

关于平面凸多边形的一个 Bonnesen 型不等式

马 磊

(广东石油化工学院高州师范学院数学系, 广东 高州 525200)

摘 要: 本文探索了关于平面凸多边形的 Bonnesen 型不等式. 利用分析方法, 先构造一个解析函数的不等式, 进而得到了一个关于平面凸多边形的 Bonnesen 型不等式.

关键词: 等周不等式; 平面多边形; 外接圆; 内切圆; Bonnesen 型不等式

MR(2010) 主题分类号: 52A10; 51N20

中图分类号: O168.5

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2015)01-0154-05

1 引言及预备知识

几何不等式可以用来刻画空间中几何体的不变量之间的关系. 等周不等式是用来刻画平面区域的周长与其面积之间关系的经典的不等式: 平面上面积固定的闭区域中, 圆盘的周长最小. 用不等式可表示为 (参见文献 [1, 2]): 设平面闭区域 K 的周长与面积 L, A 满足如下不等式

$$L^2 - 4\pi A \geq 0, \quad (1.1)$$

等号成立当且仅当 K 为圆盘.

不变量 $\Delta(K) = L^2 - 4\pi A$ 叫做区域 K 的等周亏格, 等周亏格可以用来度量周长为 L , 面积为 A 的区域 K 与半径为 $\frac{L}{2\pi}$ 圆盘的差别程度.

通常平面上曲线 Γ 的等周亏格用来刻画其与圆的接近程度. 最早的等周亏格的下界估计或许是经典的 Bonnesen 型不等 (参见文献 [3, 5])

$$L^2 - 4\pi A \geq \pi^2(R - r)^2, \quad (1.2)$$

其中 r 和 R 分别为曲线 Γ 的最大内接圆半径与最小外接圆半径, 且等号成立当且仅当曲线 Γ 为圆.

1920 年前后, Bonnesen 得到了一系列具有下列性质的不等式

$$L^2 - 4\pi A \geq B, \quad (1.3)$$

其中 B 是与曲线 Γ 有关的几何不变量且满足:

- (1) $B \geq 0$;
- (2) $B = 0$ 当且仅当 Γ 为圆.

*收稿日期: 2013-06-10 接收日期: 2014-02-10

基金项目: 重庆市教委科学技术研究项目基金资助 (KJ130614); 广州石油化工学院高州师范学院教育科学十二五规划项目 (2013GST01).

作者简介: 马磊 (1982-), 男, 河南鹿邑, 硕士, 讲师, 主要研究方向: 积分几何与凸几何分析.

形如 (1.3) 的不等式我们通常把它叫做 Bonnesen 型不等式, 在过去的一个多世纪里很多的 Bonnesen 型不等式已经陆续地被发现 (参见文献 [1, 3, 5, 9]). 周家足用积分几何中包含测度的理论给出了平面 Bonnesen 型不等式的统一证明, 并且还得到了许多新的 Bonnesen 型不等式 (参见文献 [10–12]).

在本文中, 我们主要考虑等周不等式的离散形式. 设 Γ_n 为欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中面积为 A_n , 周长为 L_n 的 n 边形, 则有如下离散的等周不等式 (参见文献 [4, 6])

$$L_n^2 - 4c_n A_n \geq 0, \quad c_n = n \tan \frac{\pi}{n}, \quad (1.4)$$

等号成立当且仅当 Γ_n 为正 n 边形.

事实上, 不等式 (1.4) 比不等式 (1.1) 更为基础, 因为当 $n > 3$ 时 $c_n > \pi$ 且不等式 (1.1) 可以看做不等式 (1.4) 的极限情形, 即 $n \rightarrow \infty, c_n \rightarrow \pi$.

类似地, 关于平面多边形也存在离散形式的 Bonnesen 型不等 (参见文献 [7–8]). 即

$$L_n^2 - 4c_n A_n \geq B_n, \quad c_n = n \tan \frac{\pi}{n}, \quad (1.5)$$

其中 B_n 为多边形 Γ_n 的几何不变量且具有性质: (1) $B_n \geq 0$, (2) $B_n = 0$ 当且仅当 Γ_n 为正 n 边形.

B_n 可以用来度量 Γ_n 与正多边形的差别程度且不等式 (1.5) 要比 (1.4) 强. 关于平面多边形的离散 Bonnesen 型不等式, 目前我们知道的或许只有 Zhang 的几个结果 (参见文献 [8]). 如: 设 Γ_n 为欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中面积为 A_n , 周长为 L_n , 外切于半径为 r 的圆的 n 边形, $l_n = 2rn \tan \frac{\pi}{n}$ 是半径为 r 的圆的外切正多边形的周长, 则有不等式: $L_n^2 - 4c_n A_n \geq (L_n - l_n)^2, c_n = n \tan \frac{\pi}{n}$, 等号成立的充分必要条件是 Γ_n 为正 n 边形.

在本文中我们通过利用条件极值构造了一个解析函数不等式 (定理 1), 进而建立一个关于平面凸多边形的 Bonnesen 型不等式 (定理 2).

2 一个分析的不等式与平面凸多边形的 Bonnesen 型不等式

引理 1 设 $\theta_i \in (0, \frac{\pi}{2}), i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n \theta_i = \pi, \sigma = \frac{\pi}{n}$ 则有下列不等式成立:

$$\left(\sum_{i=1}^n \sin \theta_i \right)^2 \geq n \tan \sigma \sum_{i=1}^n \sin \theta_i \cos \theta_i; \quad (2.1)$$

$$n \sin \sigma - \sum_{i=1}^n \sin \theta_i \geq 0; \quad (2.2)$$

$$n \tan \sigma - \sum_{i=1}^n \tan \theta_i \leq 0, \quad (2.3)$$

上式成立的充要条件均为 $\theta_1 = \dots = \theta_n = \sigma$.

不等式 (2.1) 为离散的 Wirtinger 不等式 (即离散的等周不等式的分析形式) (参见文献 [4, 6, 7]), 不等式 (2.2) 与 (2.3) 为著名的 Jensen 不等式的两种特殊情形.

定理 1 设 $\theta_i \in (0, \frac{\pi}{2})$, $i = 1, \dots, n$, $\sum_{i=1}^n \theta_i = \pi$, $\sigma = \frac{\pi}{n}$, 则有不等式

$$\left(\sum_{i=1}^n \sin \theta_i \right)^2 - c_n \sum_{i=1}^n \sin \theta_i \cos \theta_i \geq \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^n \sin \theta_i \cos \theta_i - n \sin \sigma \cos \sigma \right)^2, \quad (2.4)$$

其中 $c_n = n \tan \sigma$ 当且仅当 $\theta_1 = \dots = \theta_n = \sigma$ 时等号成立.

证 为了使证明简单化首先我们来给出一些记号, 设

$$\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n, \quad I_n = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)^n \in \mathbb{R}^n, \quad H_n = \{\Theta \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n \theta_i = \pi\},$$

$$D_n = I_n \cap H_n, \quad \Omega = (\sigma, \sigma, \dots, \sigma), \quad L_n(\Theta) = \sum_{i=1}^n \sin \theta_i,$$

$$F(\Theta) = L_n^2 - c_n \sum_{i=1}^n \sin \theta_i \cos \theta_i - \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^n \sin \theta_i \cos \theta_i - n \sin \sigma \cos \sigma \right)^2.$$

考虑连结 Φ 与 Ω 的线段 $\Theta(t) = (\theta_1(t), \dots, \theta_n(t))$, $\theta_i = t\sigma + (1-t)\phi_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, $t \in [0, 1]$. 由条件可知

$$\sum_{i=1}^n (\sigma - \phi_i) = n\sigma - \sum_{i=1}^n \phi_i = n\sigma - n\sigma = 0, \quad (2.5)$$

对任意的 $0 \leq t < 1$, $\sigma \neq \phi_i$, 则 $(\sigma - \phi_i)[\cos \sigma - \cos \theta_i(t)] < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

事实上, 如果 $\sigma > \phi_i$, 则 $\theta_i = t\sigma + (1-t)\phi_i < t\sigma + (1-t)\sigma = \sigma$ 和 $\cos \sigma < \cos \theta_i(t)$. 如果 $\sigma < \phi_i$, 则 $\theta_i = t\sigma + (1-t)\phi_i > t\sigma + (1-t)\sigma = \sigma$ 和 $\cos \sigma > \cos \theta_i(t)$. 因此, 当 $0 \leq t < 1$, 时有不等式

$$\sum_{i=1}^n (\sigma - \phi_i) [\cos \sigma - \cos \theta_i(t)] \cos \theta_i(t) < 0. \quad (2.6)$$

由 (2.5) 式可知

$$\sum_{i=1}^n (\sigma - \phi_i) \cos 2\theta_i(t) = 2 \sum_{i=1}^n (\sigma - \phi_i) \cos^2 \theta_i(t). \quad (2.7)$$

由于 $F(\Omega) = 0$, 因此我们要证明 (2.4) 式成立, 可以转化为证明 $F(\Theta) \geq 0$ 当且仅当 $\Theta = \Omega$ 时等号成立. 即证明 $F(\Phi) > F(\Omega)$, 对于任意的 $\Phi \in D_n$ 且 $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) \neq \Omega$. 现在考虑 $F(\Theta(t))$ 关于 t 求微分

$$\begin{aligned} F'(\Theta(t)) &= \frac{dF}{dt} \\ &= 2L_n(\Theta(t)) \sum_{i=1}^n (\sigma - \phi_i) \cos \theta_i(t) - c_n \sum_{i=1}^n (\sigma - \phi_i) [\cos^2 \theta_i(t) - \sin^2 \theta_i(t)] - \\ &\quad \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \sin \theta_i(t) \cos \theta_i(t) - n \sin \sigma \cos \sigma \right) \left\{ \sum_{i=1}^n (\sigma - \phi_i) [\cos^2 \theta_i(t) - \sin^2 \theta_i(t)] \right\} \\ &= \frac{2 \sum_{i=1}^n \sin \theta_i(t)}{\cos \sigma} \cos \sigma \sum_{i=1}^n (\sigma - \phi_i) \cos \theta_i(t) - \frac{2n \sin \sigma}{\cos \sigma} \sum_{i=1}^n (\sigma - \phi_i) \cos^2 \theta_i(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \sin 2\theta_i(t) - n \sin 2\sigma \right) \left\{ \sum_{i=1}^n (\sigma - \phi_i) \cos^2 \theta_i(t) \right\} \\
= & 2 \left(\frac{\sum_{i=1}^n \sin \theta_i(t) - n \sin \sigma}{\cos \sigma} \right) \sum_{i=1}^n (\sigma - \phi_i) [\cos \sigma - \cos \theta_i(t)] \cos \theta_i(t) \\
& + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \sin 2\theta_i(t) - n \sin 2\sigma \right) \sum_{i=1}^n (\sigma - \phi_i) [\cos \sigma - \cos \theta_i(t)] \cos \theta_i(t) \\
= & 2 \left[\frac{\sum_{i=1}^n \sin \theta_i(t) - n \sin \sigma}{\cos \sigma} + \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^n \sin 2\theta_i(t) - n \sin 2\sigma \right) \right] \\
& \cdot \sum_{i=1}^n (\sigma - \phi_i) (\cos \sigma - \cos \theta_i(t)) \cos \theta_i(t).
\end{aligned}$$

由 (2.2) 与 (2.6) 式可知 $F'(\Theta(t)) < 0$. 故 $F(\Theta(t)) = F(t)$ 在 $[0, 1]$ 上是严格的减函数, 立即可知 $F(\Theta(0)) = F(\Phi) > F(\Omega) = F(\Theta(1))$. 即 (2.4) 式成立.

定理 2 设 Γ_n 为欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中面积为 A_n , 周长为 L_n , 内接于半径为 R 的圆的 n 边形, $A_n^* = \frac{1}{2}nR^2 \sin \frac{2\pi}{n}$ 是半径为 R 的圆的内接正多边形的面积, 则有不等式

$$L_n^2 - 4c_n A_n \geq \frac{1}{R^2} (A_n^* - A_n)^2, \quad (2.8)$$

这里 $c_n = n \tan \frac{\pi}{n}$ 且等号成立当且仅当 Γ_n 为正 n 边形.

证 设 a_i 为 Γ_n 的第 i 个边的边长, θ_i 为第 i 个边的边所对的圆周角的一半, 则

$$\begin{aligned}
L_n &= \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n 2R \sin \theta_i, \\
A_n &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} a_i R \cos \theta_i = \sum_{i=1}^n R^2 \sin \theta_i \cos \theta_i, \\
\sum_{i=1}^n \theta_i &= \pi, \quad \sigma = \frac{\pi}{n}, \quad A_n^* = \frac{1}{2} n R^2 \sin \frac{2\pi}{n},
\end{aligned}$$

将以上各式分别代入 (2.8) 式中它可以变形为

$$\left(\sum_{i=1}^n \sin \theta_i \right)^2 - c_n \sum_{i=1}^n \sin \theta_i \cos \theta_i \geq \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^n \sin \theta_i \cos \theta_i - n \sin \sigma \cos \sigma \right)^2,$$

由定理 1 中的 (2.4) 式可知定理得证.

参 考 文 献

- [1] Burago Y, Zalgaller V. Geometric inequalities[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1988.

- [2] Osserman R. The isoperimetric inequality[J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1978, 84: 1182–1238.
- [3] Osserman R. Bonnesen-style isoperimetric inequality[J]. Amer. Math. Monthly., 1979, 86: 1–29.
- [4] Macnab D. Cyclic polygons and related questions[J]. Math. Gazette., 1981, 65: 22–28.
- [5] Santaló L. Integral geometry and geometric probability[M]. London: Addison-Wesley, 1976.
- [6] Tang D. Discrete wirtinger and isoperimetric type inequalities[J]. Bull. Austral. Math. Soc., 1991, 43: 467–474.
- [7] Zhang Xinmin. A refinement of the discrete wirtinger inequality[J]. J. Math. Anal. Appl., 1996, 200: 687–697.
- [8] Zhang Xinmin. Bonnesen-style inequalities and pseudo-perimeters for polygons[J]. J. Geometry., 1997, 60: 188–201.
- [9] Zeng Chunna, Ma Lei, Zhou Jiazuo, et al. The Bonnesen isoperimetric inequality in a surface of constant curvature[J]. Sci. China Math., 2012, 55: 1913–1919.
- [10] Zhou Jiazuo. On Bonnesen-style inequalities[J]. Acta Math. Sinica., 2007, 50 (6):1397–1402.
- [11] Zhou Jiazuo, Chen Fangwei. The Bonnesen-type inequality in a plane of constant curvature[J]. J. Korean Math. Soc., 2007, 44: 1363–1372.
- [12] Zhou Jiazuo, Xia Yunwei, Zeng Chunna. Some new Bonnesen-style inequalities[J]. J. Korean Math. Soc., 2011, 48: 421–430.

A BONNESEN-STYLE INEQUALITY FOR THE PLANAR CONVEX POLYGON

MA Lei

*(Department of Math., Gaozhou Normal College, Guangdong University of Petrochemical Technology,
Gaozhou 525200, China)*

Abstract: In this paper, we investigate the Bonnesen-type isoperimetric inequalities for the planar convex polygon. By analytical methods, we first construct an analytic function of inequality. Then a new Bonnesen-style inequality for planar polygon is obtained.

Keywords: the isoperimetric inequality; plane polygon; circumscribed circle; inscribed circle; the Bonnesen-style inequality.

2010 MR Subject Classification: 52A10; 51N20