Vol. 35 (2015)
No. 1

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

关于亚纯函数唯一性的一些结果

徐 耀，张庆彩
(中国人民大学信息学院, 北京 100872)

摘 要: 本文研究了涉及重值的具有四个公共小函数的亚纯函数的唯一性问题. 利用关于小函数的 Nevanlinna 第二基本定理精简形式及处理小函数的有关方法, 改进了有关结果. 利用 Gundersen 处理公共值对的方法, 对具有五个 IM 公共值对和四个 IM 公共小函数对的亚纯函数的情况作了进一步讨论, 推广改进了相关结果.

关 键 词: 亚纯函数; 小函数; 唯一性; 公共值
MR(2010) **主题分类号**: 30D35; 30D30 **中 图 分 类 号**: O174.52
文献标识码: A **文 章 编 号**: 0255-7797(2015)01-0110-13

1 引言及主要结果

设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为开平面内的非常数亚纯函数, 本文采用亚纯函数 Nevanlinna 理论的常用符号 (见文献 [1, 2]), 如 $T(r,f), m(r,f), N(r,f), \overline{N}(r,f), N(r,a,f), S(r,f)$ 等等，并假设读者已熟悉 Nevanlinna 基本理论 (见文献 [2]). 设 a, b 为两个复数, 若 $f-a$ 与 $g-b$ 的零点相同, 则称 (a,b) 为 f 与 g 的 IM 公共值对; 若 $f-a$ 与 $g-b$ 的零点相同, 且零点的重级也相同, 则称 (a,b) 为 f 与 g 的 CM 公共值对. 若 $(a,0)$ 为 f 和 $1/g$ 的 CM(IM) 公共值对, 则 (a,∞) 为 f 和 g 的 CM(IM) 公共值对. 当 $(a_k,b_k)(1\le k\le n, n\ge 2)$ 为 f 与 g 的 n 个公共值对时, 我们要求 $a_i\ne a_j, b_i\ne b_j (i\ne j)$. 当 $a=b$ 时, 则称 a 为 f 和 g 的 CM(IM) 公共值.

设 k 为一正整数, 我们用 $E_{k)}(a,f)$ 表示 $f-a$ 的重级不超过 k 的零点的集合, 且重级零点按重数计算; $\overline{E}_{k)}(a,f)$ 表示重级零点仅计一次的情况. 若 $E_{+\infty)}(a,f)=E_{+\infty)}(a,g)$, 则 a 为 f 与 g 的 CM 公共值; 若 $\overline{E}_{+\infty)}(a,f)=\overline{E}_{+\infty)}(a,g)$, 则 a 为 f 与 g 的 IM 公共值. 我们用 $N_{k)}(r,a,f)$ 表示 $f-a$ 的重级不超过 k 的零点的计数函数; $N_{(k+1}(r,a,f)$ 表示 $f-a$ 的重级超过 k 的零点的计数函数. $\overline{N}_{k)}(r,a,f)$ 和 $\overline{N}_{(k+1}(r,a,f)$ 分别表示相应的精简计数函数.

$S(r,f)$ 表示 $o(T(r,f))(r\to\infty, r\notin E)$ 型的量, 其中 E 为 R^+ 上的一个线性测度有穷的集合, 若 $S(r,f)=S(r,g)$, 则记 $S(r)=S(r,f)=S(r,g)$.

我们用 $\overline{N}_E(r,f-a=0=g-b)$ 表示 $f-a$ 与 $g-b$ 具有相同重级的公共零点的计数函数, 每个零点仅计一次; 用 $\overline{N}(r,f-a=0=g-b)$ 表示 $f-a$ 与 $g-b$ 公共零点的计数函数, 每个零点仅计一次. 如果

$$\overline{N}(r,a,f)-\overline{N}_E(r,f-a=0=g-b)=S(r,f)$$

及

$$\overline{N}(r,a,g)-\overline{N}_E(r,f-a=0=g-b)=S(r,g),$$

*收稿日期: 2012-11-06 接收日期: 2013-01-16
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11171013).
作者简介: 徐耀 (1987–), 男, 浙江绍兴, 硕士, 主要研究方向: 复分析. E-mail:xuyao1335@163.com.

则称 (a,b) 为 f 与 g 的 CM* 公共值对. 如果

$$\overline{N}(r,a,f)-\overline{N}(r,f-a=0=g-b)=S(r,f)$$

及

$$\overline{N}(r,a,g)-\overline{N}(r,f-a=0=g-b)=S(r,g),$$

则称 (a,b) 为 f 与 g 的 IM* 公共值对.

设 $a(z)$ 为开平面内的亚纯函数, 若 $T(r,a)=S(r,f)$, 则称 a 为 f 的小函数. 当 a, b 为小函数时, 也有与上述类似的定义, 只需把“值”替换为“小函数”.

设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为两个非常数亚纯函数, 若存在 f 的四个小函数 $\alpha_i(z)$, i=1, 2, 3, 4, 使得 $g=(\alpha_1 f+\alpha_2)/(\alpha_3 f+\alpha_4)$ $(\alpha_1\alpha_4-\alpha_2\alpha_3\not\equiv 0)$, 则称 g 为 f 的拟分式线性变换.

1929 年, Nevanlinna (见文献 [2]) 证明了下述四值定理:

定理 A 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为两个非常数亚纯函数, 以 $a_j(j=1,2,3,4)$ 为四个判别的 CM 公共值, 则 f 为 g 的分式线性变换.

1995 年, Li 和 Yang (见文献 [3]) 将“公共值”推广到“公共小函数”, 证明了下述定理:

定理 B 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为两个非常数亚纯函数, $a_j(z)(j=1,2,3,4)$ 为 f 与 g 的四个判别的 CM* 公共小函数, 则 f 为 g 的拟分式线性变换.

1999 年, 张庆彩和杨连中 (见文献 [4]) 在考虑重值的情况下, 对定理 A 作了改进, 得到

定理 C 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为两个非常数亚纯函数, $a_j(j=1,2,3,4)$ 为四个判别的复数, k 为一正整数. 若 $E_{k)}(a_j,f)=E_{k)}(a_j,g)$(j=1, 2, 3, 4), $k\geq 12$, 则 f 为 g 的分式线性变换.

2002 年, Yao 和 Yu (见文献 [5]) 在考虑重值的条件下, 改进了定理 B, 得到

定理 D 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为两个非常数亚纯函数, $a_j(z)(j=1,2,3,4)$ 为 f 与 g 的四个判别的小函数, k 为一正整数. 若 $E_{k)}(a_j,f)=E_{k)}(a_j,g)$(j=1, 2, 3, 4), $k\geq 15$, 则 f 为 g 的拟分式线性变换.

本文在定理 C 和定理 D 的基础上, 进一步得到如下结果:

定理 1 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为两个非常数亚纯函数, $a_j(z)(j=1,2,3,4)$ 为 f 与 g 的四个判别的小函数, k 为一正整数. 若 $E_{k)}(a_j,f)=E_{k)}(a_j,g)$(j=1, 2, 3, 4), $k\geq 11$, 则 f 为 g 的拟分式线性变换.

对于上述四个值集的情况, 还可以予以精确化, 本文又证明了:

定理 2 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为两个非常数亚纯函数, $a_j(z)(j=1,2,3,4)$ 为 f 与 g 的四个判别的小函数, k 为一正整数. 若 $E_{11)}(a_j,f)=E_{11)}(a_j,g)(j=1,2,3)$, $E_{k)}(a_4,f)=E_{k)}(a_4,g)$, $k\geq 10$, 则 f 为 g 的拟分式线性变换.

1997 年, Czubiak 和 Gundersen (见文献 [6]) 证明了下述定理:

定理 E 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为两个非常数亚纯函数, $(a_k,b_k)(1\leq k\leq 6)$ 为 f 与 g 的六个 IM 公共值对, 且 $a_i\neq a_j, b_i\neq b_j(i\neq j)$, 则 f 为 g 的分式线性变换.

2003 年, Hu, Li 和 Yang (见文献 [7]) 对定理 E 作了改进, 证明了

定理 F 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为两个非常数亚纯函数, $(a_k,b_k)(1\leq k\leq 5)$ 为 f 和 g 的五个 IM* 公共值对, 且 $a_i\neq a_j, b_i\neq b_j(i\neq j)$, 若

$$\overline{N}(r,a_6,f)-\overline{N}(r,f-a_6=0=g-b_6)=S(r),$$

其中 $a_6\neq a_k, b_6\neq b_k, (1\leq k\leq 5)$, 则 f 是 g 的分式线性变换.

本文得到了定理 F 的更一般结果:

定理 3 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为两个非常数亚纯函数, $(a_k, b_k)(1 \leq k \leq 5)$ 为 f 和 g 的五个 IM* 公共值对, 且 $a_i \neq a_j, b_i \neq b_j (i \neq j)$, 若

$$\overline{N}(r, a_6, f) - \overline{N}(r, f - a_6 = 0 = g - b_6) \leq \lambda T(r, f) + S(r), \tag{1.1}$$

其中 $\lambda \in [0, \frac{2}{5}), a_6 \neq a_k, b_6 \neq b_k, (1 \leq k \leq 5)$, 则 f 是 g 的分式线性变换.

2011 年, Gundersen (见文献 [8]) 证明了下述定理和推论:

定理 G 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为两个非常数亚纯函数, $(a_k, b_k)(1 \leq k \leq 5)$ 为 f 和 g 的五个 IM 公共值对, 且 $a_i \neq a_j, b_i \neq b_j (i \neq j)$, 则或者 f 为 g 的分式线性变换或者对任意不同的 $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 有以下五个不等式成立:

$$\begin{aligned}
&\overline{N}(r, a_i, f) + \overline{N}(r, a_j, f) \leq \frac{3}{2} T(r, f) + S(r, f);\\
&T(r, f) \leq \overline{N}(r, a_i, f) + \overline{N}(r, a_j, f) + S(r, f);\\
&\overline{N}(r, a_i, f) + \overline{N}(r, a_j, f) + \overline{N}(r, a_k, f) \leq 2T(r, f) + S(r, f);\\
&\frac{3}{2} T(r, f) \leq \overline{N}(r, a_i, f) + \overline{N}(r, a_j, f) + \overline{N}(r, a_k, f) + S(r, f);\\
&\overline{N}(r, a_i, f) \leq 2\overline{N}(r, a_j, f) + S(r, f).
\end{aligned}$$

推论 A (见文献 [8]) 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为两个非常数亚纯函数, $(a_k, b_k)(1 \leq k \leq 5)$ 为 f 和 g 的五个 IM 公共值对, 且 $a_i \neq a_j, b_i \neq b_j (i \neq j)$, 则或者 f 为 g 的分式线性变换或者 $\overline{N}(r, a_k, f) + S(r, f) \geq \frac{1}{3} T(r, f), 1 \leq k \leq 5$.

推论 B (见文献 [8]) 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为两个非常数整函数, $(a_k, b_k)(1 \leq k \leq 4)$ 为 f 和 g 的四个 IM 公共值对, 其中 a_k 和 b_k 均为有穷值, 且 $a_i \neq a_j, b_i \neq b_j (i \neq j)$, 则 f 为 g 的分式线性变换.

本文对推论 A 作了改进, 得到:

定理 4 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为两个非常数亚纯函数, $(a_k, b_k)(1 \leq k \leq 4)$ 为 f 与 g 的四个 IM* 公共小函数对, 且 $a_i \neq a_j, b_i \neq b_j (i \neq j)$, 若

$$\overline{N}(r, a_5, f) \leq \lambda T(r, f) + S(r, f), \overline{N}(r, a_5, g) \leq \lambda T(r, g) + S(r, g), \tag{1.2}$$

其中 $\lambda \in [0, \frac{1}{3})$, $T(r, a_5) = S(r, f)$, $T(r, b_5) = S(r, g)$, $a_5 \neq a_k, b_5 \neq b_k, (1 \leq k \leq 4)$, 则 f 是 g 的拟分式线性变换.

注 1 由定理 4, 可把推论 B 中的"公共值对"推广到"公共小函数对".

2 引理

引理 1 (见文献 [9]) 设 $f(z)$ 为一个非常数亚纯函数, $a_j(z)(j = 1, 2, \cdots, q)$ 为 f 的 q 个判别的小函数, 则对于任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$(q-2) T(r, f) \leq \sum_{j=1}^{q} \overline{N}(r, a_j, f) + \varepsilon T(r, f) + S(r, f),$$

其中 $r \notin E, E \subset R$ 且 $\int_E d \log \log r < \infty$.

引理 2 (见文献 [10]) 设 $f(z)$, $a(z)$ 和 $b(z)$ 为亚纯函数 $(f(z),a(z),b(z)\not\equiv\infty)$, $a(z)$ 与 $b(z)$ 为 f 的小函数, 且 $a(z)\not\equiv b(z)$, 设

$$L(f,a,b)=\begin{vmatrix} f & f' & 1\\ a & a' & 1\\ b & b' & 1\end{vmatrix},$$

则 $L(f,a,b)\not\equiv 0$, 及

$$m(r,\frac{L(f,a,b)f^k}{(f-a)(f-b)})=S(r,f)\ \ (k=0,1).$$

引理 3 设 $f(z)$ 为一个非常数亚纯函数, $a_j(z)(j=1,2,\cdots,q)$ 为 f 的 q 个判别的小函数, k 为正整数, 则

$$\sum_{j=1}^{q}\overline{N}_{(k+1}(r,a_j,f)\le\frac{2+\varepsilon}{k}T(r,f)+S(r,f).$$

证 由引理 1, 得

$$(q-2)T(r,f)\le\sum_{j=1}^{q}\overline{N}(r,a_j,f)+\varepsilon T(r,f)+S(r,f). \tag{2.1}$$

而

$$\overline{N}(r,a_j,f)+k\overline{N}_{(k+1}(r,a_j,f)\le N(r,a_j,f)\le T(r,f)+S(r,f),$$

故有

$$k\sum_{j=1}^{q}\overline{N}_{(k+1}(r,a_j,f)+\sum_{j=1}^{q}\overline{N}(r,a_j,f)\le qT(r,f)+S(r,f). \tag{2.2}$$

由 (2.1) 和 (2.2) 式, 得

$$(q-2)T(r,f)+k\sum_{j=1}^{q}\overline{N}_{(k+1}(r,a_j,f)\le qT(r,f)+\varepsilon T(r,f)+S(r,f),$$

即

$$\sum_{j=1}^{q}\overline{N}_{(k+1}(r,a_j,f)\le\frac{2+\varepsilon}{k}T(r,f)+S(r,f).$$

引理 3 证毕.

引理 4 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为两个非常数亚纯函数, $a_j(z)(j=1,2,3,4)$ 为 f 与 g 的四个判别的小函数, 若 $f\not\equiv g$, 且 $\overline{E}_{k)}(a_j,f)=\overline{E}_{k)}(a_j,g),(j=1,2,3,4)$,$k\ge 3$ 为正整数, 则

(a) $T(r,f)\le\dfrac{k}{k-2-\varepsilon-k\varepsilon}T(r,g)+S(r),T(r,g)\le\dfrac{k}{k-2-\varepsilon-k\varepsilon}T(r,f)+S(r),$
$S(r)=S(r,f)=S(r,g);$

(b) $$(2-\frac{2+\varepsilon+k\varepsilon}{k})T(r,f)+S(r)\le\sum_{j=1}^{4}\overline{N}_{k)}(r,a_j,f)\le(1+\frac{k}{k-2-\varepsilon-k\varepsilon})T(r,f)+S(r),$$

$$(2-\frac{2+\varepsilon+k\varepsilon}{k})T(r,g)+S(r)\le\sum_{j=1}^{4}\overline{N}_{k)}(r,a_j,g)\le(1+\frac{k}{k-2-\varepsilon-k\varepsilon})T(r,g)+S(r).$$

证 由引理 1 和引理 3, 有

$$
\begin{aligned}
2T(r,f) &\le \sum_{j=1}^{4}\overline{N}(r,a_j,f)+\varepsilon T(r,f)+S(r,f)\\
&=\sum_{j=1}^{4}\overline{N}_{k)}(r,a_j,f)+\sum_{j=1}^{4}\overline{N}_{(k+1}(r,a_j,f)+\varepsilon T(r,f)+S(r,f)\\
&\le T(r,f)+T(r,g)+\frac{2+\varepsilon+k\varepsilon}{k}T(r,f)+S(r,f),
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

从而

$$(k-2-\varepsilon-k\varepsilon)T(r,f)\le kT(r,g)+S(r,f).$$

因为 $k\ge 3$, 取 ε 充分小, 使 $k-2-\varepsilon-k\varepsilon>0$, 所以有

$$T(r,f)\le \frac{k}{k-2-\varepsilon-k\varepsilon}T(r,g)+S(r,f). \tag{2.4}$$

同理

$$T(r,g)\le \frac{k}{k-2-\varepsilon-k\varepsilon}T(r,f)+S(r,g). \tag{2.5}$$

由 (2.4) 和 (2.5) 式, 得 $S(r)=S(r,f)=S(r,g)$. 此即得 (a).

由 (2.3) 式, 引理 3 和 (a) 得

$$
\begin{aligned}
2T(r,f) &\le \sum_{j=1}^{4}\overline{N}_{k)}(r,a_j,f)+\frac{2+\varepsilon+k\varepsilon}{k}T(r,f)+S(r)\\
&\le T(r,f)+T(r,g)+\frac{2+\varepsilon+k\varepsilon}{k}T(r,f)+S(r)\\
&\le (1+\frac{k}{k-2-\varepsilon-k\varepsilon})T(r,f)+\frac{2+\varepsilon+k\varepsilon}{k}T(r,f)+S(r),
\end{aligned}
$$

即得

$$(2-\frac{2+\varepsilon+k\varepsilon}{k})T(r,f)+S(r)\le\sum_{j=1}^{4}\overline{N}_{k)}(r,a_j,f)\le(1+\frac{k}{k-2-\varepsilon-k\varepsilon})T(r,f)+S(r).$$

同理, 有

$$(2-\frac{2+\varepsilon+k\varepsilon}{k})T(r,g)+S(r)\le\sum_{j=1}^{4}\overline{N}_{k)}(r,a_j,g)\le(1+\frac{k}{k-2-\varepsilon-k\varepsilon})T(r,g)+S(r).$$

此即得 (b). 引理 4 证毕.

引理 5 (见文献 [2]) 设 $f(z)$ 为一个非常数亚纯函数, $R(f)=\frac{P(f)}{Q(f)}$, 其中 $P(f)=\sum\limits_{k=0}^{p}a_kf^k$ 和 $Q(f)=\sum\limits_{j=0}^{q}b_jf^j$ 是两个互质的 f 的多项式, 系数 $\{a_k(z)\}$ 和 $\{b_k(z)\}$ 均为 f 的小函数, 且 $a_p(z)\not\equiv 0, b_q(z)\not\equiv 0$, 则

$$T(r,R(f))=\max\{p,q\}\cdot T(r,f)+S(r,f).$$

引理 6 (见文献 [7]) 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为两个非常数亚纯函数, $(a_k, b_k)(1 \le k \le 5)$ 为 f 和 g 的五个 IM* 公共值对, 且 $a_i \ne a_j, b_i \ne b_j (i \ne j)$, 若 f 不是 g 的分式线性变换, 则下列等式成立:

(a) $T(r,f) = T(r,g) + S(r), \quad S(r) = S(r,f) = S(r,g);$

(b) $3T(r,f) = \sum\limits_{k=1}^{5} \overline{N}(r, a_k, f) + S(r);$

(c) $T(r,f) = \overline{N}(r,a,f) + S(r), \quad a \ne a_k, 1 \le k \le 5.$

3 定理证明

定理 1 的证明 不失一般性, 假设 $a_1(z) \equiv \infty$, $a_2(z) \equiv 0$, $a_3(z) \equiv 1$, $a_4(z) \equiv a(z)(\not\equiv \infty, 0, 1)$, 且 $f \not\equiv g$. 令

$$H_1 = \begin{vmatrix} f(f-1) & f' \\ a(a-1) & a' \end{vmatrix} \Big/ [f(f-1)(f-a)] - \begin{vmatrix} g(g-1) & g' \\ a(a-1) & a' \end{vmatrix} \Big/ [g(g-1)(g-a)], \tag{3.1}$$

而

$$\begin{vmatrix} f(f-1) & f' \\ a(a-1) & a' \end{vmatrix} = -f(f-1)(f'-a') + (1-a)(f-a)(f-1)f' + af(f-a)f',$$

由对数导数引理, 有 $m(r, H_1) = S(r)$. 若 $H_1 \not\equiv 0$, 则有

$$\begin{aligned} N(r,H_1) \le & \sum_{j=2}^{4} \overline{N}_{(k+1}(r,a_j,f) + \sum_{j=2}^{4} \overline{N}_{(k+1}(r,a_j,g) + S(r) \\ \le & \frac{1}{k+1} \sum_{j=2}^{4} N_{(k+1}(r,a_j,f) + \frac{1}{k+1} \sum_{j=2}^{4} N_{(k+1}(r,a_j,g) + S(r) \\ = & \frac{1}{k+1} \left\{ \sum_{j=2}^{4} N(r,a_j,f) + \sum_{j=2}^{4} N(r,a_j,g) \right\} \\ & - \frac{1}{k+1} \left\{ \sum_{j=2}^{4} N_{k)}(r,a_j,f) + \sum_{j=2}^{4} N_{k)}(r,a_j,g) \right\} + S(r) \\ \le & \frac{3}{k+1} \{T(r,f) + T(r,g)\} - \frac{2}{k+1} \sum_{j=1}^{4} \overline{N}_{k)}(r,a_j,f) + \frac{2}{k+1} N_{k)}(r,a_1,f) + S(r). \end{aligned}$$

而

$$N_{k)}(r,a_1,f) \le N(r,0,H_1) \le T(r,H_1) + S(r) = N(r,H_1) + S(r),$$

所以

$$N(r,H_1) \le \frac{3}{k-1} \{T(r,f) + T(r,g)\} - \frac{2}{k-1} \sum_{j=1}^{4} \overline{N}_{k)}(r,a_j,f) + S(r).$$

从而则根据上式和引理 4(b) 得

$$
\begin{aligned}
&\overline{N}_{k)}(r,a_1,f)\le N_{k)}(r,a_1,f)\le N(r,H_1)+S(r)\\
\le&\frac{3}{k-1}\{T(r,f)+T(r,g)\}-\frac{2}{k-1}\sum_{j=1}^{4}\overline{N}_{k)}(r,a_j,f)+S(r)\\
\le&\frac{3}{k-1}\{T(r,f)+T(r,g)\}-\frac{2}{k-1}(2-\frac{2+\varepsilon+k\varepsilon}{k})T(r,f)+S(r).
\end{aligned}
$$

同理, 有

$$\overline{N}_{k)}(r,a_1,g)\le\frac{3}{k-1}\{T(r,f)+T(r,g)\}-\frac{2}{k-1}(2-\frac{2+\varepsilon+k\varepsilon}{k})T(r,g)+S(r).$$

故我们有

$$\overline{N}_{k)}(r,a_1,f)+\overline{N}_{k)}(r,a_1,g)\le\frac{2(k+2+\varepsilon+k\varepsilon)}{k(k-1)}\{T(r,f)+T(r,g)\}+S(r). \tag{3.2}$$

同理, 设

$$H_2=L(f,1,a)f/[(f-1)(f-a)]-L(g,1,a)g/[(g-1)(g-a)], \tag{3.3}$$

$$H_3=L(f,0,a)(f-1)/[f(f-a)]-L(g,0,a)(g-1)/[g(g-a)], \tag{3.4}$$

$$H_4=L(f,0,1)(f-a)/[f(f-1)]-L(g,0,1)(g-a)/[g(g-1)]. \tag{3.5}$$

若 $H_j\not\equiv 0(j=2,3,4)$, 则由引理 2, 当 $j=2,3,4$ 时, 同样也有

$$\overline{N}_{k)}(r,a_j,f)+\overline{N}_{k)}(r,a_j,g)\le\frac{2(k+2+\varepsilon+k\varepsilon)}{k(k-1)}\{T(r,f)+T(r,g)\}+S(r). \tag{3.6}$$

由引理 4(b), 可得

$$(1-\frac{2+\varepsilon+k\varepsilon}{k})\{T(r,f)+T(r,g)\}\le\sum_{j=1,j\ne j_0}^{4}\{\overline{N}_{k)}(r,a_j,f)+\overline{N}_{k)}(r,a_j,g)\}+S(r).$$

$j_0=1,2,3,4$. 可知 $\overline{N}_{k)}(r,a_j,f)+\overline{N}_{k)}(r,a_j,g)(j=1,2,3,4)$ 中至少有两个, 不失一般性, 可设 $j=3,4$, 使得

$$\overline{N}_{k)}(r,a_3,f)+\overline{N}_{k)}(r,a_3,g)\ge\frac{1}{3}\{(1-\frac{2+\varepsilon+k\varepsilon}{k})+o(1)\}\{T(r,f)+T(r,g)\}\ \ (r\in I), \tag{3.7}$$

$$\overline{N}_{k)}(r,a_4,f)+\overline{N}_{k)}(r,a_4,g)\ge\frac{1}{3}\{(1-\frac{2+\varepsilon+k\varepsilon}{k})+o(1)\}\{T(r,f)+T(r,g)\}\ \ (r\in I), \tag{3.8}$$

其中 I 为无穷测度集. 若 $H_3\not\equiv 0$, 则由 (3.6) 和 (3.7) 式, 得 $\frac{1}{3}(1-\frac{2+\varepsilon+k\varepsilon}{k})\le\frac{2(k+2+\varepsilon+k\varepsilon)}{k(k-1)}$. 令 $\varepsilon\to 0$, 有 $\frac{1}{3}(1-\frac{2}{k})\le\frac{2(k+2)}{k(k-1)}$. 解得 $k\le 10$, 与定理 2 条件 $k\ge 11$ 矛盾, 故 $H_3\equiv 0$. 同理由 (3.6) 和 (3.8) 式可得 $H_4\equiv 0$. 即

$$L(f,0,a)(f-1)/[f(f-a)]\equiv L(g,0,a)(g-1)/[g(g-a)], \tag{3.9}$$

$$f'(f-a)/[f(f-1)]\equiv g'(g-a)/[g(g-1)]. \tag{3.10}$$

设 z_a 为 $f-a$ 的零点, 但不是 $g-a$ 的零点. 则 z_a 是 (3.9) 式等号左边的一个极点, 由此对于等号右边, 我们有 $g(z_a)=0$ 或 $g(z_a)=\infty$. 由 (3.9) 和 (3.10), 得

$$L(f,0,a)f'/f^2 \equiv L(g,0,a)g'/g^2. \tag{3.11}$$

z_a 不是 (3.11) 式等号左边的极点, 但却是等号右边的二重极点, 矛盾. 故 z_a 为 $g-a$ 的零点. 由对称性, 并且比较 (3.9) 式等号两边在点 z_a 的留数, 可得 a 为 f 与 g 的 CM* 公共值. 同理可得 1 为 f 与 g 的 CM* 公共值.

根据式 (3.9) 和 (3.10), 我们可得

$$a(a-1)\frac{f'-a'}{f-a}+a\frac{f'}{f} \equiv a(a-1)\frac{g'-a'}{g-a}+a\frac{g'}{g}, \tag{3.12}$$

$$(1-a)\frac{f'}{f-1}+a\frac{f'}{f} \equiv (1-a)\frac{g'}{g-1}+a\frac{g'}{g}. \tag{3.13}$$

消去 f'/f 和 g'/g, 有

$$a\frac{f'-a'}{f-a}+\frac{f'}{f-1} \equiv a\frac{g'-a'}{g-a}+\frac{g'}{g-1}. \tag{3.14}$$

由 (3.14) 式, 显然有 ∞ 为 f 与 g 的 CM* 公共值.

由 (3.12) 或 (3.13) 式, 可得 0 也为 f 与 g 的 CM* 公共值. 故 $0,1,\infty,a$ 均为 f 与 g 的 CM* 公共值, 从而由定理 B, 得 f 是 g 的拟分式线性变换. 定理 1 证毕.

定理 2 的证明 由定理 1 可知, 仅需考虑 $k<11$ 的情况. 考虑到拟分式线性变换, 不失一般性, 可设 $a_j(z)\not\equiv\infty (j=1,2,3,4)$, 且假设 $f\not\equiv g$. 由引理 1, 有

$$\begin{aligned}
&2T(r,f) \le \sum_{j=1}^{4}\overline{N}(r,a_j,f)+\varepsilon T(r,f)+S(r)\\
=&\ \sum_{j=1}^{3}\overline{N}_{11)}(r,a_j,f)+\sum_{j=1}^{3}\overline{N}_{(12}(r,a_j,f)+\overline{N}_{k)}(r,a_4,f)+\overline{N}_{(k+1}(r,a_4,f)+\varepsilon T(r,f)+S(r)\\
\le&\ \frac{11}{12}\sum_{j=1}^{3}\overline{N}_{11)}(r,a_j,f)+\frac{1}{12}\sum_{j=1}^{3}N(r,a_j,f)+\frac{k}{k+1}\overline{N}_{k)}(r,a_4,f)\\
&+\frac{1}{k+1}N(r,a_4,f)+\varepsilon T(r,f)+S(r)\\
\le&\ \frac{11}{12}\left[\sum_{j=1}^{3}\overline{N}_{11)}(r,a_j,f)+\overline{N}_{k)}(r,a_4,f)\right]+\frac{1}{4}T(r,f)+\frac{1}{k+1}T(r,f)+\varepsilon T(r,f)+S(r)\\
\le&\ (\frac{7}{6}+\frac{1}{k+1}+\varepsilon)T(r,f)+\frac{11}{12}T(r,g)+S(r).
\end{aligned}$$

从而根据上式 $T(r,f)\le \frac{11(k+1)}{2(5k-1-6k\varepsilon-6\varepsilon)}T(r,g)+S(r)$, 及

$$\frac{3(7k+3-4k\varepsilon-4\varepsilon)}{11(k+1)}T(r,f)+S(r) \le \sum_{j=1}^{3}\overline{N}_{11)}(r,a_j,f)+\overline{N}_{k)}(r,a_4,f). \tag{3.15}$$

在接下来的证明中, 考虑到拟分式线性变换, 可设 $a_1(z)\equiv\infty$, $a_2(z)\equiv 0$, $a_3(z)\equiv 1$, $a_4(z)\equiv a(z)(\not\equiv\infty,0,1)$. 设 H_1 同 (3.1) 式, 则有 $m(r,H_1)=S(r)$. 若 $H_1\not\equiv 0$, 由 (3.15) 式有

$$\begin{aligned}
&N(r,H_1)\\
\le&\sum_{j=2}^{3}\overline{N}_{(12}(r,a_j,f)+\sum_{j=2}^{3}\overline{N}_{(12}(r,a_j,g)+\overline{N}_{(k+1}(r,a_4,f)+\overline{N}_{(k+1}(r,a_4,g)+S(r)\\
\le&\frac{1}{12}\left\{\sum_{j=2}^{3}N(r,a_j,f)+\sum_{j=2}^{3}N(r,a_j,g)\right\}-\frac{1}{12}\left\{\sum_{j=2}^{3}N_{11)}(r,a_j,f)+\sum_{j=2}^{3}N_{11)}(r,a_j,g)\right\}\\
&+\frac{1}{k+1}\{N(r,a_4,f)+N(r,a_4,g)\}-\frac{1}{k+1}\{N_{k)}(r,a_4,f)+N_{k)}(r,a_4,g)\}+S(r)\\
\le&(\frac{1}{6}+\frac{1}{k+1})\{T(r,f)+T(r,g)\}+\frac{1}{6}N_{11)}(r,a_1,f)\\
&-2\left\{\frac{1}{12}\sum_{j=1}^{3}N_{11)}(r,a_j,f)+\frac{1}{k+1}N_{k)}(r,a_4,f)\right\}+S(r)\\
\le&(\frac{1}{6}+\frac{1}{k+1})\{T(r,f)+T(r,g)\}+\frac{1}{6}N_{11)}(r,a_1,f)-\frac{7k+3-4k\varepsilon-4\varepsilon}{22(k+1)}T(r,f)+S(r).
\end{aligned}\tag{3.16}$$

而

$$N_{11)}(r,a_1,f)\le N(r,0,H_1)\le T(r,H_1)+S(r)=N(r,H_1)+S(r),\tag{3.17}$$

则根据 (3.16) 和 (3.17) 式得

$$\begin{aligned}
&\overline{N}_{11)}(r,a_1,f)\le N_{11)}(r,a_1,f)\\
\le\quad&(\frac{k+7}{5(k+1)})\{T(r,f)+T(r,g)\}-\frac{3(7k+3-4k\varepsilon-4\varepsilon)}{55(k+1)}T(r,f)+S(r).
\end{aligned}$$

同理, 有

$$\overline{N}_{11)}(r,a_1,g)\le(\frac{k+7}{5(k+1)})\{T(r,f)+T(r,g)\}-\frac{3(7k+3-4k\varepsilon-4\varepsilon)}{55(k+1)}T(r,g)+S(r),$$

所以有

$$\begin{aligned}
&\overline{N}_{11)}(r,a_1,f)+\overline{N}_{11)}(r,a_1,g)\\
\le&\{\frac{2(k+7)}{5(k+1)}-\frac{3(7k+3-4k\varepsilon-4\varepsilon)}{55(k+1)}\}\{T(r,f)+T(r,g)\}+S(r)\\
=&\frac{k+145+12k\varepsilon+12\varepsilon}{55(k+1)}\{T(r,f)+T(r,g)\}+S(r).
\end{aligned}\tag{3.18}$$

同理, 设 H_2,H_3,H_4 分别同 (3.3), (3.4), (3.5) 式, 若 $H_j\not\equiv 0(j=2,3,4)$, 则由引理 2, 当

$j=2,3,4$ 时, 同样也有

$$\overline{N}_{11)}(r,a_j,f)+\overline{N}_{11)}(r,a_j,g)\le\frac{k+145+12k\varepsilon+12\varepsilon}{55(k+1)}\{T(r,f)+T(r,g)\}+S(r),\tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}\overline{N}_{k)}(r,a_4,f)+\overline{N}_{k)}(r,a_4,g)&\le\frac{2k+4+4k\varepsilon+4\varepsilon}{11(k+1)}\{T(r,f)+T(r,g)\}+S(r)\\&\le\frac{k+145+12k\varepsilon+12\varepsilon}{55(k+1)}\{T(r,f)+T(r,g)\}+S(r),\end{aligned}\tag{3.20}$$

上式 (3.20) 对 $2\le k<11$ 成立. 为方便计我们设 $k_1=k_2=k_3=11$, $k_4=k$, 由 (3.15) 式可得

$$\frac{2(5k-1-6k\varepsilon-6\varepsilon)}{11(k+1)}\{T(r,f)+T(r,g)\}\le\sum_{j=1,j\ne j_0}^{4}\{\overline{N}_{k_j)}(r,a_j,f)+\overline{N}_{k_j)}(r,a_j,g)\}+S(r),$$

$j_0=1,2,3,4$, 可知 $\overline{N}_{k_j)}(r,a_j,f)+\overline{N}_{k_j)}(r,a_j,g)(j=1,2,3,4)$ 中至少有两个, 不失一般性, 可设 $j=3,4$, 使得

$$\overline{N}_{11)}(r,a_3,f)+\overline{N}_{11)}(r,a_3,g)\ge\frac{1}{3}\{\frac{2(5k-1-6k\varepsilon-6\varepsilon)}{11(k+1)}+o(1)\}\{T(r,f)+T(r,g)\}\ \ (r\in I),\tag{3.21}$$

$$\overline{N}_{k)}(r,a_4,f)+\overline{N}_{k)}(r,a_4,g)\ge\frac{1}{3}\{\frac{2(5k-1-6k\varepsilon-6\varepsilon)}{11(k+1)}+o(1)\}\{T(r,f)+T(r,g)\}\ \ (r\in I),\tag{3.22}$$

其中 I 为无穷测度集. 若 $H_3\not\equiv0$, 则由 (3.19) 和 (3.21) 式得

$$\frac{2(5k-1-6k\varepsilon-6\varepsilon)}{33(k+1)}\le\frac{k+145+12k\varepsilon+12\varepsilon}{55(k+1)}.$$

令 $\varepsilon\to0$ 得 $\frac{2(5k-1)}{33(k+1)}\le\frac{k+145}{55(k+1)}$. 解得 $k\le9$. 当 $k=10$ 时产生矛盾，故 $H_3\equiv0$. 同理由 (3.20) 和 (3.22) 式可得当 $k=10$ 时 $H_4\equiv0$. 与定理 2 证明的讨论相同, 可得 $0,1,\infty,a$ 为 f 与 g 的 CM* 公共值, 从而由定理 B 得 f 是 g 的拟分式线性变换. 定理 2 证毕.

定理 3 的证明 假设 f 不是 g 的分式线性变换, 不失一般性, 设 $a_i\ne\infty,b_i\ne\infty,1\le i\le6$. 存在不全为零的常数 $A_i,1\le i\le6$, 使得函数

$$F(f,g)=A_1f^2g+A_2fg+A_3f^2+A_4f+A_5g+A_6$$

满足 $F(a_i,b_i)=0,i=1,\cdots,5$. 若 $F(f,g)\equiv0$, 则 $(A_1f^2+A_2f+A_5)g=-A_3f^2-A_4f-A_6$. 因为 f 不是常数, 所以 $A_1f^2+A_2f+A_5\not\equiv0$. 故

$$g=\frac{-A_3f^2-A_4f-A_6}{A_1f^2+A_2f+A_5}.\tag{3.23}$$

若存在一个 a_i 使得 $A_1a_i^2+A_2a_i+A_5=0$, 那么 $A_3a_i^2+A_4a_i+A_6=0$, 因此 $f-a_i$ 为 $-A_3f^2-A_4f-A_6$ 和 $A_1f^2+A_2f+A_5$ 的公因式，所以 g 是 f 的分式线性变换, 这与假设矛盾. 因此对任意的 a_i, 有 $A_1a_i^2+A_2a_i+A_5\ne0$. 因为 $F(a_i,b_i)=0$, 有

$$b_i=\frac{-A_3a_i^2-A_4a_i-A_6}{A_1a_i^2+A_2a_i+A_5}.\tag{3.24}$$

由 (3.23) 和 (3.24) 式得

$$g-b_i=\frac{(f-a_i)(c_if-d_i)}{A_1f^2+A_2f+A_5}, \tag{3.25}$$

其中 c_i,d_i 为常数. 若 $c_i=0$, 由假设 g 不是 f 的分式线性变换，则此时 $A_1\neq 0$. 由引理 5 和引理 6(a), 得 $T(r,g)=2T(r,f)+S(r)$. 由第二基本定理, 有

$$6T(r,f)=3T(r,g)+S(r)\leq\sum_{i=1}^{5}\overline{N}(r,b_i,g)+S(r)=\sum_{i=1}^{5}\overline{N}(r,a_i,f)+S(r)\leq 5T(r,f)+S(r),$$

得 $T(r,f)=S(r)$, 矛盾. 若 $c_i\neq 0$, 由假设 g 不是 f 的分式线性变换，则此时 $A_1\left(\frac{d_i}{c_i}\right)^2+A_2\left(\frac{d_i}{c_i}\right)+A_5\neq 0$, 因此仍有 $T(r,g)=2T(r,f)+S(r)$，同样可得矛盾 $T(r,f)=S(r)$. 故 $F(f,g)\not\equiv 0$.

由引理 6(c), 可以得到 $T(r,f)=\overline{N}(r,f)+S(r)$, 所以有 $m(r,f)=S(r),m(r,g)=S(r)$. 从而 $m(r,F)=S(r)$. 由引理 6(a), 得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5}\overline{N}(r,a_i,f)&\leq\overline{N}(r,0,F)+S(r)\leq T(r,F)+S(r)=N(r,F)+S(r)\\&\leq 2N(r,f)+N(r,g)+S(r)\leq 2T(r,f)+T(r,g)+S(r)\\&=3T(r,f)+S(r).\end{aligned}\tag{3.26}$$

同理, 可得

$$\sum_{i=1}^{4}\overline{N}(r,a_i,f)+\overline{N}(r,f-a_6=0=g-b_6)\leq 3T(r,f)+S(r). \tag{3.27}$$

则由 (1.1) 和 (3.27) 式得

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{6}\overline{N}(r,a_i,f)=\sum_{i=1}^{4}\overline{N}(r,a_i,f)+\overline{N}(r,a_5,f)+\overline{N}(r,a_6,f)\\&\leq 3T(r,f)+\overline{N}(r,a_5,f)+\overline{N}(r,a_6,f)-\overline{N}(r,f-a_6=0=g-b_6)+S(r)\\&\leq(3+\lambda)T(r,f)+\overline{N}(r,a_5,f)+S(r).\end{aligned}\tag{3.28}$$

同理, 有

$$\sum_{i=1}^{6}\overline{N}(r,a_i,f)\leq(3+\lambda)T(r,f)+\overline{N}(r,a_i,f)+S(r),\quad i=1,2,3,4. \tag{3.29}$$

由第二基本定理, 得

$$4T(r,f)\leq\sum_{i=1}^{6}\overline{N}(r,a_i,f)+S(r). \tag{3.30}$$

由 (3.28), (3.29), (3.30) 式和引理 6(b), 得

$$
\begin{aligned}
20T(r,f) &\le 5\sum_{i=1}^{6}\overline{N}(r,a_i,f)+S(r)\le(15+5\lambda)T(r,f)+\sum_{i=1}^{5}\overline{N}(r,a_i,f)+S(r)\\
&=(18+5\lambda)T(r,f)+S(r),
\end{aligned}
$$

即

$$(2-5\lambda)T(r,f)\le S(r). \tag{3.31}$$

已知 $\lambda\in[0,\frac{2}{5})$, 则 (3.31) 式不成立, 所以假设不成立. 故 f 为 g 的分式线性变换. 定理 3 证毕.

定理 4 的证明 假设 f 不是 g 的拟分式线性变换, 不失一般性, 设 $a_k\not\equiv\infty, b_k\not\equiv\infty, 1\le k\le 5$. 考虑 $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ 中的任意三个小函数, 不失一般性, 假设 a_1,a_2,a_3, 令 $L(z)$ 为满足 $L(a_k)=b_k(k=1,2,3)$ 的拟分式线性变换, 则有

$$\sum_{k=1}^{3}\overline{N}(r,a_k,f)\le N(r,0,L(f)-g)\le T(r,f)+T(r,g)+S(r). \tag{3.32}$$

显然从 $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ 中任取三个小函数, 都可以得到相应的 $L(f)$ 和 (3.32) 式, 这样有四个不等式, 相加得

$$3\sum_{k=1}^{4}\overline{N}(r,a_4,f)\le 4T(r,f)+4T(r,g)+S(r). \tag{3.33}$$

由引理 1, (1.2) 和 (3.33) 式得

$$
\begin{aligned}
3T(r,f) &\le \sum_{k=1}^{5}\overline{N}(r,a_k,f)+\varepsilon T(r,f)+S(r,f)\\
&=\sum_{k=1}^{4}\overline{N}(r,a_k,f)+\overline{N}(r,a_5,f)+\varepsilon T(r,f)+S(r,f)\\
&\le\frac{4}{3}T(r,f)+\frac{4}{3}T(r,g)+(\lambda+\varepsilon)T(r,f)+S(r,f),
\end{aligned}
$$

即

$$(5-3\lambda-3\varepsilon)T(r,f)\le 4T(r,g)+S(r,f). \tag{3.34}$$

同理, 也有

$$(5-3\lambda-3\varepsilon)T(r,g)\le 4T(r,f)+S(r,g). \tag{3.35}$$

(3.34) 与 (3.35) 式相加得

$$(1-3\lambda-3\varepsilon)\{T(r,f)+T(r,g)\}\le S(r,f)+S(r,g). \tag{3.36}$$

已知 $\lambda\in[0,\frac{1}{3})$, 取 ε 足够小, 则 (3.36) 式不成立, 所以假设不成立. 故 f 为 g 的拟分式线性变换. 定理 4 证毕.

参 考 文 献

[1] Hayman W K. Meromorphic Functions [M]. Oxford: Clarendon, 1964.

[2] Yang C C, Yi H X. Uniqueness Theory of Meromorphic Functions [M]. Beijing, New York: Science Press; Kluwer Academic Publ., 2003.

[3] Li P, Yang C C. On two meromorphic functions that share pairs of small functions [J]. Complex Variable, 1997, 32: 177–190.

[4] 张庆彩, 杨连中. 具有四个公共值的亚纯函数的唯一性 [J]. 山东科学, 1999, 12(2): 8–12.

[5] Yao W H,Yu M J. A further result about meromorphic functions sharing four small functions CM* [J]. J. of Math., 2002, 22: 374–378.

[6] Czubiak T P, Gundersen G G. Meromorphic functions that share pairs of values [J]. Complex Variables, 1997, 34: 35–46.

[7] Hu P C, Li P, Yang C C. Unicity of meromorphic mappings [M]. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publ., 2003.

[8] Gundersen G G. Meromorphic functions that share five pairs of values [J]. Complex Variables, 2011, 56: 93–99.

[9] Yamanoi K. The second main theorem for small functions and related problems [J]. Acta Math., 2004, 192: 225–294.

[10] 李玉华. 具有四个有穷的 IM 公共小函数的整函数 [J]. 数学学报, 1998, 41: 249–260.

SOME UNIQUENESS RESULTS OF MEROMORPHIC FUNCTIONS

XU Yao , ZHANG Qing-cai

(*School of Information, Renmin University of China, Beijing 100872, China*)

Abstract: In this paper, we study the uniqueness of meromorphic functions sharing four small functions concerning the multiplicities. Using the precise form of the second fundamental theorem of Nevanlinna concerning small functions and the some technique of dealing with small functions, we improve some previous results. And also by the methods of handling shared pairs given by Gundersen, we further research the problems of meromorphic functions sharing five pairs of values or sharing four pairs of small functions, and obtain some results which extending and improving the related results.

Keywords: meromorphic function; small function; uniqueness; shared value

2010 MR Subject Classification: 30D35; 30D30