Vol. 34 (2014)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

带振荡核奇异积分算子交换子在加权Morrey空间中的有界性质

张 蕾，郑庆玉
(临沂大学数学系, 山东 临沂 276005)

摘 要: 本文研究Morrey 空间中的交换子有界性的问题. 利用John-Nirenberg 不等式等工具建立带振荡核的奇异积分算子与BMO函数生成交换子在加权Morrey 空间中的加权估计.

关键词: 振荡核; 交换子; 加权 Morrey 空间
MR(2010)**主题分类号:** 42B20; 42B25 **中图分类号:** O174.2
文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2014)04-0684-07

1 引言

设$\alpha > 0, \alpha \neq 1$. 本文考虑的奇异积分算子为

$$Tf(x) = K_\alpha * f(x), \tag{1.1}$$

其中$K_\alpha(x) = e^{i|x|^\alpha}(1+|x|)^{-n}$ 为振荡核. 带振荡核的奇异积分算子不仅在分析理论中发挥重要作用, 而且还是研究偏微分方程的重要工具. 例如, 发展型方程解的适定性理论研究中建立解半群的相应时空估计均可归结为(1.1) 的有界性估计, 相关代表性工作可见文献[1, 2]及其中的参考文献. 最早关于(1.1) 的研究工作见文献[3, 4]. 在文献[3, 4] 中, 作者得到了T在$L^p(\mathbb{R}^n)(1<p<\infty)$ 空间中的有界性. 1983年, Chanillo, Kurtz 和Sampson [5] 建立了算子T 在加权$L^p(\mathbb{R}^n)(1<p<\infty)$ 空间中的有界性. 1986年, 他们在文献[6] 中还得到了算子T的弱型端点估计. 本文我们将在更一般的函数空间, Morrey 空间中考虑算子T 的交换子加权有界性.

经典Morrey 空间$M_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 是Morrey[7] 在研究二阶椭圆偏微分方程局部解时引入的, 其空间范数定义为:

$$\|f\|_{M_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{B\subset\mathbb{R}^n}\Big(\frac{1}{|B|^{1-\frac{p}{q}}}\int_B |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.2}$$

其中$f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le q < \infty$, B 为$\mathbb{R}^n$ 中任意球体(下同). 显然$M_{p,p}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$, 在此意义下可以将Morrey 空间看作是Lebesgue 空间的一种推广. 此后, 对Morrey 空间及其变形空间上的算子有界性质的探讨成为众多数学家研究的目标. Hardy-Littlewood 极大算子是调和分析中的重要算子之一. 设$f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$, f 的Hardy-Littlewood 极大函数定义为

$$Mf(x) = \sup_{B\ni x}\frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|dy.$$

*收稿日期: 2012-06-20 接收日期: 2013-06-25
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11271175); 山东省自然科学基金资助 (ZR2012AQ026).
作者简介: 张蕾(1980–), 女, 山东临沂, 讲师, 主要研究方向: 调和分析及其应用.

设K 为Calderón-Zygmund核[8], 以下简记为CZK. 与CZK 对应的Calderón-Zygmund 奇异积分算子(简称C-Z算子)记为

$$\widetilde{T}f(x) = \text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)dy.$$

1987年, Chiarenza 和Frasca 在文献[9] 中建立了算子M 和$\widetilde{T}$ 在$M_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 中的有界性. Weyl 分数次积分, $I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dy(0<\alpha<n)$ 在空间$M_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 中的有界性由Adams在文献[10] 中得到. 关于多线性奇异积分算子在Morrey 型空间中的有界性见文献[11–13].

作为加权Lebesgue 空间的自然推广, Komori 和Shirai 在文献[14] 中定义了加权Morrey 空间.

定义 1.1 [14] 设$1 \le p < \infty$, $0<k<1$, w为一函数. 加权Morrey 空间$M_{p,k}(w)$ 定义为

$$M_{p,k}(w) = \{f \in L^p_{\text{loc}}(w) : \|f\|_{M_{p,k}(w)} < \infty\},$$

其中空间范数定义为

$$\|f\|_{M_{p,k}(w)} = \sup_B(\frac{1}{w(B)^k}\int_B |f(x)|^p w(x)dx)^{\frac{1}{p}}.$$

显然若取$w=1, k=1-\frac{p}{q}$, 则$M_{p,k}(w) = M_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. 设$w \in A_p(1 \le p < \infty)$, 若取$k=0$, 则$M_{p,0}(w) = L^p(w)$. 若$k=1$, 则$M_{p,1}(w) = L^\infty(w)$, 其中$A_p$ 为Muckenhoupt 函数类[15]:

$$\begin{aligned}
&A_p : \sup_B(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)dx)(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)^{1-p'}dx)^{p-1} \le C, 1<p<\infty,\\
&A_1 : Mw(x) \le Cw(x); A_\infty = \cup_{p>1}A_p,
\end{aligned}$$

这里$1/p + 1/p' = 1$.

定义 1.2 设b为一局部可积函数, $b_B = \frac{1}{|B|}\int_B b(x)dx$. 若对任意球$B \subset \mathbb{R}^n$,

$$\|b\|_{\text{BMO}(\mathbb{R}^n)} = \sup_B \frac{1}{|B|}\int_B |b(x)-b_B|dx < \infty,$$

则称$b \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

我们先给出交换子的定义:

定义 1.3 给定一线性算子M 和一函数A, 交换子$[A,M]$ 定义为

$$M_A f = [A,M]f = AM(f) - M(Af).$$

目前国内外对一些算子和BMO 函数生成交换子的研究有很多. 第一个这方面的工作由Coifman, Rochberg 和Weiss [16] 在研究广义Hardy 空间的因子分解定理时得到. 他们证明了$M_A f$ 在$L^p(\mathbb{R}^n)(1<p<\infty)$ 中有界的重要条件是$A \in$BMO, 此时M 为带光滑核的经典奇异积分算子. 在文献[14] 中，Komori 和Shirai 证明了极大算子M 和C-Z 算子$\widetilde{T}$ 及其交换子在$M_{p,k}(w)(1<p<\infty)$ 中的有界性.

本文主要结论为

定理 1.1 设$0<\alpha\neq 1$, $0<k<1$ 且$b\in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, 则存在常数$C>0$使得

$$\|T_b f(x)\|_{M_{p,k}(w)}\leq C\|f\|_{M_{p,k}(w)}.$$

显然, 若$\alpha=0$, 则定理1.1 即为文献[14] 中相应C-Z 奇异积分算子的结果.

在文章第二部分我们证明定理1.1, 文中$B(x_0,r)$ 记为中心在x_0, 半径为r 的球. 对任意$\lambda>0$, $\lambda B=B(x_0,\lambda r)$.

2 定理1.1 的证明

在给出定理1.1 的证明之前, 首先给出证明过程中用到的一些引理.

引理 2.1 [17,18] 设$1\leq p<\infty$, $b\in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$. 则对任意球$B\subset \mathbb{R}^n$, 下面命题成立

(1) John-Nirenberg 不等式. 即存在常数C_1, $C_2>0$, 使对任意$\alpha>0$,

$$|\{x\in B:|b(x)-b_B|>\alpha\}|\leq C_1|B|e^{-C_2\alpha/\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}}. \tag{2.1}$$

(2)

$$|b_{2^\lambda B}-b_B|\leq 2^n\lambda\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.2}$$

引理 2.2 [19] 设$w\in A_\infty$. 则下列命题等价:

(1) $\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\sim \sup\limits_B(\frac{1}{|B|}\int_B|b(x)-b_B|^p dx)^{\frac1p}$.

(2) $\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\sim \sup\limits_B\inf\limits_{a\in\mathbb{R}}\frac{1}{|B|}\int_B|b(x)-a|dx$.

(3) $\|b\|_{\mathrm{BMO}(w)}=\sup\limits_B\frac{1}{w(B)}\int_B|b(x)-b_{B,w}|w(x)dx$, 其中

$$\mathrm{BMO}(w)=\{b:\|b\|_{\mathrm{BMO}(w)}<\infty\},\ \ b_{B,w}=\frac{1}{w(B)}\int_B b(y)w(y)dy.$$

引理 2.3 [20] 设$1\leq p<\infty$, $w\in A_p$. 则下面结论成立:

(1) w满足双倍测度条件, 即存在常数$C>0$使得

$$w(2B)\leq Cw(B). \tag{2.3}$$

(2) w满足逆双倍测度条件, 即存在常数$C>1$使得

$$w(2B)\geq Cw(B). \tag{2.4}$$

(3) w满足逆Hölder不等式, 即存在常数$C>0,r>1$使得对$\mathbb{R}^n$中任意球体B有

$$(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)^r dx)^{\frac1r}\leq C(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)dx). \tag{2.5}$$

(4) 对任意$\lambda>1$,

$$w(\lambda B)\leq C\lambda^{np}w(B). \tag{2.6}$$

(5) $w \in A_\infty$, 即存在常数$C, \delta > 0$, 使对任意可测集$Q \subset B$有

$$\frac{w(Q)}{w(B)} \leq C(\frac{|Q|}{|B|})^\delta. \tag{2.7}$$

引理 2.4 [21] 设$0 < \alpha \neq 1$, $w \in A_p(1 < p < \infty)$ 且$b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$. 则存在常数$C > 0$ 使得$\|T_b f\|_{L^p(w)} \leq C\|f\|_{L^p(w)}$.

引理 2.5 设$B = B(x_0, r)$, $0 < k < 1$, $1 < p < \infty$. 则对任意$y \in (2B)^c$, 下面不等式成立

$$(\int_{|x_0-y|>2r} \frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}|b_{B,w} - b(y)|dy)^p w(B)^{1-k} \leq C\|f\|^p_{M_{p,k}(w)}\|b\|^p_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}.$$

证 对所要证明的不等式左边应用Hölder不等式可得

$$\begin{aligned}
&(\int_{|x_0-y|>2r} \frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}|b_{B,w} - b(y)|dy)^p \\
&\leq (\sum_{j=1}^\infty \int_{2^j r<|x_0-y|<2^{j+1}r} \frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}|b_{B,w} - b(y)|dy)^p \\
&\leq (\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{|2^j B|}\int_{2^{j+1}B} |f(y)||b_{B,w} - b(y)|dy)^p \\
&\leq C[\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{|2^j B|}(\int_{2^{j+1}B} |f(y)|^p w(y)dy)^{\frac{1}{p}}(\int_{2^{j+1}B} |b_{B,w} - b(y)|^{p'} w(y)^{1-p'}dy)^{\frac{1}{p'}}]^p \\
&\leq C\|f\|^p_{M_{p,k}(w)}[\sum_{j=1}^\infty \frac{w(2^{j+1}B)^{\frac{k}{p}}}{|2^j B|}(\int_{2^{j+1}B} |b_{B,w} - b(y)|^{p'} w(y)^{1-p'}dy)^{\frac{1}{p'}}]^p.
\end{aligned}$$

简记$A = (\int_{2^{j+1}B} |b_{B,w} - b(y)|^{p'} w(y)^{1-p'}dy)^{\frac{1}{p'}}$, 易得

$$\begin{aligned}
A &\leq (\int_{2^{j+1}B} (|b_{2^{j+1}B,w^{1-p'}} - b(y)| + |b_{2^{j+1}B,w^{1-p'}} - b_{B,w}|)^{p'} w(y)^{1-p'}dy)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq \|\frac{|b_{2^{j+1}B,w^{1-p'}} - b(\cdot)| + |b_{2^{j+1}B,w^{1-p'}} - b_{B,w}|}{w(\cdot)}\|_{L^{p'}(w)} \\
&\leq (\int_{2^{j+1}B} |b_{2^{j+1}B,w^{1-p'}} - b(y)|w(y)^{1-p'}dy)^{\frac{1}{p'}} + |b_{2^{j+1}B,w^{1-p'}} - b_{B,w}|w^{1-p'}(2^{j+1}B)^{\frac{1}{p'}} \\
&=: J + JJ.
\end{aligned}$$

由引理2.2 得

$$J \leq C\|b\|_{\mathrm{BMO}(w^{1-p'})} w^{1-p'}(2^{j+1}B)^{\frac{1}{p'}} \leq Cw^{1-p'}(2^{j+1}B)^{\frac{1}{p'}}. \tag{2.8}$$

对于JJ, 由(2.2) 式得

$$\begin{aligned}
|b_{2^{j+1}B,w^{1-p'}} - b_{B,w}| &\leq |b_{2^{j+1}B,w^{1-p'}} - b_{2^{j+1}B}| + |b_{2^{j+1}B} - b_B| + |b_B - b_{B,w}| \\
&\leq \frac{1}{w^{1-p'}(2^{j+1}B)}\int_{2^{j+1}B} |b(y) - b_{2^{j+1}B}|w(y)^{1-p'}dy \\
&\quad + 2^n(j+1)\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{w(B)}\int_B |b(y) - b_B|w(y)dy \\
&:= JJ_1 + JJ_2 + JJ_3.
\end{aligned}$$

结合(2.7) 式和(2.1) 式有

$$\begin{aligned} JJ_3 &= \frac{1}{w(B)}\int_0^{\infty} w(\{x\in B: |b(y)-b_B|>\alpha\})d\alpha \\ &\le C\int_0^{\infty} e^{-C_2\alpha\delta/\|b\|}\mathrm{BMO}_{(\mathbb{R}^n)}d\alpha \\ &\le C. \end{aligned}$$

同理可得$JJ_1\le C$. 所以

$$JJ\le C(2^n(j+1)+2)w^{1-p'}(2^{j+1}B)^{\frac{1}{p'}}. \tag{2.9}$$

由(2.8) 式和(2.9) 式可得$A\le C(j+1)w^{1-p'}(2^{j+1}B)^{\frac{1}{p'}}$. 应用(2.4) 式可得

$$[\sum_{j=1}^{\infty}\frac{w(2^{j+1}B)^{\frac{k}{p}}}{|2^jB|}(\int_{2^{j+1}B}|b(y)-b_{B,w}|^{p'}w(y)^{1-p'}dy)^{\frac{1}{p'}}]^p w(B)^{1-k}\le C[\sum_{j=1}^{\infty}\frac{w(B)^{\frac{1-k}{p}(j+1)}}{w(2^{j+1}B)^{\frac{1-k}{p}}}]^p=C.$$

引理2.5 得证.

定理1.1 的证明 即证存在常数$C>0$, 使对任意固定的球$B=B(x_0,r)$, 有

$$\frac{1}{w(B)^k}\int_B|T_bf(x)|^p w(x)dx\le C\|f\|^p_{M_{p,k}(w)}. \tag{2.10}$$

作分解$f=f\chi_{2B}+f\chi_{(2B)^c}:=f_1+f_2$, 则

$$\int_B|T_bf(x)|^pw(x)dx\le C(\int_B|T_bf_1(x)|^pw(x)dx+\int_B|T_bf_2(x)|^pw(x)dx)=:K+KK.$$

由引理2.4 可得

$$K\le C\int_{2B}|f(x)|^pw(x)dx\le C\|f\|^p_{M_{p,k}(w)}w(B)^k. \tag{2.11}$$

又因为

$$\begin{aligned} |T_bf_2(x)|^p &\le C(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f_2(y)||b(x)-b(y)|}{|x-y|^n}dy)^p \\ &\le C(\int_{|x_0-y|>2r}\frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}\{|b(x)-b_{B,w}|+|b_{B,w}-b(y)|\}dy)^p. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} KK \le& C(\int_{|x_0-y|>2r}\frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}dy)^p\int_B|b(x)-b_{B,w}|^pw(x)dx \\ &+C(\int_{|x_0-y|>2r}\frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n}|b(y)-b_{B,w}|dy)^pw(B) \\ :=&KK_1+KK_2. \end{aligned}$$

由引理2.5 直接可得

$$KK_2 \le C\|f\|^p_{M_{p,k}(w)} w(B)^k.$$

KK_1 的估计可直接由(2.3) 式, (2.5) 式和引理2.2 得到. 事实上

$$\begin{aligned}
KK_1 =&(\sum_{j=1}^{\infty} \int_{2^j r<|x_0-y|<2^{j+1}r} \frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n} dy)^p \int_B |b(x)-b_{B,w}|^p w(x)dx \\
\le&(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|2^j B|} \int_{2^{j+1}B} |f(y)|dy)^p \int_B |b(x)-b_{B,w}|^p w(x)dx \\
\le&(C\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|2^j B|} (\frac{1}{w(2^{j+1}B)^k} \int_{2^{j+1}B} |f(y)|^p w(y)dy)^{\frac{1}{p}} w(2^{j+1}B)^{\frac{k}{p}})^p \\
&\times (\int_{2^{j+1}B} w(y)^{-\frac{1}{p-1}} dy)^{p-1} \int_B |b(x)-b_{B,w}|^p w(x)dx \\
\le&C\|f\|^p_{M_{p,k}(w)} (\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|2^{j+1}B|^{-\frac{1}{p}}}{|2^j B|} (\frac{1}{|2^{j+1}B|} \int_{2^{j+1}B} w(y)dy)^{-\frac{1}{p}} w(2^{j+1}B)^{\frac{k}{p}})^p \\
&\times \int_B |b(x)-b_{B,w}|^p w(x)dx \\
\le&C\|f\|^p_{M_{p,k}(w)} \|b\|^p_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} \sum_{j=1}^{\infty} (\frac{w(B)^{\frac{1-k}{p}}}{w(2^{j+1}B)^{\frac{1-k}{p}}})^p w(B)^k \\
\le&C\|f\|^p_{M_{p,k}(w)} w(B)^k.
\end{aligned}$$

所以

$$KK \le C\|f\|^p_{L^{p,k}(w)} w(B)^k. \tag{2.12}$$

由(2.11) 式和(2.12) 式可得到(2.10) 式, 从而定理1.1 得证.

参 考 文 献

[1] Colliander J, Keel M, Staffilani G, Takaoka H, Tao T. Sharp global well-posedness for KdV and modified KdV on $\mathbb{R}$ and $\mathbb{T}$ [J]. J. Amer. Math. Soc., 2003, 16: 705–749.

[2] Li J F, Shi S G. Local well-posedness for the dispersion generalized periodic KdV equation[J]. J. Math. Anal. Appl., 2011, 379: 706–718.

[3] Drobot V, Naparstek A, Sampson G. (L^p, L^q) mapping properties of convolution transforms[J]. Studia Math., 1976, 55: 41–70.

[4] Jurkat W, Sampson G. The complete solution to the (L^p, L^q) mapping problem for a calss of oscillating kernels[J]. Indiana Univ. Math. J., 1981, 30: 403–413.

[5] Chanillo S, Kurtz D, Sampson G. Weighted L^p estimates for oscillating kernels[J]. Ark. Math., 1983, 21: 233–257.

[6] Chanillo S, Kurtz D, Sampson G. Weighted weak (1,1) and weighted L^p estimates for oscillating kernels[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1986, 295: 127–145.

[7] Morrey C B. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1938, 43: 126–166.

[8] Lu S Z, Ding Y, Yan D Y. Singular integrals and related topics[M]. Singapore: World Scientific Publishing, 2007.

[9] Chiarenza F, Frasca M. Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function[J]. Rend. Math. Appl., 1987, 7(7): 273–279.

[10] Adams D R. A note on Riesz potentials[J]. Duke Math. J., 1975, 42: 765–778.

[11] Grafakos L, Torres R. Multilinear Calderón-Zygmund theory[J]. Adv. Math., 2002, 165: 124–164.

[12] Shi Y L, Tao X X. Multilinear Riesz potential operators on Herz-type spaces and generalized Morrey spaces[J]. Hokkaido Math. J., 2009, 38: 635–662.

[13] Fu Z W, Lin Y, Lu S Z. Central BMO estimates for commutators of singular operators with rough kernels[J]. Acta Math. Sinica (English Ser.), 2008, 24(3): 373–386.

[14] Komori Y, Shirai S. Weighted Morrey spaces and a singular integral operator[J]. Math. Nachr., 2009, 282: 219–231.

[15] Muckenhoupt B. Weighted norm inqualities for the Hardy maximal function[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1972, 165: 207–226.

[16] Ben-Artzi M, Saut J. Uniform decay estimates for a class of oscillatory integrals and applications[J]. Diff. Int. Eq., 1999, 12: 137–145.

[17] Lu S Z. Four lectures on real H^p spaces[M]. Singapore: World Scientific Publishing, 1995.

[18] Torchinsky A. Real variable methods in harmonic analysis[M]. San DIego: Academic Press, 1986.

[19] Muckenhoupt B, Wheeden R. Weighted bounded mean oscillation and the Hilbert transform[J]. Studia Math., 1976, 54: 221–237.

[20] Grafakos L. Classical and modern fourier analysis[M]. New Jersey: Pearson Education, Inc., 2004.

[21] Shi S G. Weighted boundedness for the commutators of one class of oscillatory integral operators[J]. J. Beijing Normal Univ. (Nat. Sci.), 2011, 47: 344–346.

BOUNDEDNESS OF COMMUTATORS FOR SINGULAR INTEGRAL OPERATORS WITH OSCILLATING KERNELS ON WEIGHTED MORREY SPACES

ZHANG Lei , ZHENG Qing-yu

(*Department of Mathematics, Linyi University, Linyi 276005, China*)

Abstract: In this paper, we study the boundedness of commutators on weighted Morrey spaces. By using John-Nirenberg inequality we obtain the weighted estimates for commutators formed by singular integral operators with oscillating kernels and BMO functions on weighted Morrey spaces.

Keywords: oscillating kernel; commutator; weighted Morrey space

2010 MR Subject Classification: 42B20; 42B25