

三角范畴和 Abel 范畴的 Torsion 理论

林 记, 姚云飞

(阜阳师范学院数学与计算科学学院, 安徽 阜阳 236037)

摘 要: 本文主要研究了三角范畴在 Abel 化过程中 torsion 理论的保持问题. 利用三角范畴的 coherent 函子范畴是 Abel 范畴, 证明了 $\mathcal{T}$ 的 coherent 函子范畴 $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ 是 $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ 的 thick 子范畴; 若 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是 $\mathcal{D}$ 的 torsion 理论, 且 $\mathcal{D} = \mathcal{X} * \mathcal{Y}$ 的扩张是可裂的, 那么 $(\mathcal{A}(\mathcal{X}), \mathcal{A}(\mathcal{Y}))$ 是 $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ 的 torsion 理论.

关键词: 三角范畴; coherent 函子范畴; thick 子范畴; torsion 理论

MR(2010) 主题分类号: 18E10; 18E30; 18E35

中图分类号: O154.1

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2014)06-1134-07

1 引言

Torsion 理论是代数表示论研究的基本对象之一, 也是代数学其他分支, 如几何和拓扑等学科, 研究的基本工具之一. Torsion 理论在三角范畴的理论研究中起着重要的作用, 三角范畴的 Torsion 理论和 t -结构, 倾斜理论有着密切关系. 上世纪六十年代 Dickson^[1] 将 Abel 群的 Torsion 理论推广到一般的 Abel 范畴. 文章主要研究了由已知三角范畴通过 coherent 函子范畴构造 Abel 范畴时, 三角范畴的 Torsion 理论和新的 Abel 范畴的 Torsion 理论之间的关系.

Auslander 等^[2-4] 于上世纪八十年代引入反变有限子范畴和共变有限子范畴的概念, 由此解决了模范畴的子范畴上几乎可裂序列的存在性问题, 他们在确定代数的表示型以及范畴的倾斜理论方面起着重要作用. Thick 子范畴是同伦范畴, 交换代数和群表示论的重要研究基础, 文章研究了三角范畴 Abel 化过程中, 具有好性质的子范畴的保持问题.

下面定理是我们的主要结果之一:

定理 1.1 设 $\mathcal{D}$ 是三角范畴, $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{D}$ 的满子范畴. 如果 $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{D}$ 的反变有限子范畴, 并且 $\mathcal{T}$ 对有限直和封闭, 那么 $\mathcal{T}$ 的 coherent 函子范畴 $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ 是 $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ 的 thick 子范畴.

进一步地, 我们考虑三角范畴 $\mathcal{D}$ 的 Torsion 理论与 $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ 的 Torsion 理论, 得到下面结果:

定理 1.2 设 $\mathcal{D}$ 是三角范畴, 其 Torsion 理论记为 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, 如果 $\mathcal{D} = \mathcal{X} * \mathcal{Y}$ 的扩张是可裂的, 那么 $(\mathcal{A}(\mathcal{X}), \mathcal{A}(\mathcal{Y}))$ 是 $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ 的 coherent 函子范畴 $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ 的 Torsion 理论.

2 预备知识

*收稿日期: 2013-10-08

接收日期: 2013-12-03

基金项目: 国家级特色专业“数学与应用数学”建设项目 (TS11496); 阜阳师范学院精品开放课程 (2012KFKC10); 阜阳师范学院自然科学研究项目 (2013FSKJ07); 阜阳师范学院自然科学研究项目 (2013FSKJ13); 安徽省高等学校优秀青年人才基金项目 (2012SQRL115ZD) 资助.

作者简介: 林记 (1981-), 女, 四川自贡, 讲师, 主要研究方向: 代数表示论.

文中我们假定 $\mathcal{C}$ 是加法范畴, $\mathcal{D}$ 是三角范畴. 在本节中, 我们回忆一些将要用到的定义和结论.

定义 2.1 ^[2] 设 $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{C}$ 的满子范畴. 若对任意 $X \in \mathcal{C}$, 存在右 $\mathcal{T}$ -逼近, 即存在 $M \in \mathcal{T}$ 和态射 $\alpha: M \rightarrow X$, 满足对任意 $T_1 \in \mathcal{T}$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T_1, \alpha): \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T_1, M) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T_1, X)$ 是满射, 则称 $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{C}$ 的反变有限子范畴.

考虑 $\mathcal{C}^{\text{op}}$ 到 Abel 群的函子, 如果对任意 $X \in \mathcal{C}$ 都有 Abel 群的正合列 $F'X \rightarrow FX \rightarrow F''X$, 那么我们称函子序列 $F' \rightarrow F \rightarrow F''$ 是正合的. 下面给出加法范畴 $\mathcal{C}$ 的 coherent 函子的定义.

定义 2.2 ^[5] 如果 $\mathcal{C}$ 的函子 F 满足: 存在 $X, Y \in \mathcal{C}$, 使得

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y) \rightarrow F \rightarrow 0$$

是正合列, 那么我们称 F 是 $\mathcal{C}$ 的 coherent 函子.

注记 2.3 ^[5] 根据 Yoneda 引理, 我们有 coherent 函子 $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$ 可以作成加法范畴并且有 cokernel, 称之为加法范畴 $\mathcal{C}$ 的 coherent 函子范畴, 记作 $\mathcal{A}(\mathcal{C})$.

定义 2.4 ^[5] 如果在 $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ 中存在正合列 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Z)$, 那么我们称态射 $X \rightarrow Y$ 是态射 $Y \rightarrow Z$ 的弱 kernel.

对于加法范畴 $\mathcal{C}$, 有如下引理:

引理 2.5 ^[5] 如果加法范畴 $\mathcal{C}$ 有弱 kernel, 那么 $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ 是 Abel 范畴.

由引理 2.5, 易得三角范畴 $\mathcal{D}$ 的 coherent 函子范畴 $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ 是 Abel 范畴.

为方便读者, 我们给出下面引理及其证明.

引理 2.6 设 $\mathcal{T}$ 是三角范畴 $\mathcal{D}$ 的满子范畴. 如果 $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{D}$ 的反变有限子范畴, 那么 $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ 是 Abel 范畴.

证 任取 $Y, Z \in \mathcal{T}$ 和态射 $\alpha: Y \rightarrow Z$. 一方面, 在三角范畴 $\mathcal{D}$ 中有三角

$$X \xrightarrow{\beta} Y \xrightarrow{\alpha} Z \rightarrow X[1],$$

从而有正合列

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, Z).$$

另一方面, 对于 X 存在着右 $\mathcal{T}$ -逼近 $\gamma: M \rightarrow X$, 即有满射

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, \gamma): \text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, M) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X).$$

故 $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, M) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, Z)$ 也是正合列, 因此 $\beta\gamma: M \rightarrow Y$ 是态射 $\alpha: Y \rightarrow Z$ 的弱 kernel. 由引理 2.5 可得 $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ 是 Abel 范畴.

定义 2.7 ^[6] 设 $\mathcal{C}$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的满子范畴. 如果 $\mathcal{C}$ 是扩张闭的 Abel 范畴, 并且 $\mathcal{C}$ 的任意对象 N 关于直和项封闭, 那么称 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$ 的 thick 子范畴.

定义 2.8 ^[7] 设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的满子范畴, 且满足

(1) 对任意 $M \in \mathcal{X}, N \in \mathcal{Y}$ 都有 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) = 0$,

(2) 对任意 $L \in \mathcal{D}$, 存在 $\mathcal{D}$ 中的短正合列 $0 \rightarrow X' \rightarrow L \rightarrow X'' \rightarrow 0$, 其中 $X' \in \mathcal{X}, X'' \in \mathcal{Y}$,

则称有序对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是 $\mathcal{A}$ 的 Torsion 理论.

定义 2.9 ^[8] 设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是三角范畴 $\mathcal{D}$ 的满子范畴, 且满足

- (1) 对任意 $M \in \mathcal{X}, N \in \mathcal{Y}$ 都有 $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(M, N) = 0$,
 (2) 任意 $L \in \mathcal{D}$, 存在 $\mathcal{D}$ 中的三角 $X' \rightarrow L \rightarrow X'' \rightarrow X[1]$, 其中 $X' \in \mathcal{X}, X'' \in \mathcal{Y}$,
 则称有序对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是 $\mathcal{D}$ 的 torsion 理论.

引理 2.10 ^[9] 设 T 是三角范畴 $\mathcal{D}$ 的 rigid 对象, 令

$${}^{\perp}T = {}^{\perp}(\text{add}T) = \{Y \in \mathcal{D} | \text{Ext}^1(Y, X) = 0 \text{ 其中 } X \in \text{add}T\},$$

则 ${}^{\perp}T$ 是 $\mathcal{D}$ 的反变有限子范畴.

引理 2.11 ^[10] 设 $\mathcal{C}$ 是一个加法范畴, $H: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ 是 $\mathcal{C}$ 到加法范畴 $\mathcal{A}$ 的加法函子; 用 $h_{\mathcal{C}}$ 表示 $\mathcal{C}$ 的 Yoneda 函子, 在 $h_{\mathcal{C}}$ 的作用下 $\mathcal{C}$ 的对象 X 映成 $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ 的对象 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$. 如果 $\mathcal{A}$ 有 cokernel, 则存在唯一的正合函子 $\overline{H}: \mathcal{A}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{A}$ 满足 $H = \overline{H} \circ h_{\mathcal{C}}$.

3 主要结果的证明

3.1 Coherent 函子的自然延拓

设 $\mathcal{S}$ 是三角范畴 $\mathcal{D}$ 的满子范畴. 则存在态射 $H: \mathcal{S} \xrightarrow{i} \mathcal{D} \xrightarrow{h_{\mathcal{D}}} \mathcal{A}(\mathcal{D})$, 由引理 2.5 知 $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ 是 Abel 范畴.

根据引理 2.11, 存在唯一的 $\overline{H}: \mathcal{A}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{D})$, 使得 $h_{\mathcal{D}} \circ i = \overline{H} \circ h_{\mathcal{S}}$.

任取 $G \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$, 由文献 [10] 存在 $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ 的正合列

$$\text{Hom}_{\mathcal{S}}(-, Y) \xrightarrow{f} \text{Hom}_{\mathcal{S}}(-, X) \xrightarrow{g} G \rightarrow 0.$$

由此, 存在 $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ 的正合列

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(-, Y) \xrightarrow{f'} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(-, X) \xrightarrow{g'} G' \rightarrow 0,$$

且 $\overline{H}(G) = G', \overline{H}(\text{Hom}_{\mathcal{S}}(-, X)) = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(-, X)$.

3.2 定理 1.1 的证明

根据引理 2.6, $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ 是 Abel 范畴.

设 $G \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$, 那么 G 可以自然的延拓为 $\mathcal{D}$ 的函子, 我们依然用 G 表示, 且存在 $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ 中的正合列

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(-, Y) \xrightarrow{f} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(-, X) \xrightarrow{g} G \rightarrow 0,$$

其中 $X, Y \in \mathcal{T}$. 下面将 $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(-, Y)$ 简记为 h_Y .

如果在 $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ 中, 有 $G = G_1 \oplus G_2$, 那么存在如下交换图,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{p} & h_X & \xrightarrow{g} & G \longrightarrow 0 \\ & & \vdots & & \parallel & & \downarrow \pi_1 \\ & & n & & 1_X & & \\ 0 & \longrightarrow & R' & \xrightarrow{b} & h_X & \xrightarrow{\pi_1 g} & G_1 \longrightarrow 0 \end{array}$$

其中 $\pi_i (i = 1, 2)$ 是自然投射, R, R' 分别是 $g, \pi_1 g$ 的 kernel.

由 $\pi_1 gp = 0$, 所以存在唯一的态射 $n : R \rightarrow R'$ 使得 $bn = p$; 根据“蛇引理”, 存在“Ker-coker”正合序列

$$0 \rightarrow \ker n \rightarrow \ker 1_X \rightarrow \ker \pi_1 \rightarrow \operatorname{coker} n \rightarrow \operatorname{coker} 1_X \rightarrow \operatorname{coker} \pi_1 \rightarrow 0$$

从而 n 是单射, 且 $\operatorname{coker} n \cong \ker \pi_1 = G_2$, 因此 $0 \rightarrow R \xrightarrow{n} R' \xrightarrow{c} G_2 \rightarrow 0$ 是短正合列. 且下图是交换图,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & h_Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & h_Y \oplus h_X & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} & h_X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow l & & \downarrow a & & \downarrow \pi_2 g \\ 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{n} & R' & \xrightarrow{c} & G_2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

其中 l 满足 $p \circ l = f$; 因为 c 是满射, h_X 是投射对象, 所以存在态射 $d : h_X \rightarrow R'$ 满足 $cd = \pi_2 g$, 故存在态射 $a = (nl, d)$ 使得上图是交换图.

根据“蛇引理”, 存在“Ker-coker”正合序列

$$0 \rightarrow \ker l \rightarrow \ker a \rightarrow \ker \pi_2 g \rightarrow \operatorname{coker} l \rightarrow \operatorname{coker} a \rightarrow \operatorname{coker} \pi_2 g \rightarrow 0.$$

由 l 和 $\pi_2 g$ 是满射, 可得 a 是满射, 因此 $h_Y \oplus h_X \xrightarrow{ba} h_X \xrightarrow{\pi_1 g} G_1 \rightarrow 0$ 是正合列, 从而 $G_1 \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$, 即 $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ 关于直和项封闭.

设 $G_1, G_2 \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$, 那么存在正合列 $h_{Y_1} \xrightarrow{b_1} h_{X_1} \xrightarrow{a_1} G_1 \rightarrow 0$ 和 $h_{Y_2} \xrightarrow{b_2} h_{X_2} \xrightarrow{a_2} G_2 \rightarrow 0$, 其中 $X_i, Y_i \in \mathcal{T}, i = 1, 2$. G_1, G_2 可以自然延拓为 $\mathcal{D}$ 的函子, 我们依然用 G_1, G_2 表示, 且在 $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ 中依然有上面两个正合列.

任取 G_1, G_2 的扩张 G , 那么下图是交换图,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & R' & \xrightarrow{b_1''} & h_{X_1} & \xrightarrow{a_1} & G_1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & \downarrow c_1 \\ 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{p} & h_{X_1} \oplus h_{X_2} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} c_1 a_1 & d_2 \end{pmatrix}} & G \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} & & \downarrow c_2 \\ 0 & \longrightarrow & R'' & \xrightarrow{b_2''} & h_{X_2} & \xrightarrow{a_2} & G_2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

其中 R', R'' 分别是 a_1, a_2 的 kernel, $0 \rightarrow R' \xrightarrow{b_1''} h_{X_1} \xrightarrow{a_1} G_1 \rightarrow 0$ 和 $0 \rightarrow R'' \xrightarrow{b_2''} h_{X_2} \xrightarrow{a_2} G_2 \rightarrow 0$ 是正合列.

因为 c_2 是满射, h_{X_2} 是投射对象, 存在态射 $d_2 : h_{X_2} \rightarrow G$ 满足 $c_2 d_2 = a_2$, 从而上图的“右部分”是交换的; 令 R 是 $(c_1 a_1 \ d_2)$ 的 kernel, 故存在态射 α_1, α_2 使得 $R' \xrightarrow{\alpha_1} R \xrightarrow{\alpha_2}$ 是正合列, 且上图是交换的; 根据“蛇引理”可得, $(c_1 a_1 \ d_2)$ 是满射.

类似的, 我们可以找到满射 $l: h_{Y_1} \oplus h_{Y_2} \rightarrow R$, 使得下图交换,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & h_{Y_1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & h_{Y_1} \oplus h_{Y_2} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} & h_{Y_2} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow b'_1 & & \downarrow l & & \downarrow b'_2 \\ 0 & \longrightarrow & R' & \xrightarrow{\alpha_1} & R & \xrightarrow{\alpha_2} & R'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

从而有正合列 $h_{Y_1} \oplus h_{Y_2} \xrightarrow{pol} h_{X_1} \oplus h_{X_2} \xrightarrow{\begin{pmatrix} c_1 a_1 & d_2 \end{pmatrix}} G \rightarrow 0$. 因为 $X_i, Y_i \in \mathcal{T}$, 所以 $G \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$, 即 $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ 是扩张闭的, 从而 $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ 是 $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ 的 thick 子范畴.

根据引理 2.10 有如下推论:

推论 3.2.1 设 T 是三角范畴 $\mathcal{D}$ 的 rigid 对象, 则 $\mathcal{A}({}^\perp T)$ 是 $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ 的 thick 子范畴.

3.3 定理 1.2 的证明

任取 $G \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$, 则存在下面正合列

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, T_1) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, T_0) \xrightarrow{\beta} G \rightarrow 0,$$

其中 $T_0, T_1 \in \mathcal{D}$.

由于 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是三角范畴 $\mathcal{D}$ 的 torsion 理论, 且 $\mathcal{D} = \mathcal{X} * \mathcal{Y}$ 的扩张是可裂的, 所以对于 $T_0, T_1 \in \mathcal{D}$ 存在下面两个三角

$$X_0 \rightarrow T_0 \rightarrow Y_0 \xrightarrow{0} X_0[1], \quad X_1 \rightarrow T_1 \rightarrow Y_1 \xrightarrow{0} X_1[1],$$

其中 $X_0, X_1 \in \mathcal{X}, Y_0, Y_1 \in \mathcal{Y}$. 任意 $M \in \mathcal{D}$ 有上同调函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M, \cdot)$, 因此存在下面两个短正合列

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, X_0) \xrightarrow{f_0} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, T_0) \xrightarrow{g_0} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, Y_0) \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, X_1) \xrightarrow{f_1} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, T_1) \xrightarrow{g_1} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, Y_1) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

故有如下交换图

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X_1) & \xrightarrow{\alpha_1} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X_0) & \xrightarrow{\beta_1} & G_1 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow h_1 & & \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, T_1) & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, T_0) & \xrightarrow{\beta} & G & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow g_1 & & \downarrow g_0 & & \downarrow h_2 & & \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, Y_1) & \xrightarrow{\alpha_2} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, Y_0) & \xrightarrow{\beta_2} & G_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

因为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_1, Y_0) = 0$, 所以 $g_0 \alpha f_1 = 0$, 从而 $\alpha f_1 = 0$ 通过 $\ker(g_0) \cong \mathrm{Im}(f_0)$ 分解, 且 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X_1)$ 是投射对象, 所以存在 α_1 满足 $\alpha f_1 = f_0 \alpha_1$; 类似的, 由于

$$0 \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, X_1) \xrightarrow{f_1} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, T_1) \xrightarrow{g_1} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, Y_1) \rightarrow 0$$

是短正合列, 且 $g_0\alpha f_1 = 0$, 故存在 α_2 满足 $g_0\alpha = \alpha_2 g_1$.

取 β_1, β_2 分别是 α_1, α_2 的 cokernel, 因此 $G_1 \in \mathcal{A}(\mathcal{X}), G_2 \in \mathcal{A}(\mathcal{Y})$.

由 $\beta_2 g_0 \alpha = 0$, 且有正合列

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, T_1) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, T_0) \xrightarrow{\beta} G \rightarrow 0,$$

所以存在 h_2 满足 $h_2\beta = \beta_2 g_0$.

类似的, 由 $\beta f_0 \alpha_1 = 0$, 且有正合列 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, X_1) \xrightarrow{\alpha_1} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, X_0) \xrightarrow{\beta_1} G_1 \rightarrow 0$, 所以存在 h_1 满足 $h_1\beta_1 = \beta f_0$. 故上图是交换图, 且存在序列 $G_1 \xrightarrow{h_1} G \xrightarrow{h_2} G_2$, 其中 $G_1 \in \mathcal{A}(\mathcal{X}), G_2 \in \mathcal{A}(\mathcal{Y})$.

因为 $h_2 h_1 \beta_1 = \beta_2 g_0 f_0 = 0$, 所以 $h_2 h_1 = 0$; 根据“强四引理”可得

$$\ker h_2 = \beta(\ker g_0) = \beta(\mathrm{Im} f_0) = h_1(\mathrm{Im} \beta_1),$$

所以 $0 \rightarrow G_1 \xrightarrow{h_1} G \xrightarrow{h_2} G_2 \rightarrow 0$ 是短正合列.

任取 $G_1 \in \mathcal{A}(\mathcal{X}), G_2 \in \mathcal{A}(\mathcal{Y})$, 自然延拓为 $\mathcal{D}$ 的函子 G_1, G_2 , 则存在两个正合列

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, X_1) &\xrightarrow{\alpha_1} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, X_0) \xrightarrow{\beta_1} G_1 \rightarrow 0, \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, Y_1) &\xrightarrow{\alpha_2} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, Y_0) \xrightarrow{\beta_2} G_2 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

其中 $X_0, X_1 \in \mathcal{X}, Y_0, Y_1 \in \mathcal{Y}$. 设存在态射 $\eta: G_1 \rightarrow G_2$, 由 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, X_0)$ 的投射性, 存在 $\varepsilon: X_0 \rightarrow Y_0$ 满足 $\eta\beta_1 = \beta_2\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, \varepsilon)$, $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是 Torsion 理论, 所以 $\varepsilon = 0$, 故 $\eta = 0$.

因此 $(\mathcal{A}(\mathcal{X}), \mathcal{A}(\mathcal{Y}))$ 是 $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ 的 Torsion 理论.

推论 3.3.1 设 $\mathcal{D}$ 是三角范畴, 其 Torsion 理论记为 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, 那么 $\mathcal{A}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{A}(\mathcal{Y}) = 0$.

证 任取 $G \in \mathcal{A}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{A}(\mathcal{Y})$, 自然延拓为 $\mathcal{D}$ 的函子 G , 则存在如下两个正合列

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, X_2) &\rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, X_1) \rightarrow G \rightarrow 0, \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, Y_2) &\rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, Y_1) \rightarrow G \rightarrow 0, \end{aligned}$$

其中 $X_0, X_1 \in \mathcal{X}, Y_0, Y_1 \in \mathcal{Y}$. 因为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, X_1)$ 有投射性, 并且 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是 Torsion 理论, 由 Yoneda 引理知 $G \xrightarrow{1_G} G$ 为零, 从而 $G = 0$.

参 考 文 献

- [1] Dickson S E. A torsion theory for Abelian categories[J]. Trans. AMS, 1966, 121(1): 223–235.
- [2] Auslander M, Smalø S O. Preprojective modules over artin algebra[J]. J. Algebra, 1980, 66(1): 61–122.
- [3] Auslander M, Smalø S O. Almost split sequences in subcategories[J]. J. Algebra, 1981, 69(2): 426–454.
- [4] Auslander M, Reiten I. Applications of contravariantly finite subcategories[J]. Adv. Math., 1997, 86(1): 111–152.
- [5] Krause H. Derived categories, resolutions, and Brown representability[M]. Interactions Between Homotopy Theory and Algebra, Contemp. Math., Chicago, 2004, Vol. 436, Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007.

- [6] Dichev N D. Thick subcategories for quiver representations[D]. Paderborn Germany: Institute of Mathematics Faculty of Computer Science, Electrical Engineering and Mathematics University of Paderborn, 2009.
- [7] Beligiannis A, Reiten I. Homological and homotopical aspects of torsion theory[M]. Mem. Amer. Math. Soc. , Vol. 188, Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007.
- [8] Iyama O, Yoshino Y. Mutation in the triangulated categories and rigid Cohen-Macalalay modules[J]. Inv. Math., 2008, 172(1): 117–168.
- [9] Buan A B, Marsh R J. From triangulated categories to module categories via localisation[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 2013, 365(6): 2845–2861.
- [10] Krause H. Localization theory for triangulated categories[M]. Vol. 375 of London Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010: 161–235.

TORSION THEORY OF TRIANGULATED CATEGORIES AND ABELIAN CATEGORIES

LIN Ji, YAO Yun-fei

(*School of Mathematics and Computational Science, Fuyang Teachers College,
Fuyang 236037, China*)

Abstract: The preserving problems of torsion theory during the course of the Abelianization of triangulated categories are studied. By using the conclusion that the coherent functor category of triangulated category is an Abelian category, it is shown that the coherent functor category $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ of $\mathcal{T}$ is a thick subcategory of $\mathcal{A}(\mathcal{D})$. If $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ is a torsion theory of $\mathcal{D}$ and the extension of $\mathcal{X}$ by $\mathcal{Y}$ is split, we prove that $(\mathcal{A}(\mathcal{X}), \mathcal{A}(\mathcal{Y}))$ is a torsion theory of $\mathcal{A}(\mathcal{D})$.

Keywords: triangulated category; coherent functor category; thick subcategory; torsion theory

2010 MR Subject Classification: 18E10; 18E30; 18E35