta}) \le C_7 2^{-n}(2^{-n/\bar{\alpha}}n^{\beta})^{-\bar{\alpha}} = C_7 n^{-\bar{\alpha}\beta}.
\end{aligned}$$

选取 $\beta > 1/\bar{\alpha}$ 那么由 Borel–Cantelli 引理有多足够大的 n

$$\sup_{s\in I_n}\|Z(s)-Z_n\| < 2^{-n/\bar{\alpha}}n^{\beta} \quad \text{a.s.}.$$

(2) 令 $\theta_n = 2^{-n/\bar{\alpha}}$, $n\ge 1$ 定义

$$G_n = \{x\in R^{d(r-1)} : x = \theta_n p, \text{对某个} p\in \bar{Z}^{d(r-1)}, \|x\|\le 2^{-n/\bar{\alpha}}n^{\beta}\}.$$

由引理 1.2 有

$$\begin{aligned}
& P\{\sup_{x\in G_n} L(Z_n+x, I_n)\ge g(2^{-n})a_1^{Nr}\} \le \sum_{x\in G_n} P\{L(Z_n+x, I_n)\ge g(2^{-n})a_1^{Nr}\} \\
\le \ & C_8(2^{-n/\bar{\alpha}}n^{\beta}/\theta_n)^{d(r-1)}\exp(-b_1a_1 2^{n\gamma\frac{2\bar{\alpha}(r-1)-\alpha}{Nr\bar{\alpha}\underline{\alpha}}}\log\log 2^n) \le C_9 n^{-(b_1a_1-d\beta(r-1))}.
\end{aligned}$$

取 $a_1 > (1+d\beta(r-1))/b_1$ 再用 Borel–Cantelli 引理, 就得到对足够大的 n,

$$\sup_{x\in G_n} L(Z_n+x, I_n) < a_1^{Nr} g(2^{-n}) \quad \text{a.s..} \tag{2.3}$$

(3) 对任何两个整数 $n, h \geq 1$ 和任何 $x \in G_n$ 令

$$F(n,h,x) = \{y \in R^{d(r-1)} : y = x + \theta_n \sum_{j=1}^{h} \varepsilon_j 2^{-j}, \varepsilon_j \in \{0,1\}^{d(r-1)}, 1 \leq j \leq k\}.$$

选取 $\gamma > 0$ 和 $\delta > 0$ 满足

$$N\delta r < \gamma < 1 \wedge (Nr\underline{\alpha} - d(r-1))/2 \wedge \frac{Nr\bar{\alpha}\underline{\alpha} - d\bar{\alpha}(r-1)}{2\bar{\alpha}(r-1) - \underline{\alpha}}.$$

记

$$\begin{aligned} B_n \quad = \quad & \bigcup_{x\in G_n} \bigcup_{h=1}^{\infty} \{|L(Z_n+y_1, I_n) - L(Z_n+y_2, I_n)| \geq \lambda_{Nr}(I_n)^{1-(d+2\gamma)(r-1)/Nr\underline{\alpha}} \\ & \|y_1-y_2\|^{\gamma}(a_2 2^{\delta h}\log n)^{Nr}, \text{对某个} y_1, y_2 \in F(n,h,x) \text{且} y_1 - y_2 = \theta_n \varepsilon 2^{-h}, \\ & \varepsilon \in \{0,1\}^{d(r-1)}\}. \end{aligned}$$

因为对于足够大的 x 有

$$\sum_{h=1}^{\infty} 2^{d(r-1)(h+1)} \exp(-x 2^{\delta h}) \leq e^{-x/2},$$

则由引理 2.2 有

$$\begin{aligned} P(B_n) \quad \leq \quad & \sum_{x\in G_n} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{y_1,y_2} P\{|L(Z_n+y_1, I_n) - L(Z_n+y_2, I_n)| \geq \lambda_{Nr}(I_n)^{1-(d+2\gamma)(r-1)/Nr\underline{\alpha}} \\ & \|y_1-y_2\|^{\gamma}(a_2 2^{\delta h}\log n)^{Nr}\} \\ \leq \quad & C_{10}(2^{-n/\bar{\alpha}} n^{\beta}/\theta_n)^{d(r-1)} \sum_{h=1}^{\infty} 2^{d(r-1)(h+1)} \exp(-b_2 a_2 2^{\delta h}\log n) \\ \leq \quad & C_{10}(2^{-n/\bar{\alpha}} n^{\beta}/\theta_n)^{d(r-1)} \exp(\frac{-b_2 a_2 \log n}{2}) \\ = \quad & C_{10} n^{-(b_2 a_2/2 - d\beta(r-1))}. \end{aligned}$$

从而选择足够大的 $a_2 > 0$ 使得 $\sum_n P(B_n) < \infty$ 也就是由 Borel–Cantelli 引理蕴含 B_n a.s. 发生有限次.

(4) 固定整数 n 和某个 $y \in R^{d(r-1)}$ 满足 $\|y\| < 2^{-n/\bar{\alpha}} n^{\beta}$, 显然可以把 y 表示成

$$y = \lim_{h\to\infty} y_h,$$

其中

$$y_h = x + \theta_n \sum_{j=1}^{h} \varepsilon_j 2^{-j}, \varepsilon_j \in \{0,1\}^{d(r-1)}, x \in G_n.$$

因为局部时是关于空间变量是连续的, 所以我们可以在事件 B_n^c 上, 应用三角不等式可得

$$\begin{aligned}
& |L(Z_n+y,I_n)-L(Z_n+x,I_n)| \\
\le\ & \sum_{h=1}^{\infty}|L(Z_n+y_h,I_n)-L(Z_n+y_{h-1},I_n)| \quad (y_0=x) \\
\le\ & \sum_{h=1}^{\infty}\lambda_{Nr}(C_n)^{1-(d+2\gamma)(r-1)/Nr\underline{\alpha}}\|y_h-y_{h-1}\|^{\gamma}(a_2 2^{\delta h}\log n)^{Nr} \\
\le\ & 2^{-n(Nr-Nr(d+2\gamma)(r-1)/Nr\underline{\alpha})}(a_2\log n)^{Nr}\sum_{h=1}^{\infty}[\sqrt{d(r-1)}2^{-n/\bar{\alpha}}]^{\gamma}2^{-h(\gamma-Nr\delta)} \\
=\ & 2^{-n(Nr-d(r-1)/\underline{\alpha})}2^{n\gamma(\frac{2(r-1)}{\underline{\alpha}}-\frac{1}{\bar{\alpha}})}(\log n)^{Nr}a_2^{Nr}\sum_{h=1}^{\infty}\sqrt{d(r-1)}2^{-h(\gamma-Nr\delta)} \\
\le\ & C_{11}\,g(2^{-n}).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

由 (2.3) 和 (2.4) 式当 n 充分大的时候, 就得

$$\sup_{\|x\|\le 2^{-n/\bar{\alpha}}n^{\beta}} L(Z_n+x,I_n)\le C_{12}g(2^{-n}),$$

也就是

$$\sup_{\|X_n-x\|\le 2^{-n/\bar{\alpha}}n^{\beta}} L(x,I_n)\le C_{12}g(2^{-n}),$$

从而当 n 充分大的时有

$$L^*(I_n)=\sup\{L(x,I_n);x\in\overline{X(I_n)}\}\le M_6 g(2^{-n}),$$

就得到 (2.1) 式.

(2.2) 式的证明与 (2.1) 式的证明大体一致.

首先固定 $T=\prod\limits_{m=1}^{r}T_m\in\mathfrak{R}$, $T_m=\prod\limits_{l=1}^{N}[a_{m,l},b_{m,l}]$, 其中 $a_{m,l}<b_{m,l}<a_{m+1,l}$ 对于每个 $n=\prod\limits_{m=1}^{r}(n_{m1},\cdots,n_{mN})$, n_{mj} $(1\le m\le r, 1\le j\le N)$ 为自然数. 定义 $2^{\sigma(n)}$ 个超立方体 $(\sigma(n)=\sum\limits_{m=1}^{r}\sum\limits_{l=1}^{N}n_{m,l})$. 记

$$\begin{aligned}
& Q_{k,n}=\prod_{m=1}^{r}\prod_{l=1}^{N}[a_{m,l}+(b_{m,l}-a_{m,l})(k_{m,l}-1)2^{-n_{m,l}},a_{m,l}+(b_{m,l}-a_{m,l})k_{m,l}2^{-n_{m,l}}], \\
& k=(k_1,\cdots,k_r), \\
& k_m=(k_{m,1},\cdots,k_{m,N})\in\prod_{l=1}^{N}\{1,2,\cdots,2^{n_{m,l}}\}, \\
& k\in\prod_{m=1}^{r}\prod_{l=1}^{N}\{1,2,\cdots,2^{n_{m,l}}\}\equiv J(n).
\end{aligned}$$

显然 $T \in \bigcup_{k,n} Q_{k,n}$. 对任何 n, 定义

$$\begin{aligned} G_n &= \{x=(x_1,\cdots,x_{r-1}): x_m=(x_{m,1},\cdots,x_{m,d}), x_{m,l}=p2^{-\sigma(n)}, \text{其中} \\ &\qquad p \text{ 是正整数, 满足 } |p| \le \prod_{m=1}^{r}\prod_{l=1}^{N} n_{m,l}2^{m,l}, 1\le m\le r-1, 1\le l\le d\}. \end{aligned}$$

注意 G_n 是逐渐扩充到 $R^{d(r-1)}$ 的整数点集. 对 $\forall n,h\ge 1, x\in G_n$, 令

$$F(n,h,x)=\{y\in R^{d(r-1)}: y=x+2^{-\sigma(n)}\sum_{j=1}^{h}\varepsilon_j 2^{-j}, \varepsilon_j\in\{0,1\}^{d(r-1)}, 1\le j\le h\}.$$

定义事件 A_n, B_n 如下

$$\begin{aligned} A_n &= \bigcup_{k\in J(n)}\bigcup_{x\in G_n}\{L(x,Q_{k,n})\ge \lambda_{Nr}(Q_{k,n})^{1-\frac{d(r-1)}{Nr\underline{\alpha}}}(a_1\log\lambda_{Nr}(Q_{k,n})^{-1})^{Nr}\}, \\ B_n &= \bigcup_{k\in J(n)}\bigcup_{x\in G_n}\{|L(y_1,Q_{k,n})-L(y_2,Q_{k,n})|\ge \lambda_{Nr}(Q_{k,n})^{1-\frac{d+2\gamma(r-1)}{Nr\underline{\alpha}}}, \\ &\qquad \|y_1-y_2\|^{\gamma}(a_2\log 2^{\sigma(n)})^{Nr}2^{\delta hNr}, \text{对于} y_1,y_2\in F(n,h,x), \\ &\qquad y_1-y_2=2^{-\sigma(n)}\varepsilon 2^{-h}, \varepsilon\in\{0,1\}^{d(r-1)}\}. \end{aligned}$$

注意 $J(n)$ 中 k 的个数为 $\prod\limits_{m=1}^{r}\prod\limits_{l=1}^{N}2^{n_{m,l}}$, G_n 中 x 的个数小于 $(\prod\limits_{m=1}^{r}\prod\limits_{l=1}^{N}n_{m,l}2^{n_{m,l}+2})^{d(r-1)}$, 因此由引理 2.2, 有

$$\begin{aligned} P(A_n) &\le (\prod_{m=1}^{r}\prod_{l=1}^{N}2^{n_{m,l}})(\prod_{m=1}^{r}\prod_{l=1}^{N}n_{m,l}2^{n_{m,l}+2})^{d(r-1)}M_4e^{-b_1a_1\log\lambda_{Nr}(Q_{k,n})^{-1}} \\ &= C_{13}\prod_{m=1}^{r}\prod_{l=1}^{N}n_{m,l}^{d(r-1)}2^{n_{m,l}(d(r-1)+1)}\lambda_{Nr}(Q_{k,n})^{b_1a_1} \\ &= C_{13}\prod_{m=1}^{r}\prod_{l=1}^{N}n_{m,l}^{d(r-1)}2^{n_{m,l}(d(r-1)+1)}\prod_{m=1}^{r}\prod_{l=1}^{N}2^{-n_{m,l}b_1a_1}(b_{m,l}-a_{m,l})^{b_1a_1} \\ &= C_{13}\prod_{m=1}^{r}\prod_{l=1}^{N}n_{m,l}^{d(r-1)}2^{-n_{m,l}(b_1a_1-d(r-1)-1)}(b_{m,l}-a_{m,l})^{b_1a_1} \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} P(B_n) &\le (\prod_{m=1}^{r}\prod_{l=1}^{N}2^{n_{m,l}})(\prod_{m=1}^{r}\prod_{l=1}^{N}n_{m,l}2^{n_{m,l}+2})^{d(r-1)}M_4\sum_{h=1}^{\infty}2^{(d(r-1)+1)h}e^{-b_2a_22^{\delta h}\log 2^{\sigma(n)}} \\ &\le C_{14}\prod_{m=1}^{r}\prod_{l=1}^{N}n_{m,l}^{d(r-1)}2^{n_{m,l}(d(r-1)+1)}e^{-b_2a_2/2\log 2^{\sigma(n)}} \\ &= C_{14}\prod_{m=1}^{r}\prod_{l=1}^{N}n_{m,l}^{d(r-1)}2^{n_{m,l}(d(r-1)+1)}2^{-\sigma(n)\frac{b_2a_2}{2}} \\ &= C_{14}\prod_{m=1}^{r}\prod_{l=1}^{N}n_{m,l}^{d(r-1)}2^{-n_{m,l}(\frac{b_2a_2}{2}-d(r-1)-1)}, \end{aligned}$$

则对于充分大的 a_1, a_2, 使得 $\sum\limits_n P(A_n)$ 和 $\sum\limits_n P(B_n)$ 收敛. 由 Borel–Cantelli 引理就有

$$A_n\text{和}B_n\text{以概率 1 仅发生有限多次}.$$

对于固定的 n 和满足 $|y_{m,l}| \le \prod\limits_{m=1}^{r}\prod\limits_{l=1}^{d} n_{m,l}2^{n_{m,l}}$ 的 $y=(y_1,\cdots,y_{r-1})$, $y_m=(y_{m,1},\cdots,y_{m,d})$, $1\le m\le r-1$, $1\le l\le d$, 存在 $x\in G_n$ 使得 $y-x\in[0,2^{-\sigma(n)}]^{d(r-1)}$. 选择

$$y_h = x+2^{-\sigma(n)}\sum_{j=1}^{h}\varepsilon_j 2^{-j},$$

$\varepsilon_j\in\{0,1\}^{d(r-1)}$, 满足 $y_h\to y$ $(h\to\infty)$. 由自相交局部时关于空间变量的连续性, 在 B_n^c 上可得

$$\begin{aligned}
&|L(y,Q_{k,n})-L(x,Q_{k,n})|\\
\le\ & \sum_{h=1}^{\infty}|L(y_h,Q_{k,n})-L(y_{h-1},Q_{k,n})|\\
\le\ & \lambda_{Nr}(Q_{k,n})^{1-\frac{(d+2\gamma)(r-1)}{\alpha Nr}}\sum_{h=1}^{\infty}\|y_h-y_{h-1}\|^{\gamma}a_2^{Nr}(\log 2^{\sigma(n)})^{Nr}2^{\delta hNr}\\
\le\ & \lambda_{Nr}(Q_{k,n})^{1-\frac{(d+2\gamma)(r-1)}{\alpha Nr}}\sum_{h=1}^{\infty}(2^{-\sigma(n)}\sqrt{d(r-1)}2^{-h})^{\gamma}(a_2\log 2^{\sigma(n)})^{Nr}2^{\delta hNr}\\
\le\ & \lambda_{Nr}(Q_{k,n})^{1-\frac{(d+2\gamma)(r-1)}{\alpha Nr}}(2^{-\sigma(n)}\sqrt{d(r-1)})^{\gamma}(a_2\log 2^{\sigma(n)})^{Nr}\sum_{h=1}^{\infty}2^{-h(\gamma-\delta Nr)}\\
\le\ & C_{15}\sigma(n)^{Nr}2^{-\sigma(n)\gamma}\to 0(\sigma(n)\to\infty),
\end{aligned}$$

则对满足 $x_{m,l}\le\prod\limits_{m=1}^{r}\prod\limits_{l=1}^{N}n_{m,l}, 1\le m\le r-1, 1\le l\le d$ 的 x 有

$$\sup_{k\in J(n)} L(x,Q_{n,k})\le C_{16}\lambda_{Nr}(Q_{n,k})^{1-d(r-1)/Nr\alpha}(\log\lambda_{Nr}(Q_{n,k})^{-1})^{Nr}.$$

当 n 充分大时, 便可得到 (2.2) 式.

参 考 文 献

[1] Khoshnevisan D, Xiao Y, Zhong Y. Local times of additive Lévy processes[J]. Stoch Proc. Appl., 2003, 104: 193–216.

[2] Taylor S J. Sample path properties of a transient stable process[J]. Math. Mech., 1967, 16: 1229–1246.

[3] Vares M E. Local times for two-parameter Lévy processes[J]. Stochastic Proc. Appl., 1983, 15: 59–82.

[4] Xiao Y. Hölder conditions for the local times and the Hausdorff measure of the level sets of Gaussian random fields[J]. Probab. Theory Related Fields, 1997, 109: 129–157.

[5] Zhong Yuquan, Hu Dihe. Self–intersection local time of additive Lévy process[J]. Acta Math. Scientia, 2002, 22B(2): 261–268.

[6] Zhong Yuquan, Hu Dihe. Uniform packing dimension results for multi-parameter stable processes[J]. Acta Math. Scientia, 2007, 27B(1): 1–10

[7] Zhong Yuquan, Xiao Yimin. Self-intersection local times and multi points of the stable sheet (in Chinese)[J]. Acta Math. Sci., 1995, 15: 141–152.

[8] Blumenthal R M, Getoor R K. Sample functions of stochastic processes with stationary independent increments[J]. J. Math. Mech., 1961, 10: 493–516.

[9] Bertoin J. Levy Processes[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

SELF-INTERSECTION LOCAL TIME OF ADDITIVE STABLE PROCESS

LIN Min-ying

(*a. Institute of Applied Mathematics; b. Department of Mathematics, Hangzhou Normal University, Hangzhou 310036, China*)

Abstract: This paper discusses the problem of the self-intersection local times of additive stable processes. By using Borel–Canteil lemma etc., we compute the uniform Hölder law of the increments of the self-intersection local times of additive stable processes, which extends the result in Zhong [5].

Keywords: additive stable process; local times; Hölder law; upper bound

2010 MR Subject Classification: 60G52