

半凸多目标优化 ε - 拟弱有效解的最优性条件及对偶定理

张从军¹, 陈毅平¹, 周光辉²

(1. 南京财经大学应用数学学院, 江苏 南京 210046)

(2. 淮北师范大学数学科学学院, 安徽 淮北 235000)

摘要: 本文在相关文献考虑 MP 问题的基础上, 增加了等式约束条件, 即本文考虑了 VP 问题, 并将已有文献中的凸性假设改为半凸性假设, 得到 VP 问题的 ε - 拟弱有效解的相应最优性条件. 接着, 本文定义了 VP 问题的拉格朗日函数及其 ε - 拟弱鞍点, 得到 VP 问题的 ε - 拟弱鞍点相应定理. 最后, 本文考虑了 VP 问题的对偶问题, 获得了 VP 问题的弱对偶和强对偶定理.

关键词: 多目标优化; ε - 拟弱有效解; 最优性条件; 半凸函数; 对偶定理

MR(2010) 主题分类号: 90C29; 90C46

中图分类号: O221.6

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2014)06-1141-08

1 引言与相关引理

目标优化作为最优化理论和应用的重要分支, 其理论研究涉及到凸分析、非光滑分析、非线性分析等学科, 同时, 它在国民生活中的众多领域均有着重要应用. 我们知道, 多目标优化问题的有效解在非紧条件下往往不存在, 在实际应用数值方法求解优化问题时, 所得到的解常常是近似解, 而且近似解在很弱的情况下都可能存在. 故研究多目标优化问题的近似解更加符合实际应用和理论研究的需要. 近些年, 众多学者对此类问题开展了深入的研究, 获得了丰富的成果^[1-10].

本文中我们考虑如下带一般约束的多目标优化问题:

$$(\text{VP}) \quad \begin{cases} \min & f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))^T, \\ \text{s.t.} & h(x) = (h_1(x), h_2(x), \dots, h_m(x))^T \leq 0, \\ & g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_l(x))^T = 0, \\ & x \in X, \end{cases}$$

其中 $X \subset R^n$ 是非空开集, $f_i, h_j, g_t : R^n \rightarrow R (i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, m, t = 1, \dots, l)$ 是 X 上的局部 Lipschitz 连续函数. 问题 (VP) 的可行集记为 $S = \{x \in X : h(x) \leq 0, g(x) = 0\}$, $I(x) = \{j \in \{1, \dots, m\} : h_j(x) = 0\}$.

设 R^n 是 n 维欧氏空间, 记 $R_+^n = \{x \in R^n : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$, $\text{int}R_+^n = \{x \in R^n : x_i > 0, i = 1, \dots, n\}$. 定义 R^n 中的序关系:

$$x < y \Leftrightarrow y - x \in \text{int}R_+^n, \quad x \leq y \Leftrightarrow y - x \in R_+^n.$$

*收稿日期: 2012-11-23 接收日期: 2013-01-04

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11071109).

作者简介: 张从军 (1957-), 男, 安徽淮北, 教授, 主要研究方向: 非线性分析与经济应用.

设 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)^T \in R_+^k$, 以下是 ε - 拟弱有效解的概念.

定义 1.1 ^[4] 称 $\bar{x} \in S$ 为问题 (VP) 的 ε - 拟弱有效解, 如果

$$f(S) - f(\bar{x}) + \varepsilon \|x - \bar{x}\| \bigcap (-\text{int} R_+^k) = \emptyset.$$

若 $\varepsilon = 0$, 则以上定义退化为问题 (VP) 的弱有效解.

定义 1.2 ^[5] $f(x) : R^n \rightarrow R$ 在点 $\bar{x}$ 处是 Lipschitz 的, 则 $f(x)$ 在点 $\bar{x}$ 处沿方向 $d \in R^n$ 的 Clarke 方向导数、Clarke 广义方向导数、Clarke 广义次梯度分别定义为如下形式:

$$\begin{aligned} f'(\bar{x}, d) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(\bar{x} + td) - f(\bar{x})}{t}, \\ f^\circ(\bar{x}, d) &= \limsup_{t \downarrow 0, y \rightarrow x} \frac{f(y + td) - f(y)}{t} \\ &= \limsup_{\delta \downarrow 0} \left\{ \frac{f(y + td) - f(y)}{t} \mid 0 < t < \delta, \|y - x\| < \delta \right\}, \\ \partial f(\bar{x}) &= \{ \xi \in R^n \mid f^\circ(\bar{x}, d) \geq \langle \xi, d \rangle, \forall d \in R^n \}. \end{aligned}$$

定义 1.3 ^[6] 称 $f(x)$ 在点 x 处是正则的, 如果满足: 对任意 $d \in R^n$, 有 $f'(x, d)$ 存在, 并且 $f'(x, d) = f^\circ(x, d)$.

定义 1.4 ^[7] 对任意给定的 $\varepsilon \geq 0$, 称函数 $\varphi \rightarrow R$ 在集合 X 上是 ε - 凸函数, 如果对所有的 $x, y \in K$ 和 $\lambda \in (0, 1)$, 有

$$\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y) + \varepsilon \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|.$$

定义 1.5 ^[8] 称函数 $f : X \rightarrow R$ 在 $x \in K$ 处是 ε - 半凸的, 对 $\emptyset \neq K \subset X, \varepsilon > 0$, 如果下列条件成立:

- i) f 在点 x 的球形邻域内是 Lipschitz 的;
- ii) 对任意 $d \in X$, 有 $f'(x, d)$ 存在, 且满足 $0 \leq f^\circ(x, d) - f'(x, d) \leq \sqrt{\varepsilon} \|d\|$;
- iii) 由 $x + d \in K$ 和 $f'(x, d) + \sqrt{\varepsilon} \|d\| \geq 0$ 可推出 $f(x + d) + \sqrt{\varepsilon} \|d\| \geq f(x)$ 成立.

引理 1.1 ^[4] 如果 $\bar{x} \in S$ 是问题 (VP) 的一个 ε - 拟弱有效解, 则 $\bar{x}$ 是如下向量优化问题的弱有效解.

$$(\text{VP1}) \quad \min_{x \in S} f(x) + \varepsilon \|x - \bar{x}\|.$$

引理 1.2 ^[9] 设 X 是 Asplund 空间, $f_i : X \rightarrow \bar{R}, i = 1, 2$ 是下半连续函数且其中一个函数在 $\bar{x}$ 处是局部 Lipschitz 的, 则有如下关系成立:

$$\partial(f_1 + f_2)(\bar{x}) \subset \partial f_1(\bar{x}) + \partial f_2(\bar{x}).$$

受文献 [4] 等工作的启发, 我们在相关文献考虑 MP 问题的基础上, 增加了等式约束条件, 即本文考虑的 VP 问题, 并将文献 [4] 中定理 3.1、定理 3.2 中的凸性假设改为半凸性假设, 得到 VP 问题 ε - 拟弱有效解的相应最优性条件 (见本文定理 2.1 和定理 2.2).

类似的, 我们定义了 VP 问题的拉格朗日函数及其 ε - 拟弱鞍点, 得到 VP 问题 ε - 拟弱鞍点的相应定理 (见本文定理 3.1 和定理 3.2). 接着, 我们定义了 VP 问题的对偶问题 VD 问题, 得到 VP 问题的弱对偶和强对偶定理 (见本文定理 3.3 和定理 3.4).

2 最优性条件

定理 2.1 设存在 $\bar{x} \in S$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)^T \in R_+^k \setminus \{0\}$, 使得

- i) $\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i$ 在 $\bar{x}$ 处是 $(\lambda^T \varepsilon)^2$ -半凸;
 ii) $\sum_{i=1}^k \lambda_i f'_i(\bar{x}, x - \bar{x}) + \lambda^T \varepsilon \|x - \bar{x}\| \geq 0, \quad \forall x \in S,$

那么 $\bar{x}$ 是问题 (VP) 的 ε -拟弱有效解.

证 由条件 ii) 和 i), 可得

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x) + \lambda^T \varepsilon \|x - \bar{x}\| \geq \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(\bar{x}), \quad \forall x \in S. \quad (2.1)$$

假设 $\bar{x}$ 不是问题 (VP) 的 ε -拟弱有效解. 那么存在 $\hat{x} \in S$ 使得

$$f(\hat{x}) - f(\bar{x}) + \varepsilon \|\hat{x} - \bar{x}\| \in -\text{int} R_+^k.$$

因此, 由 $\lambda \in R_+^k \setminus \{0\}$, 可得

$$\lambda^T f(\hat{x}) + \lambda^T \varepsilon \|\hat{x} - \bar{x}\| \in \lambda^T f(\bar{x}).$$

这与 (2.1) 式矛盾. 因此, $\bar{x}$ 是问题 (VP) 的 ε -拟弱有效解.

定理 2.2 假设 $f_i, h_j, v_t (i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, m; t = 1, \dots, l)$ 在 $\bar{x} \in S$ 处是正则的, 并且满足

$$\sum_{i=1}^k \bar{\lambda}_i f_i + \sum_{j=1}^m \bar{u}_j h_j + \sum_{t=1}^l \bar{v}_t g_t$$

在 $\bar{x}$ 处是 $(\lambda^T \varepsilon)^2$ -半凸的, 则 $\bar{x}$ 是问题 (VP) 的 ε -拟弱有效解当且仅当存在 $\lambda \in R_+^k \setminus \{0\}$, $\mu \in R_+^m, v \in R_+^l$, 使得

- i) $0 \in \sum_{i=1}^k \lambda_i \partial f_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m \mu_j \partial h_j(\bar{x}) + \sum_{t=1}^l v_t \partial g_t(\bar{x}) + \lambda^T \varepsilon B^*$;
 ii) $\sum_{j=1}^m \mu_j h_j(\bar{x}) = 0$;
 iii) $\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i + \sum_{j=1}^m \mu_j h_j + \sum_{t=1}^l v_t g_t$ 在 $\bar{x}$ 处是 $(\lambda^T \varepsilon)^2$ -半凸,

这里 B^* 是 R^n 中的单位球.

证 ($\Rightarrow$) 由引理 1.1 可知, $\bar{x}$ 是问题 (VP1) 的弱有效解. 利用 Fritz-John 型必要性条件可知, 存在 $\lambda \in R_+^k$ 和 $u \in R_+^m, v \in R_+^l$ 使得

$$0 \in \sum_{i=1}^k \lambda_i \partial(f_i(\bar{x}) + \varepsilon_i \|x - \bar{x}\|) + \sum_{j=1}^m u_j \partial h_j(\bar{x}) + \sum_{t=1}^l v_t \partial g_t(\bar{x}),$$

$$\sum_{j=1}^m u_j h_j(\bar{x}) = 0.$$

由引理 1.2 有

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \partial(f_i(\bar{x}) + \varepsilon_i \|x - \bar{x}\|) \subseteq \sum_{i=1}^k \lambda_i \partial f_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \partial \varepsilon_i \|x - \bar{x}\|.$$

故

$$0 \in \sum_{i=1}^k \lambda_i \partial f_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m u_j \partial h_j(\bar{x}) + \sum_{t=1}^l v_t \partial g_t(\bar{x}) + \lambda^T \varepsilon B^*.$$

($\Leftarrow$) 由 i) 知, 存在

$$x_i^* \in \partial f_i(\bar{x}), y_j^* \in \partial h_j(\bar{x}), z_t^* \in \partial g_t(\bar{x}), b^* \in B^*,$$

其中 $i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, m; t = 1, \dots, l$, 使得

$$0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i^* + \sum_{j=1}^m \mu_j y_j^* + \sum_{t=1}^l v_t z_t^* + \lambda^T \varepsilon b^*.$$

由 Clarke 方向导数的性质和定理 2.2 的假设, 可知

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i + \sum_{j=1}^m \mu_j h_j + \sum_{t=1}^l v_t g_t \right)'(\bar{x}, d) &= \sum_{i=1}^k \lambda_i f'_i(\bar{x}, d) + \sum_{j=1}^m \mu_j h'_j(\bar{x}, d) + \sum_{t=1}^l v_t g'_t(\bar{x}, d) \\ &= \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i^\circ(\bar{x}, d) + \sum_{j=1}^m \mu_j h_j^\circ(\bar{x}, d) + \sum_{t=1}^l v_t g_t^\circ(\bar{x}, d) \\ &\geq \sum_{i=1}^k \lambda_i \langle x_i^*, d \rangle + \sum_{j=1}^m \mu_j \langle y_j^*, d \rangle + \sum_{t=1}^l v_t \langle z_t^*, d \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i^* + \sum_{j=1}^m \mu_j y_j^* + \sum_{t=1}^l v_t z_t^*, d \right\rangle \\ &= \langle -\lambda^T \varepsilon b^*, d \rangle = -\lambda^T \varepsilon \langle b^*, d \rangle \geq -\lambda^T \varepsilon \|d\|. \end{aligned}$$

即成立

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i + \sum_{j=1}^m \mu_j h_j + \sum_{t=1}^l v_t g_t \right)'(\bar{x}, d) + \lambda^T \varepsilon \|d\| \geq 0.$$

由 $\sum_{i=1}^k \bar{\lambda}_i f_i + \sum_{j=1}^m \bar{\mu}_j h_j + \sum_{t=1}^l \bar{v}_t g_t$ 在 $\bar{x}$ 处是 $(\lambda^T \varepsilon)^2$ -半凸的, 取 $d = x - \bar{x}, x \in X$, 可得

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x) + \sum_{j=1}^m \mu_j h_j(x) + \sum_{t=1}^l v_t g_t(x) + \lambda^T \varepsilon \|x - \bar{x}\| \\ &\geq \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m \mu_j h_j(\bar{x}) + \sum_{t=1}^l v_t g_t(\bar{x}). \end{aligned}$$

由 ii) 及 $\sum_{t=1}^l v_t g_t(\bar{x}) = 0$, 得

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x) + \sum_{j=1}^m \mu_j h_j(x) + \sum_{t=1}^l v_t g_t(x) + \lambda^T \varepsilon \|x - \bar{x}\| \geq \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(\bar{x}).$$

又由于

$$\sum_{j=1}^m \mu_j h_j(x) \leq 0, \quad \sum_{t=1}^l v_t g_t(x) = 0, \quad \forall x \in S,$$

从而

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x) + \lambda^T \varepsilon \|x - \bar{x}\| \geq \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(\bar{x}), \quad \forall x \in S,$$

即 $\bar{x}$ 是问题 (VP) 的 ε -拟弱有效解.

3 ε -拟弱鞍点及拉格朗日对偶

定义 3.1 设 $e = (1, \dots, 1)^T \in R^k$. 对任意的 $x \in X$ 和 $u \in R_+^m, v \in R_+^l$, 定义拉格朗日函数形式如下

$$L(x, u, v) = f(x) + [u^T h(x) + v^T g(x)]e.$$

定义 3.2 称 $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) \in X \times R_+^m \times R_+^l$ 是拉格朗日函数的 ε -拟弱鞍点, 如果

$$\begin{aligned} L(\bar{x}, u, v) - \varepsilon \|u - \bar{u}\| - \varepsilon \|v - \bar{v}\| &\leq L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}), & \forall u \in R_+^m, v \in R_+^l, \\ L(x, \bar{u}, \bar{v}) + \varepsilon \|x - \bar{x}\| - L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) &\notin -\text{int} R_+^k, & \forall x \in X. \end{aligned}$$

注 若 $\varepsilon = 0$, ε -拟弱鞍点退化到文 [10] 中研究的广义拉格朗日鞍点.

定理 3.1 设 $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) \in X \times R_+^m \times R_+^l$ 是 ε -拟弱鞍点, $\bar{x}$ 是问题

$$\max_{x \in X} \bar{u}^T h(x), \quad \max_{x \in X} \bar{v}^T g(x)$$

的最优解, 则 $\bar{x}$ 是问题 (VP) 的 ε -拟弱有效解.

证 由 ε -拟弱鞍点的定义可得, 对任意 $x \in X$, 有

$$\left(f(x) - f(\bar{x}) + \varepsilon \|x - \bar{x}\| + \bar{u}^T (h(x) - h(\bar{x}))e + \bar{v}^T (g(x) - g(\bar{x}))e \right) \cap \left(-\text{int} R_+^k \right) = \emptyset.$$

再由 $\bar{x}$ 是问题 $\max_{x \in X} \bar{u}^T h(x), \max_{x \in X} \bar{v}^T g(x)$ 的最优解可知, 对任意 $x \in X$, 有

$$\begin{aligned} \bar{u}^T (h(x) - h(\bar{x}))e &\leq 0, \\ \bar{v}^T (g(x) - g(\bar{x}))e &\leq 0, \\ 0 &\leq f(x) - f(\bar{x}) + \varepsilon \|x - \bar{x}\| + \bar{u}^T (h(x) - h(\bar{x}))e + \bar{v}^T (g(x) - g(\bar{x}))e \\ &\leq f(x) - f(\bar{x}) + \varepsilon \|x - \bar{x}\|, \end{aligned}$$

故

$$(f(x) - f(\bar{x}) + \varepsilon \|x - \bar{x}\|) \cap (-\text{int} R_+^k) = \emptyset,$$

因此结论成立.

定理 3.2 设 $\bar{x}$ 是问题 (VP) 的 ε -拟弱有效解. 若定理 2.2 中的假设条件成立, 则存在 $\bar{u} \in R_+^m, \bar{v} \in R_+^l$ 使得 $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ 是 ε -拟弱鞍点.

证 由定理 2.2, 存在 $\bar{\lambda} \in R_+^k$ 和 $\bar{u} \in R_+^m$ 和 $\bar{v} \in R_+^l$, 使得

$$0 \in \sum_{i=1}^k \bar{\lambda}_i \partial f_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m \bar{u}_j \partial h_j(\bar{x}) + \sum_{t=1}^l \bar{v}_t \partial g_t(\bar{x}) + \varepsilon^T \bar{\lambda} B^*, \quad (3.1)$$

$$\sum_{j=1}^m \bar{u}_j h_j(\bar{x}) = 0. \quad (3.2)$$

易证

$$L(\bar{x}, u, v) - \varepsilon \|u - \bar{u}\| - \varepsilon \|v - \bar{v}\| \leq L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}), \quad \forall u \in R_+^m, v \in R_+^l.$$

下面证明

$$L(x, \bar{u}, \bar{v}) + \varepsilon \|x - \bar{x}\| - L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) \notin -\text{int} R_+^k, \quad \forall x \in X.$$

假设不成立, 则存在 $x \in X$ 使得

$$f(\bar{x}) + \bar{u}^T h(\bar{x})e + \bar{v}^T g(\bar{x})e > f(x) + \bar{u}^T h(x)e + \bar{v}^T g(x)e + \varepsilon \|x - \bar{x}\|,$$

即

$$f(x) - f(\bar{x}) + \bar{u}^T (h(x) - h(\bar{x}))e + \bar{v}^T (g(x) - g(\bar{x}))e + \varepsilon \|x - \bar{x}\| < 0.$$

结合 $\sum_{i=1}^k \bar{\lambda}_i = 1$ 有

$$\sum_{i=1}^k \bar{\lambda}_i (f_i(x) - f_i(\bar{x})) + \sum_{j=1}^m \bar{u}_j^T (h_j(x) - h_j(\bar{x})) + \sum_{t=1}^l \bar{v}_t^T (g_t(x) - g_t(\bar{x})) + \varepsilon^T \bar{\lambda} \|x - \bar{x}\| < 0. \quad (3.3)$$

再由定理 2.2 中的假设条件: $f_i, h_j, v_t (i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, m; t = 1, \dots, l)$ 在 $\bar{x} \in S$ 处是正则的, 和

$$\sum_{i=1}^k \bar{\lambda}_i f_i + \sum_{j=1}^m \bar{u}_j h_j + \sum_{t=1}^l \bar{v}_t g_t$$

在 $\bar{x}$ 处是 $(\lambda^T \varepsilon)^2$ -半凸的, 类似定理 2.2 的证明可得到

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k \bar{\lambda}_i f_i(x) + \sum_{j=1}^m \bar{u}_j h_j(x) + \sum_{t=1}^l \bar{v}_t g_t(x) + \bar{\lambda}^T \varepsilon \|x - \bar{x}\| \\ & \geq \sum_{i=1}^k \bar{\lambda}_i f_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m \bar{u}_j h_j(\bar{x}) + \sum_{t=1}^l \bar{v}_t g_t(\bar{x}), \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

这与式 (3.3) 矛盾, 因此结论成立.

下面我们考虑 (VP) 的 ε 拉格朗日对偶问题.

对 $u \in R^m, v \in R^l$ 考虑如下问题

$$(\mathbf{VP})_{(u,v)} \quad \begin{cases} \min & L(x, u, v), \\ \text{s.t.} & x \in S. \end{cases}$$

设 $W(u, v)$ 为问题 $(\mathbf{VP})_{(u,v)}$ 的所有 ε -拟弱有效解的集合. 并设 $\Omega_w(u, v) = \{L(x, u, v) : x \in W(u, v)\}$. 下面考虑如下形式的对偶问题

$$(\mathbf{VD}) \quad \begin{cases} \max & \Omega_w(u, v), \\ \text{s.t.} & u \in R_+^m, v \in R_+^l. \end{cases}$$

定理 3.3 (弱对偶定理) 设 x 是问题 (VP) 的任意可行点,

$$\bar{y} \in \bigcup_{u \in R_+^m, v \in R_+^l} \Omega_w(u, v),$$

即存在 $\bar{u} \in R_+^m, \bar{v} \in R_+^l$ 和 $\bar{x} \in W(\bar{u}, \bar{v})$, 使得 $\bar{y} = L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$, 则

$$(f(x) + \varepsilon \|x - \bar{x}\| - \bar{y}) \bigcap (-\text{int} R_+^k) = \emptyset.$$

证 由 $\bar{x} \in W(\bar{u}, \bar{v})$ 可知, 不存在 $\hat{x} \in S$ 使得

$$L(\hat{x}, \bar{u}, \bar{v}) + \varepsilon \|\hat{x} - \bar{x}\| < L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) = \bar{y}.$$

由于 $\bar{u} \in R_+^m, \bar{v} \in R_+^l, h(\hat{x}) \leq 0, g(\hat{x}) = 0$, 故不存在 $\hat{x} \in S$ 使得

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &< L(\hat{x}, \bar{u}, \bar{v}) = f(\hat{x}) + [\bar{u}^T h(\hat{x}) + \bar{v}^T g(\hat{x})] e, \\ f(\hat{x}) + \varepsilon \|\hat{x} - \bar{x}\| &< L(\hat{x}, \bar{u}, \bar{v}) + \varepsilon \|\hat{x} - \bar{x}\| < \bar{y}. \end{aligned}$$

故 $f(\hat{x}) + \varepsilon \|\hat{x} - \bar{x}\| < \bar{y}$, 因此结论成立.

定理 3.4 (强对偶定理) 设 $\bar{x}$ 是问题 (VP) 的 ε -拟弱有效解. 定理 2.2 中的条件成立. 则存在 $\bar{u} \in R_+^m, \bar{v} \in R_+^l$, 使得 $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ 是问题 (VD) 的 ε -拟弱有效解.

证 由定理 3.2 可知, 存在 $\bar{u} \in R_+^m, \bar{v} \in R_+^l$ 使得 $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ 是 $L(x, u, v)$ 的 ε -拟弱鞍点, 且 $\sum_{j=1}^m \bar{u}_j h_j(\bar{x}) = 0$.

下面证明 $\bar{x}$ 是问题 $(\mathbf{VP})_{(\bar{u}, \bar{v})}$ 的 ε -拟弱有效解. 若不然, 存在 $\hat{x} \in S$ 使得

$$L(\hat{x}, \bar{u}, \bar{v}) + \varepsilon \|\hat{x} - \bar{x}\| < L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}).$$

这与 ε -拟弱鞍点的定义矛盾.

下面用反证法证明结论. 假设 $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ 不是问题 (VD) 的 ε -拟弱有效解, 则存在 $\hat{u} \in R_+^m, \hat{v} \in R_+^l, \hat{x} \in W(\hat{u}, \hat{v})$ 和 $\hat{y} \in \Omega_w(\hat{u}, \hat{v})$ 使得

$$L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) + \varepsilon \|(\bar{u}, \bar{v}, \bar{x}) - (\hat{u}, \hat{v}, \hat{x})\| < L(\hat{x}, \hat{u}, \hat{v}) = \hat{y}.$$

因此 $L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) + \varepsilon \|\bar{x} - \hat{x}\| < L(\hat{x}, \hat{u}, \hat{v}) = \hat{y}$. 由 $\sum_{j=1}^m \bar{u}_j h_j(\bar{x}) = 0, \sum_{t=1}^l \bar{v}_t g_t(\bar{x}) = 0$, 可得 $f(\bar{x}) + \varepsilon \|\bar{x} - \hat{x}\| < \hat{y}$. 这与定理 3.3 矛盾.

参 考 文 献

- [1] Gutierrez C, Jimenez B, Novo V. Optimality conditions via scalarization for a new ϵ -efficiency concept in vector optimization problems[J]. European J. Oper. Research, 2009, 192: 1–12.
- [2] Beldiman M, Panaitescu E, Dogaru L. Approximate quasi efficient solutions in multiobjective optimization[J]. Numerical Functional Anal. Opti., 2008, 29: 532–550.
- [3] Gao Y and Rong W D. Optimality conditions and duality for a class of nondifferentiable Multiobjective generalized fractional programming problems[J]. Appl. Math. J. Chinese Univ., 2008, 23: 331–344.
- [4] 高英. 多目标优化 ϵ - 拟弱有效解的最优性条件 [J]. 应用数学学报, 2010, 33(6): 1061–1071.
- [5] 邱根胜, 王自果. 半凸多目标规划解的充要条件 [J]. 工程数学学报, 1998, 15(3): 47–51.
- [6] 李峰. 半凸多目标规划的最优性条件及对偶理论 [J]. 吉林工业大学自然科学学报, 2000, 30(1): 57–62.
- [7] Jofre A, Luc D T, Thera M. ϵ -subdifferential calculus for nonconvex functions and ϵ -monotonicity[J]. Comptes Rendus de l'Academie des Science, 1996, 323: 735–740.
- [8] Huang L G. The tangent cones on constraint qualifications in optimization problems[J]. Acta Math. Scientia, 2008, 28: 843–850.
- [9] Mordukhovich B, Shao Y. Nonsmooth sequential analysis in Asplund spaces[J]. Trans. American Math. Soc., 1996, 348: 1235–1280.
- [10] Xu Z.K. On multiple criteria fractional programming problem[J]. J. Sys. Sci. Math. Sci., 1994, 14: 199–208.

OPTIMALITY CONDITIONS AND DUALITY THEOREM FOR ϵ -QUASI WEAKLY EFFICIENT SOLUTION IN SEMI-CONVEX MULTI-OBJECTIVE OPTIMIZATION PROBLEMS

ZHANG Cong-jun¹, CHEN Yi-ping¹, ZHOU Guang-hui²

(1.School of Applied Mathematics, Nanjing University of Finance and Economics,
Nanjing 210046, China)

(2.School of Mathematical Sciences, Huaibei Normal University,
Huaibei 235000, China)

Abstract: We consider the VP problem in this paper. By comparing with MP problems in existing literature, we add the equality constraints and change the convex assumptions into semi-convex ones. The optimal conditions for ϵ -quasi weakly efficient solution for VP problem are obtained. Further, we define the Lagrange function and ϵ -quasi weakly saddle points of the VP problem and obtain corresponding theorems. Finally we consider the duality of the VP problem and obtain its weak duality and strong duality theorems.

Keywords: multi-objective optimization; ϵ -quasi weakly efficient solution; optimality conditions; semi-convex function; duality theorems

2010 MR Subject Classification: 90C29; 90C46