

在全平面上解析的 Laplace-Stieltjes 变换的正规增长性

罗 茜¹, 刘兴臻², 孔荫莹³

(1. 广东嘉应学院数学学院, 广州 梅州 514015)

(2. 广州大学数学与信息科学学院, 广东 广州 510006)

(3. 广东财经大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510320)

摘 要: 本文研究了应用 Knopp-Kojima 的方法得到的 Dirichlet 级数正规增长性. 利用 Dirichlet 级数和 Laplace-Stieltjes 变换的关系, 得到了 Laplace-Stieltjes 变换在全平面上的正规增长级的等价条件.

关键词: Laplace-Stieltjes 变换; 级; 正规增长性

MR(2010) 主题分类号: 30D35

中图分类号: O174.55

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2014)06-1181-06

1 引言

设 $\alpha(y)$ 是在任何有限闭区间 $[0, X]$ 上有界变差的实或复函数. Laplace-Stieltjes 变换^[1]:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{sy} d\alpha(y) \quad (s = \sigma + it). \quad (1.1)$$

(为了表述的方便, 后面均称为 L-S 变换)

由 Taylor 级数、Dirichlet 级数和 L-S 变换定义的函数的增长性和正规增长性的研究的方法和结果已经有不少^[1-10], 比如按照 Ritt 的想法, 类似于研究 Taylor 级数的方法, 定义 Dirichlet 级数的级, 在系数满足一定的条件下得到了不少的结果, 也有运用 Knopp-Kojima 方法^[12]来研究 Dirichlet 级数的增长性和正规增长性, 这样的结果比较少. 本文在特定的 $\{\lambda_n\}$ 下进行研究, 得到 L-S 变换在全平面上的正规增长级的等价条件.

定义 1 L-S 变换 (1.1) 的收敛横坐标 σ_c 、一致收敛横坐标 σ_u 及绝对收敛横坐标 σ_a 如下:

$\sigma_c = \inf\{\sigma_0 | \text{L-S 变换 (1.1) 在 } \sigma < \sigma_0 \text{ 内收敛, } \sigma_0 \in R\};$

$\sigma_u = \inf\{\sigma_1 | \text{L-S 变换 (1.1) 在 } \sigma \leq \sigma_1 \text{ 上一致收敛, } \sigma_1 \in R\};$

$\sigma_a = \inf\{\sigma_2 | \text{L-S 变换 (1.1) 在 } \sigma \leq \sigma_2 \text{ 上绝对收敛, } \sigma_2 \in R\}.$

定义 2 L-S 变换 (1.1) 的最大模, 系数和最大项可以分别定义为

$$\begin{aligned} M_u(\sigma, F) &= \sup_{0 < x < +\infty, -\infty < t < +\infty} \left| \int_0^x e^{(\sigma+it)y} d\alpha(y) \right|, \\ \mu(\sigma, F) &= \max_{1 \leq n < +\infty} B_n^* e^{\lambda_n \sigma}, \end{aligned}$$

*收稿日期: 2012-12-14

接收日期: 2013-02-22

基金项目: 国家自然科学基金青年项目 (11101096); 广东省自然科学基金项目资助 (S2012010010376).

作者简介: 罗茜 (1981-), 女, 广东梅州, 讲师, 研究方向: 函数论方向.

通讯作者: 孔荫莹

其中 $B_n^* = \sup_{n \leq x \leq n+1} |\int_n^x e^{ity} d\alpha(y)|$.

假设 (1.1) 满足

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln B_n^*}{n} = -\infty. \quad (1.2)$$

根据文 [1] 的一致收敛横坐标的公式可知 (1.1) 的一致收敛横坐标 $\sigma_u = +\infty$, 因此 (1.1) 定义了一个复平面上解析的函数 $F(s)$.

定义 3 当 $\sigma_u = +\infty$ 时, 定义它的级 $\tau_u = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M_u(\sigma, F)}{\sigma}$. 正规增长级 $\tau_u = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M_u(\sigma, F)}{\sigma}$.

根据文 [1], 取 $D = 0, K = 1$ 可得如下引理:

引理 1 对于 L-S 变换 (1.1),

- (1) 若 $\sigma_u > -\infty$, 那么 $\mu(\sigma, F) \leq 2M_u(\sigma, F)$;
- (2) $\forall \varepsilon > 0, \exists C > 0, M_u(\sigma, F) \leq Ce^{|\sigma|} \mu(\sigma + \varepsilon, F)$.

引理 2 [3] (1) 设 b 是一正的常数, σ 是任一实数, 那么函数 $\varphi(x) = -bx \ln x + x\sigma$ ($x > 0$) 在 $x = x_0 = e^{\frac{\sigma}{b}-1}$ 时达到最大值 $be^{\frac{\sigma}{b}-1}$.

(2) 设 c 是一正的常数, x 是任一正实数, 那么函数 $\psi(\sigma) = e^{c\sigma} - x\sigma$ ($-\infty < \sigma < +\infty$) 在 $\sigma = \sigma_0 = -\frac{\ln c - \ln x}{c}$ 时达到最小值 $\frac{x}{c}(\ln ce - \ln x)$.

2 主要定理及其证明

定理 1 设 L-S 变换 (1.1) 满足 $\sigma_u = +\infty$, 则

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M_u(\sigma, F)}{\sigma} = \rho \Leftrightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln B_n^*}{n \ln n} = -\frac{1}{\rho} \quad (0 < \rho < +\infty),$$

当 $\rho = 0$ 时, $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln B_n^*}{n \ln n} = -\infty$; 当 $\rho = +\infty$ 时, $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln B_n^*}{n \ln n} = 0$.

证 考虑 $0 < \rho < \infty$ 情形. 先证右边条件的必要性. $\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma_0 > 0$, 当 $\sigma > \sigma_0$, 有

$$M_u(\sigma, F) < \exp\{e^{(\rho+\varepsilon)\sigma}\}.$$

由引理 1, $\mu(\sigma, F) \leq 2M_u(\sigma, F) < \exp\{e^{(\rho+\varepsilon)\sigma} + \ln 2\}$. 于是 $\forall n$,

$$B_n^* e^{n\sigma} \leq \mu(\sigma, F) < \exp\{e^{(\rho+\varepsilon)\sigma} + \ln 2\}.$$

则

$$\ln B_n^* < e^{(\rho+\varepsilon)\sigma} - n\sigma + \ln 2.$$

由引理 2, 当 $\sigma = \frac{1}{\rho+\varepsilon} \ln \frac{n}{\rho+\varepsilon}$ 时, 不等式右边达到最小值 $-(\frac{n}{\rho+\varepsilon}) \ln \frac{n}{e(\rho+\varepsilon)} + \ln 2$, 所以当 n 充分大时,

$$\ln B_n^* < -(\frac{n}{\rho+\varepsilon}) \ln \frac{n}{e(\rho+\varepsilon)} + \ln 2,$$

所以 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln B_n^*}{n \ln n} \leq -\frac{1}{\rho+\varepsilon}$. 由 ε 的任意性, $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln B_n^*}{n \ln n} \leq -\frac{1}{\rho}$. 假定 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln B_n^*}{n \ln n} < -\frac{1}{\rho}$, 则存在 $\varepsilon_1 \in (0, \rho)$, 使 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln B_n^*}{n \ln n} < -\frac{1}{\rho-\varepsilon_1}$. 所以对 ε_1 , 存在自然数 N_{ε_1} , 当 $n > N_{\varepsilon_1}$ 时,

$$B_n^* < \exp\{-\frac{n \ln n}{\rho - \varepsilon_1}\}.$$

则 $\forall \sigma > 0$, $B_n^* e^{n(\sigma+\varepsilon)} < \exp\{-\frac{n \ln n}{\rho-\varepsilon_1} + n(\sigma+\varepsilon)\}$. 由引理 2,

$$B_n^* e^{n(\sigma+\varepsilon)} < \exp\left\{\frac{1}{\rho-\varepsilon_1} e^{(\rho-\varepsilon_1)(\sigma+\varepsilon)-1}\right\} = \exp\{e^{(\rho-\varepsilon_1)(\sigma+\varepsilon)-\ln(\rho-\varepsilon_1)-1}\}.$$

那么当 σ 充分大时, 存在常数 $c > 0$, 使得 $\forall n \in N$,

$$B_n^* e^{n(\sigma+\varepsilon)} < \exp\{e^{(\rho-\varepsilon_1)(\sigma+\varepsilon)-\ln(\rho-\varepsilon_1)-1} + c\}.$$

有

$$\mu((\sigma+\varepsilon), F) < \exp\{e^{(\rho-\varepsilon_1)(\sigma+\varepsilon)-\ln(\rho-\varepsilon_1)-1} + c\}.$$

由引理 1,

$$M_u(\sigma, F) \leq C e^{|\sigma|} \mu((\sigma+\varepsilon), F) < \exp\{e^{(\rho-\varepsilon_1)((\sigma+\varepsilon)-\ln(\rho-\varepsilon_1)-1} + c + |\sigma| + \ln C\}.$$

由于

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{e^{(\rho-\varepsilon_1)(\sigma+\varepsilon)-\ln(\rho-\varepsilon_1)-1} + c + |\sigma| + \ln C}{e^{(\rho-\frac{\varepsilon_1}{2})(\sigma+\varepsilon)}} = 0,$$

所以当 σ 充分大时, $M_u(\sigma, F) < \exp\{e^{(\rho-\frac{\varepsilon_1}{2})(\sigma+\varepsilon)}\}$. 那么就有

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M_u(\sigma, F)}{\sigma} \leq (\rho - \frac{\varepsilon_1}{2}) (< \rho).$$

这与定理左边条件矛盾. 从而证明了 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln B_n^*}{n \ln n} = -\frac{1}{\rho}$. 定理右边条件的必要性得证.

由以上证明易得定理右边条件的充分性的证明.

同理可证当 $\rho = 0$, $\rho = +\infty$ 的情形.

定理 2 设 L-S 变换满足 $\sigma_u = +\infty$, 则

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M_u(\sigma, F)}{\sigma} = \rho \Leftrightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln B_n^*}{n \ln n} = -\frac{1}{\rho},$$

并且存在单调递增正整数序列 $\{n_v\}$, 使

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{\ln B_{n_v}^*}{n_v \ln n_v} = -\frac{1}{\rho}, \quad \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{\ln n_{v+1}}{\ln n_v} = 1 \quad (0 < \rho < +\infty),$$

当 $\rho = 0$ 时, 将 $-\frac{1}{\rho}$ 换成 $-\infty$, 当 $\rho = +\infty$ 时, 将 $-\frac{1}{\rho}$ 换成 0.

证 考虑 $0 < \rho < +\infty$ 的情形. 先证右边条件的充分性. 由定理 1 知

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M_u(\sigma, F)}{\sigma} = \rho.$$

下面证 $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M_u(\sigma, F)}{\sigma} \geq \rho$. 由 $\lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{\ln B_{n_v}^*}{n_v \ln n_v} = -\frac{1}{\rho}$ 知 $\forall \varepsilon > 0$, 满足 $0 < \varepsilon < \rho$, $\exists v_0$, 当 $v > v_0$ 时, 有 $\frac{\ln B_{n_v}^*}{n_v \ln n_v} > -\frac{1}{\rho-\varepsilon}$. 则 $B_{n_v}^* e^{n_v \sigma} > \exp\{-\frac{1}{\rho-\varepsilon} n_v \ln n_v + n_v \sigma\}$. 取 $\sigma_v = \frac{1}{\rho-\varepsilon} (\ln n_v + 1)$, 由 $\lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{\ln n_{v+1}}{\ln n_v} = 1$ 知 $\forall \sigma \in [\sigma_{v+1}, \sigma_v]$,

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{\sigma_{v+1}}{\sigma_v} = \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{\sigma}{\sigma_v} = 1.$$

当 v 充分大时, 由引理 2,

$$B_{n_v}^* e^{n_v \sigma_v} > \exp\left\{\frac{1}{\rho - \varepsilon} e^{(\rho - \varepsilon)\sigma_v - 1}\right\} > \exp\{e^{(\rho - 2\varepsilon)\sigma_v}\}.$$

所以, $\forall \sigma \in [\sigma_{v+1}, \sigma_v]$

$$\mu(\sigma, F) \geq \mu(\sigma_v, F) \geq \exp\{e^{(\rho - 2\varepsilon)\sigma_v}\}.$$

当 v 充分大时, 由引理 1 知

$$M_u(\sigma, F) \geq \frac{1}{2}\mu(\sigma, F) > \exp\frac{1}{2}\{e^{(\rho - 2\varepsilon)\sigma_v}\}.$$

那么

$$\frac{\ln \ln M_u(\sigma, F)}{\sigma} > (\rho - 2\varepsilon) \frac{\sigma_v}{\sigma}.$$

所以

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M_u(\sigma, F)}{\sigma} \geq (\rho - 2\varepsilon) \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{\sigma_v}{\sigma} = (\rho - 2\varepsilon).$$

又由 ε 的任意性知

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M_u(\sigma)}{\sigma} \geq \rho.$$

定理右边条件的充分性证毕.

其次证明定理右边条件的必要性. 由定理 1 即得定理右边条件的第一个条件的必要性. 假定第二个条件不成立^[2], 则 $\exists \beta (0 < \beta < \rho), \gamma > 0$ 使得

$$B_n^* < \exp\left\{-\frac{n \ln n}{\rho - \beta}\right\} (n'_v \leq n \leq n''_v),$$

其中 n'_v 及 n''_v 为充分大的正整数,

$$n''_v < n'_{v+1}, \ln n''_v > (1 + \gamma) \ln n'_v (v = 1, 2, \dots).$$

则有

$$B_n^* e^{n\sigma} < \exp\left\{-\frac{1}{\rho - \beta} n \ln n + n\sigma\right\} (n'_v \leq n \leq n''_v).$$

由引理 2, 当 σ 充分大时,

$$B_n^* e^{n\sigma} < \exp\left\{\frac{1}{\rho - \beta} e^{(\rho - \beta)\sigma - 1}\right\} < \exp\{e^{(\rho - \frac{\beta}{2})\sigma}\} \quad (n'_v \leq n \leq n''_v). \quad (2.1)$$

取 $\varepsilon > 0$, 满足 $\frac{\rho + 2\varepsilon}{1 + \frac{\gamma}{2}} < \rho - \eta$, 其中 $0 < \eta < \rho$. 由 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln B_n^*}{n \ln n} = -\frac{1}{\rho}$ 知, 对 $\varepsilon, \exists n_0$, 使

$$\frac{\ln B_n^*}{n \ln n} < -\frac{1}{\rho + \varepsilon} \quad (n \geq n_0).$$

所以有

$$B_n^* e^{n\sigma} < \exp\left\{-\frac{1}{\rho + \varepsilon} n \ln n + n\sigma\right\} \quad (n \geq n_0).$$

令 v 充分大, 使 $n'_v > n_0$, 取 σ'_v 满足 $n_v'^{1+\frac{\gamma}{2}} = e^{(\rho+\varepsilon)\sigma'_v-1}$, 则 $\lim_{v \rightarrow +\infty} \sigma'_v = +\infty$.

由引理 2 知, $\psi(x) = -\frac{1}{\rho+\varepsilon}x \ln x + x\sigma'_v$ 在 $x = e^{(\rho+\varepsilon)\sigma'_v-1} = n_v'^{1+\frac{\gamma}{2}}$ 取得极大值. 那么对充分大的 v , 当 $n_0 \leq n < n'_v$, 由于 $n_0 \leq n < n'_v < n_v'^{1+\frac{\gamma}{2}}$,

$$\begin{aligned} B_n^* e^{n\sigma'_v} &< \exp\left\{-\frac{1}{\rho+\varepsilon}n \ln n + n\sigma'_v\right\} \\ &\leq \exp\left\{-\frac{1}{\rho+\varepsilon}n'_v \ln n'_v + n'_v \sigma'_v\right\} \\ &= \exp\left\{e^{\frac{\rho+\varepsilon}{1+\frac{\gamma}{2}}\sigma'_v} * e^{-\frac{1}{1+\frac{\gamma}{2}}\left[\frac{1}{(\rho+\varepsilon)(1+\frac{\gamma}{2})} + \frac{\gamma}{2+\gamma}\sigma'_v\right]}\right\} \\ &= \exp\left\{e^{\frac{\rho+\varepsilon}{1+\frac{\gamma}{2}}\sigma'_v + \ln(e^{-\frac{1}{1+\frac{\gamma}{2}}\left[\frac{1}{(\rho+\varepsilon)(1+\frac{\gamma}{2})} + \frac{\gamma}{2+\gamma}\sigma'_v\right]})}\right\} \\ &< \exp\left\{e^{\frac{\rho+2\varepsilon}{1+\frac{\gamma}{2}}\sigma'_v}\right\} < \exp\{e^{(\rho-\eta)\sigma'_v}\} \quad (n_0 \leq n < n'_v). \end{aligned} \quad (2.2)$$

当 $n > n''_v$ 时, 由于 $n_v'^{1+\frac{\gamma}{2}} < n_v'^{1+\gamma} < n''_v < n$, 那么

$$\begin{aligned} B_n^* e^{n\sigma'_v} &< \exp\left(-\frac{1}{\rho+\varepsilon}n_v'^{1+\gamma} \ln n_v'^{1+\gamma} + n_v'^{1+\gamma} \sigma'_v\right) \\ &= \exp\left\{e^{\frac{(\rho+\varepsilon)(1+\gamma)}{1+\frac{\gamma}{2}}\sigma'_v} * e^{-\frac{(1+\gamma)}{1+\frac{\gamma}{2}}\left[\frac{\gamma}{2+\gamma}(-\sigma'_v) + \frac{(1+\gamma)}{(\rho+\varepsilon)(1+\frac{\gamma}{2})}\right]}\right\} < 1 \quad (n > n''_v). \end{aligned} \quad (2.3)$$

最后一个不等号成立是因为

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\gamma}{2+\gamma}(-\sigma'_v) + \frac{(1+\gamma)}{(\rho+\varepsilon)(1+\frac{\gamma}{2})} \right\} = -\infty.$$

结合 (2.1)–(2.3) 式得

$$B_n^* e^{n\sigma'_v} < \exp(e^{(\rho-\eta_1)\sigma'_v}) \quad (n \geq n_0)$$

其中 $\eta_1 = \max\{\eta, \frac{\beta}{2}\}$, 那么存在常数 c , 使得 $\forall n \in N$, 当 v 充分大时

$$B_n^* e^{n\sigma'_v} < c \exp(e^{(\rho-\eta_1)\sigma'_v}) < \exp(e^{(\rho-\frac{\eta_1}{2})\sigma'_v}),$$

所以

$$\mu(\sigma'_v, F) \leq \exp(e^{(\rho-\frac{\eta_1}{2})\sigma'_v}).$$

取常数 $\delta > 0$, 令 $\sigma_{v\delta} = \sigma'_v - \delta$, 则 $\lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{\sigma'_v}{\sigma_{v\delta}} = 1$, 那么对 δ , 由引理 1 知, $\exists C > 0$, 使得当 v 充分大时,

$$\begin{aligned} M_u(\sigma_{v\delta}, F) &\leq C e^{|\sigma_{v\delta}|} \mu(\sigma_{v\delta} + \delta, F) \\ &\leq C \exp\{e^{(\rho-\frac{\eta_1}{2})\sigma'_v} + \sigma_{v\delta}\} < \exp\{e^{(\rho-\frac{\eta_1}{3})\sigma'_v}\}. \end{aligned}$$

则有

$$\frac{\ln \ln M_u(\sigma_{v\delta}, F)}{\sigma_{v\delta}} < \left(\rho - \frac{\eta_1}{3}\right) \frac{\sigma'_v}{\sigma_{v\delta}}.$$

那么有

$$\overline{\lim}_{v \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M_u(\sigma_{v\delta}, F)}{\sigma_{v\delta}} \leq \left(\rho - \frac{\eta_1}{3}\right) \overline{\lim}_{v \rightarrow +\infty} \frac{\sigma'_v}{\sigma_{v\delta}} = \left(\rho - \frac{\eta_1}{3}\right) < \rho.$$

这与定理左边的条件矛盾. 从而定理右边条件的第二个条件的必要性得证.

同理可证当 $\rho = 0$ 和 $\rho = +\infty$ 的情形.

参 考 文 献

- [1] 余家荣. Laplace-Stieltjes 变换所定义的整函数之 Borel 线 [J]. 数学学报, 1963, 13(3): 471–484.
- [2] 余家荣. 随机狄里克莱级数的一些性质 [J]. 数学学报, 1978, 21(2): 97–118.
- [3] 余家荣, 丁晓庆, 田范基. Dirichlet 级数与随机 Dirichlet 级数的值分布 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2004.
- [4] 余家荣. Dirichlet 级数和随机 Dirichlet 级数 [M]. 北京: 科学出版社, 1997.
- [5] 高宗升, 孙道椿. 关于 Taylor 级数的正规增长性 [J]. 数学物理学报, 1997, 17(1): 111–120.
- [6] 孙道椿, 高宗升. 半平面上 Dirichlet 级数的增长性 [J]. 数学物理学报, 2002, 22A(4): 557–563.
- [7] 刘名生. 半平面上有限级 Dirichlet 级数的正规增长 [J]. 系统科学与数学, 2002, 22(2): 229–238.
- [8] 孔荫莹, 甘会林. On orders and types of Dirichlet series of slow growth[J]. Tuek J. Math., 2009, 33: 1–11.
- [9] Valiron G. Entire function and Borel's directions[J]. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1934, 20: 211–215.
- [10] 罗茜, 孙道椿. 与右半平面上解析的 Laplace-Stieltjes 变换相关联的变换 [J]. 数学物理学报, 2007, 27A(1): 74–78.
- [11] Kong Yinying, Sun Daochun. On the growth of zero order Laplace-Stieltjes transform convergent in the right half plane[J]. Acta Mathematica Scientia, 2008, 28B(2): 431–440.
- [12] Knopp K. Über de Konvergenzabszisse des Laplace-Integrals[J]. Math. Z., 1951, 54: 291–296.

THE REGULAR GROWTH OF LAPLACE-STIELTJES
TRANSFORMSLUO Xi ¹, LIU Xing-zhen ², KONG Yin-ying ³

(1. School of Mathematics, Jiaying University, Meizhou 514015, China)

(2. School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University,
Guangzhou 510006, China)(3. School of Mathematics and Computational Science, Guangdong University of Finance &
Economics, Guangzhou 510320, China)

Abstract: In the paper, we study the relationships between Dirichlet series and Laplace-Stieltjes transforms, some results about regular growth of Dirichlet series, which are obtained by the method of Knopp-Kojima. By using Dirichlet series and Laplace-Stieltjes transforms, the equivalent conditions of the regular growth order on the whole plane are obtained, and the results about regular growth of Dirichlet series are generalized.

Keywords: L-S transforms; order; regular growth

2010 MR Subject Classification: 30D35