

一类非线性 chemotaxis 系统的局部零能控性

程 颖¹, 向建林²

(1. 武汉大学图书馆, 湖北 武汉 430072)

(2. 武汉理工大学理学院, 湖北 武汉 430070)

摘 要: 本文研究了一类非线性 chemotaxis 系统的能控性问题. 利用这类线性化结合不动点的方法, 获得了非线性系统的局部零能控性结果, 推广了非线性抛物 - 椭圆型方程能控性的结果.

关键词: 能控性; chemotaxis 系统; 抛物 - 椭圆型方程组

MR(2010) 主题分类号: 93B05; 35K58

中图分类号: O231

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2014)004-0797-07

1 引言

本文中, 考虑如下形式的非线性抛物 - 椭圆型方程组系统:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla \Phi(v)) = \chi_\omega f, & \text{在 } \Omega \times (0, T) \text{ 中,} \\ -\Delta v + v - u = 0, & \text{在 } \Omega \times (0, T) \text{ 中,} \\ \partial_\nu u = 0, \partial_\nu v = 0, & \text{在 } \partial\Omega \times (0, T) \text{ 上,} \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$, $\partial_t = \partial/\partial t$; $\partial_\nu = \partial/\partial \nu$ 表示边界 $\partial\Omega$ 的外法单位向量; χ_ω 表示开集 ω 上的特征函数; f 表示控制函数; u_0 表示初始值.

当 $f = 0$ 时, 系统 (1.1) 是经典的 Keller-Segel 系统. 这一方程由 Keller 和 Segel 在文 [1] 中提出, 用以描述黏液菌形态发生的 chemotaxis 过程. 这类方程在生物医学、生态学、环境科学以及相关领域中有着广泛的应用. 在数学上, 这类方程也因其数学结构的特殊性引起广泛的关注, 是近几年研究的热点问题之一. 目前关于这类系统在偏微分方程理论上的多个问题已经开展, 比如聚集现象, 爆破现象等 [2].

然而, 据我们所知, 这类方程在控制领域的研究成果鲜少. 在文 [3] 中, 作者考虑该系统能控性问题. 我们在本文中考虑系统 (1.1) 的局部零能控性. 称系统 (1.1) 在给定的时刻 T 具局部零能控性, 如果存在一个 0 的邻域, 使得对于这个邻域中的任意一个初始值 u_0 , 都可以找到一个控制 f , 从而系统 (1.1) 的解满足 $u(x, T) = 0$, $x \in \Omega$.

我们考虑系统 (1.1) 的能控性问题, 原因如下: 第一, 抛物型偏微分方程的能控性问题是近几年的研究热点之一, 而抛物型偏微分方程组的能控性则属于其中一个难点 [4]. 在这一研

*收稿日期: 2013-03-23

接收日期: 2014-01-11

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11201358); 中央高校基本科研业务费专项资金资助 (2012-Ia-033; 2013-Ia-020).

作者简介: 程颖 (1977-), 女, 湖北黄石, 中级, 主要研究方向: 智能计算.

通讯作者: 向建林

究领域中, 还有一些课题尚未解决. 第二, 系统 (1.1) 是由抛物型与椭圆型两个偏微分方程耦合而成, 称之为抛物 - 椭圆型偏微分方程组. 这是偏微分方程组的能控性的新问题. 目前相关的研究尚未完全展开. 在文 [5] 中, 作者考虑了如下形式的抛物 - 椭圆型方程组的能控性:

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + G(u, v) + \chi_\omega f, & \text{在 } \Omega \times (0, T) \text{ 中,} \\ 0 = \Delta v + H(u, v), & \text{在 } \Omega \times (0, T) \text{ 中,} \end{cases} \quad (1.2)$$

这里 G, H 是非线性函数. 作者的处理方式是结合抛物型方程组的能控性以及渐近的方法得出系统 (1.2) 的能控性. 第三, 这类方程的数学结构比较独特. 和方程 (1.2) 相比, 在系统 (1.1) 的第一式中存在一个 drift 项, 这一非线性项的存在破坏了系统的正则性, 从而给研究带来一定的挑战.

在本文中, 针对系统 (1.1) 的数学结构, 我们提出一种有别于文献 [5] 中的方法, 这一方法也有别于非线性抛物型偏微分方程组的能控性解决方案. 解决方案的本质是视系统 (1.1) 为单一的非线性抛物型方程, 而不是耦合的方程组. 这一方法可以适用于其他的抛物 - 椭圆系统的能控性问题, 譬如半导体系统等. 在本文中, 还改进了线性抛物型偏微分的正则性估计, 得到依赖于时间 T 的显性的界. 这一结果应用于本文的能控性证明中, 也可以应用于抛物型方程的时间最优控制中.

本文中, $\Omega \subset \mathbf{R}^N (N \geq 1)$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域; ω 是 Ω 的开集. 对于 $T > 0$, 记 $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$. $L^p(\Omega)$ 和 $L^p(Q) (1 \leq p \leq \infty)$ 为 Lebesgue 函数空间, 范数分别记为 $|\cdot|_p$ 和 $\|\cdot\|_p$; $H^m(\Omega)$ 是 Sobolev 空间; 记

$$W(0, T) = \{y \in L^2(0, T; H^1(\Omega)); \partial_t y \in L^2(0, T; H^1(\Omega)^*)\},$$

其中 $H^1(\Omega)^*$ 是 $H^1(\Omega)$ 的对偶空间, 并记 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 $H^1(\Omega)$ 和 $H^1(\Omega)^*$ 间的对偶关系.

定义 1.1 称 $(u, v) \in (W(0, T) \cap L^\infty(Q)) \times (L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega))$ 为 (1.1) 的弱解, 如果对任意的 $\varphi \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, 下面两个等式成立:

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \partial_t u, \varphi \rangle dt + \iint_\Omega [(\nabla u - u \nabla \Phi(v)) \cdot \nabla \varphi - \chi_\omega f \varphi] dx dt &= 0, \\ \iint_Q [\nabla v \cdot \nabla \varphi + (v - u) \varphi] dx dt &= 0. \end{aligned}$$

在本文中, 我们提出假设如下:

(H) 设 $\Phi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 是分段光滑函数, 且 $\Phi' \in L^\infty(\mathbf{R})$.

定理 1.1 设 $T > 0$ 且条件 (H) 成立. 则存在不依赖于 T 的常数 c_0 , 对于任意的 u_0 , 只要其满足

$$|u_0|_\infty \leq e^{-c_0(1+T+\frac{1}{T})}, \quad (1.3)$$

则有控制 $f \in L^\infty(\omega \times (0, T))$, 使得系统 (1.1) 的解 (u, v) 满足

$$u \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(Q), \quad v \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$$

且 $u(x, T) = 0, x \in \Omega$.

2 关于线性方程的一些分析

这一节中, 我们证明线性抛物型偏微分方程的零能控性. 在此之前, 我们需要一些关于偏微分方程的结论.

对于下列的椭圆型偏微分方程

$$\begin{cases} -\Delta z + az = \theta, & \text{在 } \Omega \text{ 中,} \\ \partial_\nu z = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.} \end{cases} \quad (2.1)$$

我们需要

定理 2.1 ^[6] 设 $\theta \in L^p(\Omega)$, $p > 1$, $a \in L^\infty(Q)$, 且存在常数 $\lambda_0 > 0$, 使得 $a \geq \lambda_0$, 则方程 (2.1) 有唯一解 $z \in W^{2,p}(\Omega)$, 且仅有依赖于 Ω 与 p 的常数 C , 使

$$\|z\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \|\theta\|_p.$$

对于下列的抛物型偏微分方程

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + \nabla \cdot (By) + ay = \xi, & \text{在 } Q \text{ 上,} \\ \partial_\nu y = 0, & \text{在 } \Sigma \text{ 上,} \\ y(x, 0) = y_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.2)$$

我们建立:

定理 2.2 设 $B \in L^\infty(Q)^N$ 且在 Σ 上有 $B \cdot \nu = 0$, $a, \xi \in L^\infty(Q)$, $y_0 \in L^\infty(\Omega)$, 则方程 (2.2) 有唯一解 $y \in L^\infty(Q) \cap W(0, T)$, 且存在常数 $C = C(\Omega)$ 和 $\varrho_0 = (1 + \|B\|_\infty^2 + \|a\|_\infty)(1 + T)$, 使

$$\|y\|_\infty \leq e^{C\varrho_0} (\|y_0\|_\infty + \|\xi\|_\infty). \quad (2.3)$$

定理 2.1 是一个改进形式的抛物型方程的正则性估计 ^[7], 它给出了关于时间 T 的明确的界. 为证明之, 需要如下引理.

引理 2.1 ^[7] 设有 c, ε 和 $b \geq 1$ 为正常数, 使非负序列 $q_h (h = 0, 1, 2, \dots)$ 满足

$$q_{h+1} \leq cb^h q_h^{1+\varepsilon}, \quad h = 0, 1, 2, \dots,$$

如果 $q_0 \leq c^{-\frac{1}{\varepsilon}} b^{-\frac{1}{\varepsilon^2}}$, 则当 $h \rightarrow \infty$ 时, 有 $q_h \rightarrow 0$.

定理 2.1 的证明 设数 k 满足 $k \geq K_0 = \|\xi\|_\infty + \|y_0\|_\infty$, $t \in [0, T]$. 记 $(y - k)_+ = \max\{y - k, 0\}$ 和 $A_k(t) = \{x \in \Omega, y(x, t) > k\}$. 用 $(y - k)_+$ 乘以 (2.2) 两端, 而后在 Ω 上积分, 并整理得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_\Omega |(y - k)_+|^2 dx + \int_\Omega |\nabla (y - k)_+|^2 dx \\ & \leq (2\|B\|_\infty^2 + \|a\|_\infty + 1) \left(\int_\Omega |(y - k)_+|^2 dx + \int_{A_k(t)} k^2 dx \right). \end{aligned}$$

由 Gronwall 引理, 可得

$$\|(y - k)_+\|_{V_2}^2 \leq e^{C[(1+\|B\|_\infty^2)T+1+\|B\|_\infty+\|a\|_\infty]} \int_0^T \int_{A_k(t)} k^2 dx, \quad (2.4)$$

这里函数空间 $V_2(Q) = L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$ 装配图范数. 另一方面, Sobolev 空间有如下嵌入结论

$$\|(y - k)_+\|_{\frac{2(N+2)}{N}} \leq C \|(y - k)_+\|_{V_2}. \quad (2.5)$$

再令 $\varphi(k) = |\{(x, t) \in Q; y(x, t) > k\}|$. 于是由 (2.4) 和 (2.5) 式可知, 对任意的 $h > k$, 有

$$\varphi(h) \leq e^{C[(1+\|B\|_\infty^2)T+1+\|B\|_\infty+\|a\|_\infty]} \left(\frac{k}{h-k}\right)^{\frac{2(N+2)}{N}} \varphi(k)^{\frac{N+2}{N}}. \quad (2.6)$$

记 $q_s = \varphi(k_s)$, $k_s = M(2 - \frac{1}{2^s})$, $h = k_{s+1}$, $k = k_s$, $\tau = 2(N+2)/N$, $\varepsilon = 2/N$, $\tilde{c} = e^{C[(1+\|B\|_\infty^2)T+1+\|B\|_\infty+\|a\|_\infty]}$. 利用引理 2.1 和 (2.6) 式可知, 要得到 $\varphi(2M) = 0$, 只要

$$q_0 = \varphi(k_0) = \varphi(M) \leq (\tilde{c}4^\tau)^{-\frac{1}{\varepsilon}} (2^\tau)^{-\frac{1}{\varepsilon^2}}. \quad (2.7)$$

为确定常数 M , 可取 $m > 1$ 为整数, 并待定 $M = mK_0$. 在 (2.6) 式中取 $h = M = mK_0$ 和 $k = K_0$,

$$\varphi(M) \leq \tilde{c} \left(\frac{1}{m-1}\right)^\tau T^{1+\varepsilon} |Q|^{1+\varepsilon}. \quad (2.8)$$

根据 (2.7) 和 (2.8) 式, 要使 $\varphi(2M) = 0$ 成立, 只需选取整数 m 满足

$$m \geq 1 + \tilde{c}^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon\tau}} T^{\frac{1+\varepsilon}{\tau}} |Q|^{\frac{1+\varepsilon}{\tau}} 2^{\frac{2}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2}}$$

即可. 由此 $\varphi(2M) = \varphi(2mK_0) = 0$, 这也表明 $y \leq 2mK_0 \leq e^{C\varrho_0}$. 用 $-u$ 替代 u 并用类似的分析最终可得到不等式 (2.3).

下面给出线性抛物型方程的零能控性.

考虑如下受控的线性抛物型偏微分方程:

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + \nabla \cdot (By) + ay = \chi_\omega f, & \text{在 } Q \text{ 中,} \\ \partial_\nu y = 0, & \text{在 } \Sigma \text{ 上,} \\ y(x, 0) = y_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.9)$$

其中 $a \in L^\infty(Q)$, $B \in L^\infty(Q)$, 且在边界 Σ 上满足 $B \cdot \nu = 0$.

定理 2.3 对于任意的 $T > 0$, 任意的初始值 $y_0 \in L^2(\Omega)$, 都存在控制 $f \in L^\infty(Q)$, 使得方程 (2.9) 对应的唯一解 $y \in W(0, T)$ 满足 $y(x, T) = 0$, $x \in \Omega$. 此外, 控制函数 f 满足估计式

$$\|f\|_\infty \leq e^{C(1+T+\frac{1}{T})} |u_0|_2, \quad (2.10)$$

其中 C 是不依赖于 T 的常数.

证 可以利用 [8] 中的方法得到.

3 定理 1.1 的证明

令 $K = \{\theta \in C([0, T]; L^\infty(\Omega)) | \|\theta\|_\infty \leq 1\}$. 对每一 $\theta \in K$, $t \in [0, T]$, 考虑椭圆型偏微分方程

$$\begin{cases} -\Delta v(\cdot, t) + v(\cdot, t) = \theta(\cdot, t), & \text{在 } \Omega \text{ 中,} \\ \partial_\nu v(\cdot, t) = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.} \end{cases} \quad (3.1)$$

根据定理 2.1 知, 对任意的 $p > 2$, 椭圆方程 (3.1) 的解 $v_\theta \in C([0, T]; W^{2,p}(\Omega))$. 于是, 只要 $p > N$, 导数的链式法则和 Sobolev 嵌入定理可以保证

$$B = \nabla \Phi(v_\theta) = \Phi' \nabla v_\theta \in C([0, T]; W^{1,p}(\Omega)) \subset C([0, T]; L^\infty(\Omega))^N$$

且在边界 Σ 上满足 $B \cdot \nu = 0$. 从而可以定义非线性映射 $\Theta: K \rightarrow C([0, T]; L^\infty(\Omega))^N$ 如下:

$$\Theta(\theta) = B = \nabla \Phi(v_\theta), \forall \theta \in K.$$

考虑受控的抛物型偏微分方程

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla \cdot (Bu) + \chi_\omega f, & \text{在 } Q \text{ 中,} \\ \partial_\nu u = 0, & \text{在 } \Sigma \text{ 上,} \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.2)$$

根据定理 2.3, 对任意的 $B \in L^\infty(Q)^N$, 受控方程 (3.2) 至少存在一解对 (u, f) 与之对应, 其中 u 满足 $u(x, T) = 0, x \in \Omega$; 控制函数 f 满足

$$\|f\|_\infty \leq e^{C\kappa_0} |u_0|_2, \quad (3.3)$$

这里的常数 κ_0 形如 $\kappa_0 = c_0^1 (1 + T + (1/T))$. 根据定理 2.2 和 (3.3) 式, 方程 (3.2) 的解满足如下的正则性估计

$$\|u\|_{W(0,T)} + \|u\|_\infty \leq e^{C\kappa_0} |u_0|_\infty. \quad (3.4)$$

由此, 我们可以定义多值映射 $\Lambda: L^\infty(Q)^N \rightarrow 2^{L^2(Q)}$ 如下:

$$\Lambda(B) = \{u_B; u_B \in L^2(Q)\}.$$

这里及以下叙述中, $u = u_B$ 是对应于控制函数 f , 系数 B , 初始值 u_0 的方程 (3.2) 的解, 且 u 满足 $u(x, T) = 0, x \in \Omega$ 和 f 满足 (3.3) 式. 定理 2.3 可以保证多值映射 Λ 的合理性.

现在, 我们定义多值映射 $\Upsilon = \Lambda \circ \Theta: K \rightarrow 2^{L^2(Q)}$. 下面我们将验证多值映射 Υ 满足 Kakutani 不动点定理 (见文献 [9] p.7) 的假设条件. 显然 K 是 $L^2(Q)$ 中的凸集. 根据 Λ 的定义以及方程的线性性, 对于每一 B , $\Lambda(B)$ 是非空的且是凸集; 而对于每一 $\theta \in K$, $\Theta(\theta)$ 是单值的. 于是对每一 $\theta \in K$, $\Upsilon(\theta) = \Lambda \circ \Theta(\theta) = \Lambda(B)$ 是非空的且是凸的. 此外, 根据定理 2.2 和估计式 (3.4), 对于每一 $\theta \in K$, $\Upsilon(\theta)$ 是 $W(0, T)$ 中的有界集. 由此, 根据 Aubin-Lions 引理 (见文献 [9] p.17) 可知 $\Upsilon(\theta)$ 是 $L^2(Q)$ 中的紧集.

下面我们证明 Υ 是上半连续的. 为此, 取 K 中的序列 $\{\theta_n\}_{n=1}^\infty$, 且

$$\theta_n \text{ 在 } L^2(Q) \text{ 中强收敛到 } \theta. \quad (3.5)$$

对每一 $n, t \in [0, T]$, 设 $v_n = v_{\theta_n}$ 是下列椭圆方程的解

$$\begin{cases} -\Delta v_n(\cdot, t) + v_n(\cdot, t) = \theta_n(\cdot, t), & \text{在 } \Omega \text{ 中,} \\ \partial_\nu v_n(\cdot, t) = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.} \end{cases} \quad (3.6)$$

根据定理 2.1, v_n 满足如下估计式

$$\|v_n(\cdot, t)\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \|\theta_n(\cdot, t)\|_{L^p(\Omega)} \leq C, \quad \forall t \in [0, T], \forall p > 2. \quad (3.7)$$

如果令 v 是方程 (3.1) 对应于 θ 的解, $B_n = \Theta(\theta_n) = \nabla \Phi(v_n)$, 则由方程 (3.1) 的线性性, 以及式 (3.5) 和 (3.7) 可知

$$\|B_n - B\|_{L^2(Q)} \leq T \|\Phi'\|_{\infty} \|\nabla v_n - \nabla v\|_{L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))} \rightarrow 0, \quad (3.8)$$

即 B_n 在 $L^2(Q)$ 中强收敛于 B . 另一方面, 由前面分析可知 B_n 在 $L^{\infty}(Q)$ 中一致有界, 由此 $B \in L^{\infty}(Q)$.

对于每一 n , 由于 $\Lambda(B_n)$ 非空, 因此可取 $u_n \in \Upsilon(\theta_n) = \Lambda(B_n)$. 下面证明 $\{u_n\}$ 存在以某个 $u \in \Upsilon(\theta)$ 为聚点的收敛子列, 从而证明了 Υ 的上半连续性. 事实上, 根据 $\Lambda(B_n)$ 的定义, u_n 是下列抛物型方程的解

$$\begin{cases} \partial_t u_n - \Delta u_n + \nabla \cdot (B_n u_n) = \chi_{\omega} f_n, & \text{在 } Q \text{ 中,} \\ \partial_{\nu} u_n = 0, & \text{在 } \Sigma \text{ 上,} \\ u_n(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (3.9)$$

且 $u_n(x, T) = 0, x \in \Omega$; 此外, 控制函数 f_n 满足形如 (3.3) 的不等式. 于是, 可以抽取 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列 $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ 使

$$f_m \text{ 在 } L^2(Q) \text{ 中弱收敛且在 } L^{\infty}(Q) \text{ 中弱}^* \text{ 收敛于 } f \in L^{\infty}(Q). \quad (3.10)$$

根据定理 2.2, u_n 满足形如 (3.4) 式的不等式. 因此, 再次根据 Aubin-Lions 引理, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是列紧的, 从而存在 $u \in W(0, T) \cap L^{\infty}(Q)$ 和子列 $\{u_{n'}\}_{n'=1}^{\infty}$ 使得

$$u_{n'} \text{ 在 } W(0, T) \text{ 中弱收敛且在 } L^2(Q) \text{ 中强收敛于 } u. \quad (3.11)$$

进一步, 因为 $\{u_{n'}\}_{n'=1}^{\infty}$ 在 $L^2(Q)$ 是强收敛的, 所以可以抽取 $\{u_{n'}\}_{n'=1}^{\infty}$ 的子列 $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ (见文献 [7] p.72), 使 u_m 几乎处处收敛到 u . 注意到 B_n 在 $L^2(Q)$ 中强收敛于 B , 而 $u_{n'}$ 在 $L^2(Q)$ 弱收敛于 u . 因此 $B_m u_m$ 在 $L^2(Q)$ 中弱收敛于 π , 由此, $B_m u_m$ 几乎处处收敛于 Bu . 于是 $\pi = Bu$, 且

$$B_m u_m \text{ 在 } L^2(Q) \text{ 弱收敛于 } Bu. \quad (3.12)$$

根据 (3.10), (3.11) 和 (3.12) 式的收敛性结论, 在 (3.9) 式中取 $m \rightarrow \infty$ 的极限可知 u 是方程 (3.2) 相应于 B 和 f 的在定义 1.1 意义下的弱解. 进一步, 因为 $u_m(x, T) = 0$, 所以有 $u(x, T) = 0$. 从而, $u \in \Upsilon(\theta)$, 即证明了 Υ 是上半连续的.

最后, 再次根据定理 2.2, 对任意的 $\theta \in \Upsilon(K)$, 有 $u \in C([0, T]; L^{\infty}(\Omega))$ 且 $\|u\|_{\infty} \leq e^{c_0 \kappa_0} |u_0|_{\infty}$, 其中 c_0 是一常数. 如果取初始值满足 $|u_0|_{\infty} \leq e^{-c_0 \kappa_0}$, 则有 $\|u\|_{\infty} \leq 1$, 从而 $\Upsilon(K) \subset K$. 据此, Kakutani 不动点定理的条件全部满足, 于是在 K 中, Υ 有不动点 u ; 亦即 $u \in \Upsilon(u)$. 从而, u 以及对应的方程 (3.1) 的解 v 是抛物-椭圆系统 (1.1) 的解. 而且, u 满足 $u(x, T) = 0, x \in \Omega$. 即证明了系统 (1.1) 的局部零能控性.

参 考 文 献

- [1] Keller E F, Segel L A. Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability [J]. J. Theo. Bio., 1970, 26: 399–415.
- [2] Hillen T, Painter K J. A user's guide to PDE models for chemotaxis [J]. Journal Math. Biology, 2009, 58: 183–217.
- [3] Ryu S U, Yagi A. Optimal control of Keller-Segel equations [J]. J. Math. Anal. Appl., 2001, 256(1): 45–66.
- [4] Ammar-Khodja F, Benabdallah A, González-Burgos M, de Teresa L. Recent results on the controllability of linear coupled parabolic problems: a survey [J]. Math. Control and Related Fields, 2011, 1(3): 267–306.
- [5] Fernandez-Cara E, Limaco J, de Menezes S B. Null controllability for a parabolic-elliptic coupled system[J]. Bull. Brazilian Math. Society, 2013, 44(2): 285–308.
- [6] Agmon S, Douglis A, Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I [J]. Commun. Pure Appl. Math., 1959, 12: 623–727.
- [7] Ladyzhenskaja O A, Solonnikov V A, Ural'ceva N N. Linear and quasi-linear equations of parabolic type [M]. Providence RI: AMS, 1968.
- [8] Wang G, Zhang L. Exact local controllability of a one-control reaction-diffusion system [J]. J. Opti. Theory Appl., 2006, 131(3): 453–467.
- [9] Barbu V. Analysis and control of nonlinear infinite-dimensional systems[M]. Boston: Academic Press, 1993.

ON ONE KIND OF CONTROLLABILITY PROPERTY OF A
NONLINEAR CHEMOTAXIS SYSTEMCHENG Ying^{1,2}, XIANG Jian-lin²

(1. Library, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

(2. School of Science, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China)

Abstract: This work concerns the controllability of a nonlinear chemotaxis system. By the combination of linearization and the Kakutani's fixed point theorem, we prove the local controllability of the nonlinear parabolic-elliptic system. This approach is appropriate for the proof of controllability of the chemotaxis system and it is applicable for other types of parabolic-elliptic systems.

Keywords: controllability; chemotaxis system; parabolic-elliptic equations

2010 MR Subject Classification: 93B05; 35K58