Vol. 34 (2014)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

具有高阶转向点的奇摄动二次问题的激波解

马晴晴, 刘树德
(安徽师范大学数学系, 安徽 芜湖 241000)

摘 要: 本文研究了一类具有高阶转向点的含有一阶导数平方项的奇摄动二次边值问题. 在适当的条件下, 用合成展开法构造出激波解的零次形式近似, 并应用微分不等式理论证明了解的存在性及其渐近性质, 从而推广了文献 [6] 中有关拟线性问题的相应结果.

关 键 词: 奇摄动; 二次问题; 激波解; 合成展开法; 微分不等式
MR(2010) **主题分类号**: 34E15; 34B15; 34E20 **中 图 分 类 号**: O175.14
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2014)04-0717-06

1 引言

在许多物理问题中, 因变量的急剧变化往往发生在区域的内部. 这些狭窄区域在流体和固体力学中通常称为激波层, 相应问题的解也称为激波解. 1968 年, Cole[1] 研究如下拟线性边值问题

$$\varepsilon x'' + xx' - x = 0, 0 < t < 1, x(0,\varepsilon) = A, x(1,\varepsilon) = B,$$

其中 $0 < \varepsilon \ll 1, A, B$ 为给定常数. 随着边界值 A 和 B 的变化, 该问题除了在端点 $t = 0$ 或 $t = 1$ 处出现边界层之外, 当 A 和 B 满足 $-1 < A + B < 1$, $B > 1 + A$. 时, 在内点 $t_0 = \frac{1}{2}(1 - A - B) \in (0, 1)$ 处会出现激波层性态. 这个有趣的问题引起人们广泛关注 [2-4], 莫嘉琪等 [5] 考虑如下 Robin 问题

$$\varepsilon x'' + xx' = g(t)f(x), 0 < t < 1, x(0) - \varepsilon a x'(0) = A, x(1) + \varepsilon b x'(1) = B.$$

详细讨论了该问题可能产生的激波所处的位置并给出激波解的渐近表达式. 刘树德等 [6] 考虑如下一般拟线性边值问题

$$\varepsilon x'' + f(t,x)x' + g(t,x) = 0, a < t < b, x(a,\varepsilon) = A, x(b,\varepsilon) = B.$$

构造出该问题在 $t = 0$ 处呈现激波层性态的解的形式近似式, 且应用不动点定理证明了激波解的存在性及其渐近性质.

本文考虑如下形式的二次问题

$$\varepsilon^2 x'' = f(t)x'^2 + g(t,x); a < t < b, \tag{1}$$

$$x(a,\varepsilon) = A(\varepsilon), \quad x(b,\varepsilon) = B(\varepsilon), \tag{2}$$

*收稿日期: 2013-01-28 接收日期: 2013-06-25
基金项目: 国家自然科学基金（11202106）、安徽高校省级自然科学基金 (KJ2011A135).
作者简介: 马晴晴 (1988–), 女, 回族, 安徽芜湖, 硕士, 研究方向: 应用微分方程.

其中 $0<\varepsilon\ll 1, a, b(a<0<b)$ 和 A, B 皆为常数. 我们在 $t=0$ 是 $f(t)$ 的高阶转向点的情形下讨论问题 (1), (2), 分析在 $t=0$ 处存在激波解的条件, 用合成展开法构造该问题的形式渐近解, 并应用微分不等式理论证明激波解的存在性以及当 $\varepsilon\to 0$ 时解的渐近性质.

2 形式渐近解的构造

与问题 (1), (2) 相应的退化问题分别是

$$f(t)u'^2+g(t,u)=0, u(a)=A \tag{3}$$

和

$$f(t)u'^2+g(t,u)=0, u(b)=B. \tag{4}$$

假设

[H$_1$] 存在函数 $u_L(t), u_R(t)\in C^2[a,b]$ 分别满足退化问题 (3) 和 (4), 使得 $u_L(0)\neq u_R(0)$;

[H$_2$] $f(t)\in C^n[a,b](n\geq 3)$, 使 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$, 且 $f^{(n)}(0)\neq 0$, 即 $t=0$ 为 $f(t)$ 的 n 阶转向点;

[H$_3$] $g(t,x)\in C^1([a,b]\times\mathbf{R})$, 且存在常数 $l>0$, 使 $g_x(0,x)\geq l$.

我们用合成展开法 [7] 来构造问题 (1), (2) 的零次形式近似. 先将外部解 $U(t,\varepsilon)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}u_j(t)\varepsilon^j$ 代入 (1) 式和 $u(a,\varepsilon)=A$ 或 ($u(b,\varepsilon)=B$), 可确定外部解的零次近似 $u_0=u_L(t)$ 和 $u_0=u_R(t)$, 它们分别是退化问题 (3) 和 (4) 在 $[a,b]$ 上的解.

因为 $u_L(0)\neq u_R(0)$, 我们需要在 $t=0$ 附近构造激波层校正项

$$V(\xi,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{\infty}v_j(\xi)\varepsilon^j,$$

其中 $\xi=\frac{t}{\varepsilon}$ 为伸展变量. 将 $U(t,\varepsilon)+V(\xi,\varepsilon)$ 代入 (1) 式得到

$$\ddot{V}=\frac{2}{\varepsilon}f(\xi\varepsilon)U'\dot{V}+\frac{1}{\varepsilon^2}f(\xi\varepsilon)\dot{V}^2+[g(\xi\varepsilon,U+V)-g(\xi\varepsilon,U)], \tag{5}$$

上式中 $\dot{V}=\frac{dV}{d\xi}, \ddot{V}=\frac{d^2V}{d\xi^2}$. $f(\xi\varepsilon)$ 可写为 $f(\xi\varepsilon)=\frac{f^{(n)}(\theta\xi\varepsilon)}{n!}(\xi\varepsilon)^n(n\geq 3, 0<\theta<1)$, $g(\xi\varepsilon,U)$ 和 $g(\xi\varepsilon,U+V)$ 分别写为

$$\begin{aligned}
g(\xi\varepsilon,U) &= g(0,u_0(0))+g_t(\theta_1\xi\varepsilon,u_0(0))\xi\varepsilon+g_x(0,\eta)(\sum_{j=0}^{\infty}u_j\varepsilon^j-u_0(0)),\\
g(\xi\varepsilon,U+V) &= g(0,u_0(0)+v_0)+g_t(\theta_2\xi\varepsilon,u_0(0)+v_0)\xi\varepsilon\\
&\quad +g_x(0,\zeta)(\sum_{j=0}^{\infty}u_j\varepsilon^j-u_0(0)+\sum_{j=1}^{\infty}v_j\varepsilon^j),
\end{aligned}$$

其中 $0<\theta_i<1(i=1,2)$, η 介于 $u_0(0)$ 与 U 之间, ζ 介于 $u_0(0)+v_0$ 与 $U+V$ 之间, $u_0(0)=u_L(0)$ 或 $u_R(0)$. 在 (5) 式中令 ε^0 的系数相等可得

$$\ddot{V}_0=g(0,u_0(0)+v_0)-g(0,u_0(0)). \tag{6}$$

当取 $u_0(0)=u_L(0)$ 时, 相应的 $v_0(\xi)$ 记作 $v_L(\xi)$. 考虑到 $v_L(\xi)$ 作为激波层在 $(-\infty,0]$ 上的主要校正项, 应满足

$$v_L(-\infty)=0,\quad \dot v_L(-\infty)=0,$$

故从 (6) 式推出

$$\dot v_L^2=2F(v_L). \tag{7}$$

类似地, 当取 $u_0(0)=u_R(0)$ 时, $v_R(\xi)(\xi\in[0,+\infty))$ 应满足 $v_R(+\infty)=0,\dot v_R(+\infty)=0$, 从而有

$$\dot v_R^2=2G(v_R), \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned}F(v_L)&=\int_0^{v_L}[g(0,u_L(0)+z)-g(0,u_L(0))]dz,\\ G(v_R)&=\int_0^{v_R}[g(0,u_R(0)+z)-g(0,u_R(0))]dz.\end{aligned}$$

下面我们讨论 $u_R(0)>u_L(0)$ 的情形 (类似地讨论的 $u_R(0)<u_L(0)$ 情形). 仍由激波层校正项的性质可知此时 $\dot v_0(\xi)>0(v_0=v_L$ 或 $v_R)$, 故从 (7) 和 (8) 式推出

$$F(v_L)>0\quad G(v_R)>0, \tag{9}$$

且 $v_L(\xi)$ 和 $v_R(\xi)$ 可分别隐式地表示为

$$\xi=\int_{v_L(0)}^{v_L}\frac{dw}{\sqrt{2F(w)}} \tag{10}$$

和

$$\xi=\int_{v_R(0)}^{v_R}\frac{dw}{\sqrt{2G(w)}}. \tag{11}$$

用衔接法, 若令

$$\begin{aligned}v_L(0)&=\frac12[u_R(0)-u_L(0)]=-v_R(0),\\ \dot v_L(0^-)&=\dot v_R(0^+)+\varepsilon[u_R'(0)-u_L'(0)],\end{aligned}$$

就有

$$\begin{aligned}\int_{u_L(0)}^{u_R(0)}g(0,z)dz=&\frac12[u_R(0)-u_L(0)][g(0,u_R(0))+g(0,u_L(0))]\\ &+\frac{\varepsilon}{2}[u_R'(0)-u_L'(0)][\dot v_R(0)]+\dot v_L(0)],\end{aligned} \tag{12}$$

而 (9) 式可改写为

$$\int_{u_L(0)}^{w_L}[g(0,z)-g(0,u_L(0))]dz>0 \tag{13}$$

及

$$\int_{u_R(0)}^{w_R}[g(0,z)-g(0,u_R(0))]dz>0, \tag{14}$$

其中 $u_L(0) < w_L < s$, $s < w_R < u_R(0)$, $s = \frac{1}{2}[u_R(0) + u_L(0)]$.

于是我们得到问题 (1), (2) 的零次形式近似

$$x_0(t,\varepsilon) = \begin{cases} u_L(t) + v_L(\frac{t}{\varepsilon}), & a \le t \le 0, \\ u_R(t) + v_R(\frac{t}{\varepsilon}), & 0 < t \le b. \end{cases}$$

3 解的存在性及渐近性质

应用微分不等式理论, 我们来证明激波解的存在性以及当 $\varepsilon \to 0$ 时解的渐近性质.

定理 在 $[\mathrm{H}_1]$–$[\mathrm{H}_3]$ 的假设下, 并假设

$[\mathbf{H}_3]$ $u_R(0) > u_L(0)$, 且条件 (12) 和不等式 (13), (14) 成立, 则存在充分小的正数 ε_0, 使对每个 $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, 问题 (1), (2) 在区间 $[a,b]$ 上有一个解 $x(t,\varepsilon)$ 于 $t = 0$ 处呈激波层性态, 且在 $[a,b]$ 上一致地有 $x(t,\varepsilon) = x_0(t,\varepsilon) + O(\varepsilon)$.

证 先说明由 (10) 式所确定的 $v_L(\xi)$ 当 $\xi \to -\infty$ 时为指数型小项 (记为 EST), 事实上, 由假设 $[\mathrm{H}_3]$ 知对任意 $z \in (0, v_L(0))$, $g(0, u_L(0)+z) - g(0, u_L(0)) \ge lz$, 随之有 $\sqrt{2F(z)} \ge kz$, 这里 $k = \sqrt{l}$. 于是对任意 $v_L \in (0, v_L(0))$, 有

$$\xi = -\int_{v_L)}^{v_L(0)} \frac{dz}{\sqrt{2F(z)}} \ge -\frac{1}{k}\ln\frac{v_L(0)}{v_L} = \frac{1}{k}\ln\frac{v_L}{v_L(0)}.$$

因此 $v_L \le v_L(0)\exp(k\xi)$. 所以

$$v_L = O(\exp(k\xi))(\xi \to -\infty). \tag{15}$$

当 $\xi > 0$ 时, $v_R(\xi) \in (v_R(0), 0)$, 类似讨论得到

$$v_R = O(\exp(-k\xi))(\xi \to +\infty). \tag{16}$$

在区间 $[a,b]$ 上定义

$$\alpha(t,\varepsilon) = u_0(t) + v_0(\frac{t}{\varepsilon}) - r\varepsilon,$$
$$\beta(t,\varepsilon) = u_0(t) + v_0(\frac{t}{\varepsilon}) + r\varepsilon,$$

其中在 $[a,0]$ 上 $u_0(t) = u_L(t), v_0(\frac{t}{\varepsilon}) = v_L(\frac{t}{\varepsilon})$; 在 $[0,b]$ 上 $u_0(t) = u_R(t), v_0(\frac{t}{\varepsilon}) = v_R(\frac{t}{\varepsilon}), r > 0$ 为待定常数, 从上面的构造可知 $\alpha, \beta \in C^2([a,0) \cup (0,b]), \alpha'(0^-,\varepsilon) = \alpha'(0^+,\varepsilon), \beta'(0^-,\varepsilon) = \beta'(0^+,\varepsilon)$, 并且

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2\alpha'' - f(t)\alpha'^2 - g(t,\alpha) \\ = \ & \varepsilon^2 u_0'' + \ddot{v}_0 - f(t)(u_0' + \frac{1}{\varepsilon}\dot{v}_0)^2 - g(t, u_0 + v_0 - r\varepsilon) \\ = \ & \varepsilon^2 u_0'' + \ddot{v}_0 - \frac{2}{\varepsilon}f(t)u_0'\dot{v}_0 - \frac{1}{\varepsilon^2}f(t)\dot{v}_0{}^2 - [g(t, u_0 + v_0 - r\varepsilon) - g(t, u_0)] \\ = \ & g_x(0,\tau)r\varepsilon + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

其中 τ 介于 $u_0(0)+v_0$ 与 $u_0+v_0-r\varepsilon$ 之间, 于是可取 $r \geq \frac{K}{l}$, 这里 $K>0$ 使 $|O(\varepsilon)| \leq K\varepsilon$. 由假设 $[\mathrm{H}_3]$ 推出

$$\varepsilon^2\alpha'' - f(t)\alpha'^2 - g(t,\alpha) \geq (lr-K)\varepsilon \geq 0.$$

类似可得

$$\varepsilon^2\beta'' - f(t)\beta'^2 - g(t,\beta) \leq (K-lr)\varepsilon \leq 0.$$

又显然在 $[a,b]$ 上 $\alpha(t,\varepsilon) \leq \beta(t,\varepsilon)$, 且由 (15), (16) 式可知, 只要 $\varepsilon>0$ 充分小, 就有 $\alpha(a,\varepsilon) \leq A \leq \beta(a,\varepsilon)$,$\alpha(b,\varepsilon) \leq B \leq \beta(b,\varepsilon)$ 成立.

应用微分不等式理论 [8], 我们推出问题 (1), (2) 在 $[a,b]$ 上存在一个解 $x(t,\varepsilon)$, 且满足

$$\alpha(t,\varepsilon) \leq x(t,\varepsilon) \leq \beta(t,\varepsilon), a \leq t \leq b.$$

因此当 $\varepsilon \to 0$ 时在 $[a,b]$ 上一致地有

$$x(t,\varepsilon) = u(t) + v(\frac{t}{\varepsilon}) + O(\varepsilon).$$

由于

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x(t,\varepsilon) = \begin{cases} u_L(t), & a \leq t < 0, \\ s, & t=0, \\ u_R(t), & 0 < t \leq b, \end{cases}$$

且 $u_L(0) \neq u_R(0), s=\frac{1}{2}[u_L(0)+u_R(0)]$ 介于 $u_L(0)$ 与 $u_R(0)$ 之间. 故解 $x(t,\varepsilon)$ 在 $t=0$ 处呈激波层性态. 定理证毕.

最后顺便指出, 本文在 $n \geq 3$, 即 $f(t)$ 在 $t=0$ 具有三阶或三阶以上转向点的情形下讨论问题. 当 $n=2$ 时也存在内层激波解, 但形式渐近解的构造会复杂些, 这里不作详细讨论, 仅举一个 $f(t)$ 在 $t=0$ 具有二阶转向点的二次问题存在激波解的例子.

考虑边值问题

$$\varepsilon x'' = t^2 x'^2 + (1-x)x'; -1 < t < 1, \tag{17}$$

$$x(-1,\varepsilon)=0, \quad x(1,\varepsilon)=2, \tag{18}$$

其中 $0<\varepsilon\ll 1, f(t)=t^2$ 在 $t=0$ 具有二阶转向点. 易知 $u_L(t)=0$ 和 $u_R(t)=2$ 分别是退化问题

$$t^3u'^2 + (1-u)u' = 0, u(-1)=0,$$

$$t^3u'^2 + (1-u)u' = 0, u(1)=2$$

的解. 用合成展开法推出, 相应的激波层校正项 $v_L(\xi)$ 和 $v_R(\xi)$ 分别满足

$$\ddot{v_L} + (v_L-1)\dot{v_L} = 0, v_L(-\infty)=0, \dot{v_L}(-\infty)=0$$

和

$$\ddot{v_R} + (v_R+1)\dot{v_R} = 0, v_R(-\infty)=0, \dot{v_R}(-\infty)=0,$$

其中 $\frac{t}{\varepsilon}$ 为伸展变量. 考虑到 $\frac{1}{2}[u_R(0)-u_L(0)]=1$, 可取 $v_L(0)=1, v_R(0)=-1$, 解得

$$v_L(\xi) = 1+\tanh\frac{\xi}{2}, \quad v_R(\xi) = -1+\tanh\frac{\xi}{2}.$$

于是问题 (17), (18) 的解可表示为

$$x(t,\varepsilon)=1+\tanh\frac{t}{2\varepsilon}+O(\varepsilon)(\varepsilon\to 0).$$

由于

$$\lim_{\varepsilon\to 0}x(t,\varepsilon)=\begin{cases}0, & -1\le t\le 0,\\ 1, & t=0,\\ 2, & 0<t\le 1,\end{cases}$$

故解 $x(t,\varepsilon)$ 在 $t=0$ 处呈激波层性态.

参 考 文 献

[1] Cole J D. Perturbation methods in applied mathematics[M]. Massachusetts: Blaisdell, Waltham, 1968.

[2] Nayfeh A H. Introduction to perturbation technique[M]. New York: Wiley, 1981.

[3] de Jager E M, Jiang Furu. The theory of singular perturbation[M]. Amsterdam: North Holland Publ, 1996.

[4] Holmes M H. Introduction to perturbation methods[M]. New York: Springer-Verlag, 1999.

[5] 莫嘉琪, 刘树德唐荣荣. 一类奇摄动非线性方程 Robin 问题激波的位置 [J]. 物理学报, 2010, 59 (7): 4403–4408.

[6] 刘树德, 孙建山, 谢元静. 一类奇摄动拟线性边值问题的激波解 [J]. 数学物理学报, 2012, 32(2): 312–319.

[7] 刘树德, 鲁世平, 姚静荪, 陈怀军. 奇异摄动边界层和内层理论 [M]. 北京: 科学出版社, 2012.

[8] Chang K W, Howes F A. Nonlinear singular perturbation problems: theory and applications[M]. New York: Springer- Verlag, 1984.

SHOCK SOLUTIONS FOR SINGULARLY PERTURBED QUADRATIC PROBLEMS WITH HIGHER ORDER TURNING POINTS

MA Qing-qing, LIU Shu-de

(*Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu 241000, China*)

Abstract: Some singularly perturbed quadratic problems with higher order turning points that feature the square of first derivative are studied. Under certain conditions, the formal approximation of shock solutions is constructed using the method of composite expansions.The existence and asymptotic behavior of solutions are proved by theory of differential inequalities [6].

Keywords: singular perturbation; quadratic problems; shock solutions; the method of composite expansions; theory of differential inequalities

2010 MR Subject Classification: 34E15; 34B15; 34E20