Vol. 34 (2014)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一类非线性二阶锥规划的非光滑牛顿法

胡春燕 [a], 贵竹青 [b], 朱志斌 [b], 朱华丽 [b]
(桂林电子科技大学, a. 电子工程与自动化学院; b. 数学与计算科学学院
广西 桂林 541004)

摘 要: 本文研究了非线性二阶锥规划问题. 利用投影映射将非线性二阶锥规划问题的 KKT 最优性条件转化成非光滑方程组, 获得了一个修正的中心路径非光滑牛顿法. 在适当的条件下保证方程组的 B - 次微分在任意点都可逆, 并且证明算法具有全局收敛性.

关 键 词: 非线性二阶锥规划; B - 次微分; 非光滑牛顿法; 全局收敛性
MR(2010) **主题分类号**: 90C30　　**中图分类号**: O221.2
文献标识码: A　　**文章编号**: 0255-7797(2014)03-0589-08

1 引言

考虑如下的非线性二阶锥规划问题 (NSOCP)

$$\min\ f(x) \quad \text{s.t.}\ Ax=b,\ \ x\in K, \tag{1.1}$$

其中 $f: R^n \to R$ 是二阶连续可微函数, $A\in R^{m\times n}$, $b\in R^m$. 将向量 x 可分成 r 块

$$x=(x_1,\cdots,x_r),\ x_i\in R^{n_i},\ i=1,\cdots,r.$$

同理矩阵 A 也可分为 r 块

$$A=(A_1,\cdots,A_r),\ A_i\in R^{m\times n_i},\ i=1,\cdots,r,n_1+\cdots n_r=n.$$

那么二阶锥 $K=\{(x_0;\bar{x})\in R\times R^{n-1}|x_0\geq\|\bar{x}\|\}$ 可表示成 $K=K_1\times\cdots\times K_r$ 的笛卡尔乘积的形式, 其中 $K_i=\{(x_{i0};\bar{x}_i)\in R\times R^{n_i-1}|x_{i0}\geq\|\bar{x}_i\|\}$, $\|\cdot\|$ 是欧式范数. 进行这样的分块之后, 使得每个 x_i 都属于一个单块的二阶锥.

定义二阶锥 K 的内部、边界以及非零边界分别为

$$\begin{aligned}&\text{int}K=\{x\in K|x_0>\|\bar{x}\|\},bdK=\{x\in K|x_0=\|\bar{x}\|\},\\&bd^+K=\{x\in K|x_0=\|\bar{x}\|\ \text{和}\ x\neq 0\}.\end{aligned}$$

关于单块的二阶锥 $K_i(i=1,\cdots,r)$ 的内部、边界以及非零边界可类似定义.

本文还需运用 B - 次微分和半光滑的知识, 下面仅作简单介绍.

*收稿日期: 2012-12-28　　接收日期: 2013-09-03
基金项目: 国家自然科学基金 (No.11361018); 广西杰出青年基金 (2012GXNSFFA060003).
作者简介: 胡春燕 (1975–), 女, 湖南双峰, 硕士, 研究方向: 最优化及其应用.

定义 1.1 映射 $T: R^n \to R^m$ 局部 Lipschitz 连续. 记 $\mathcal{D}_T$ 为 T 的 Frèchet 方向可微点集合, T 在 z 点处的 Jacobian 为 $T'(z)$. T 在 z 处的 B - 次微分记为

$$\partial_B T(z) = \left\{ \lim_{k\to\infty} T'(z^k) | z^k \in \mathcal{D}_T, z^k \to z \right\}.$$

定义 1.2 假设 $T: R^n \to R^m$ 局部 Lipschitz 连续. 称 T 在 z 处是半光滑的, 如果

(i) T 在 z 处是方向可微的;

(ii) 对任何 $h \in R^n$, $h \to 0$, 任何 $V \in \partial T(z+h)$ 满足

$$T(z+h) - T(z) - Vh = o(\|h\|).$$

进一步, 若 T 在 z 处是半光滑的, 且对任意 $h \in R^n$, $h \to 0$, 任何 $V \in \partial T(z+h)$ 满足

$$T(z+h) - T(z) - Vh = O(\|h\|^2),$$

则称 T 在 z 处是强半光滑的.

二阶锥规划的发展历程较短, 所以可参看的文献很有限, 有兴趣的读者可参看文献 [1, 2]. 研究者们的成果主要在线性二阶锥规划方面, 且通常选用内点法求解. 但最近也有光滑和半光滑法求解二阶锥规划, 见文献 [3, 4]. 在非线性二阶锥规划方面的成果比较有限.

因为二阶锥规划在其它的数学领域和学科中有广泛的应用, 所以它在较短的时间内成为较热门的研究课题. 二阶锥规划, 半定规划以及线性规划统称为对称锥规划. 二阶锥规划在组合优化, 金融优化, 图像恢复, 信号处理, 传感网络定位等方面有广泛的应用.

本文研究的问题是目标函数为二阶连续可微函数, 含有线性约束和锥约束的非线性二阶锥规划问题. 给出原问题的 KKT 条件, 利用一个投影映射将互补性条件转化成非光滑函数. KKT 条件即可转化成非光滑方程组. 分析方程组的半光滑性质, 求出不可微点处的 B - 次微分. 给出适当的条件保证方程组的 B - 次微分在任意点处可逆. 运用中心路径非光滑牛顿法解非线性方程组, 在适当的条件下证明算法的全局收敛性.

2 预备知识

众所周知, 解问题 (1.1) 等价于解最优性条件:

$$\begin{array}{c} \nabla f(x) - A^T\nu - y = 0, \quad Ax = b, \\ x_i \in K_i, y_i \in K_i, x_i^T y_i = 0, i = 1, \cdots, r. \end{array} \tag{2.1}$$

在系统 (2.1) 中, 锥约束条件不易求解, 所以可将它转化成易计算的非线性半光滑的方程组. 文献 [5] 中已经提出了一种投影映射, 可求解此问题.

定义 2.1 (投影到二阶锥的映射) 任取 $s \in R^n$, 定义映射

$$G(s) = [s]_+ \tag{2.2}$$

表示对任意的 $s \in R^n$, $[s]_+$ 为 s 到 K 内的投影.

由文献 [5] 知, 以下结论成立.

引理 2.1 对任意 $s=(s_0;\bar{s})\in R\times R^{n-1}$, 有

$$[s]_+=|\lambda_1|c_1+|\lambda_2|c_2, \tag{2.3}$$

其中 λ_1,λ_2 和 c_1,c_2 分别是 s 的谱值和谱向量, 且分别表示为

$$\begin{aligned} &\lambda_1=s_0-\|\bar{s}\|, && \lambda_2=s_0+\|\bar{s}\|,\\ &c_1=\begin{cases}\frac{1}{2}(1;-\frac{\bar{s}}{\|\bar{s}\|}), & \text{如果 } \bar{s}\neq 0,\\ \frac{1}{2}(1;-\bar{w}), & \text{如果 } \bar{s}=0,\end{cases} && c_2=\begin{cases}\frac{1}{2}(1;\frac{\bar{s}}{\|\bar{s}\|}), & \text{如果 } \bar{s}\neq 0,\\ \frac{1}{2}(1;\bar{w}), & \text{如果 } \bar{s}=0,\end{cases}\end{aligned} \tag{2.4}$$

其中 $\bar{w}$ 是 R^{n-1} 中满足 $\|w\|=1$ 的任意向量.

引理 2.2 投影映射 G 强半光滑.

下述结论将互补性条件转化成容易处理的非线性方程组. 证明参见文献 [5].

命题 2.1 任取 $x,y\in R^n$, $x+y-G(x-y)=0$ 当且仅当 $x,y\in K$, $x^Ty=0$.

令 $s=(x,\nu,y)\in R^n\times R^m\times R^n$. 由命题 知 KKT 条件 (2.1) 等价于方程组 $F(s)=0$, 其中 $F:R^n\times R^m\times R^n\to R^n\times R^m\times R^n$,

$$F(s)=F(x,\nu,y)=\begin{pmatrix}\nabla f(x)-A^T\nu-y\\ Ax-b\\ x_1+y_1-G(x_1-y_1)\\ \vdots\\ x_r+y_r-G(x_r-y_r)\end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

采用中心路径牛顿法求解方程组 (2.5), 需求出 $F(s)$ 的 B - 次微分以求牛顿方向. $F(s)=0$ 由 $r+2$ 个方程组组成, 且第一个方程组是二阶连续可微函数, 第二个方程组是线性方程组, 所以重点来考虑后 r 个方程组. 因为后 r 个方程组强半光滑, 如果 f 的 Hessian 矩阵局部 Lipschitz 连续, 则 F 是强半光滑的.

由文献 [6] 的命题 2 知, $\forall s\in R^n$, s 的谱值和谱向量由式 (2.4) 给出, G 在 s 处可微当且仅当 $|\cdot|$ 在 λ_1, λ_2 处可微. 而映射 $|\alpha|$ 在 $\alpha\neq 0$ 处可微, 只有当 $\alpha=0$, 即 $s_0=\pm\|\bar{s}\|$ 时, $|\cdot|$ 不可微.

引理 2.3 任取 $s=(s_0;\bar{s})\in R\times R^{n-1}$, $H\in\partial_B G(s)$, 则 H 的表述如下:

(a) 若 $s_0\neq\pm\|\bar{s}\|$, 则 G 在 s 处连续可微且 $H=G'(s)$,

$$G'(s)=\begin{cases}-I_n, & \text{如果 } s_0<-\|\bar{s}\|,\\ I_n, & \text{如果 } s_0>\|\bar{s}\|,\\ \begin{pmatrix}0 & \bar{w}^T\\ \bar{w} & J\end{pmatrix}, & \text{如果 } -\|\bar{s}\|<s_0<\|\bar{s}\|,\end{cases} \tag{2.6}$$

其中 $\bar{w}=\frac{\bar{s}}{\|\bar{s}\|}$, $J=\frac{s_0}{\|\bar{s}\|}(I_{n-1}-\bar{w}\bar{w}^T)$.

(b) 若 $\bar{s}\neq 0$ 且 $s_0=\|\bar{s}\|$, 则

$$H\in\left\{I_n,\begin{pmatrix}0 & \bar{w}^T\\ \bar{w} & J\end{pmatrix}\right\},$$

其中 $\bar{w}=\frac{\bar{s}}{\|\bar{s}\|}$, $J=I_{n-1}-\bar{w}\bar{w}^T$.

(c) 若 $\bar{s}\neq 0$ 且 $s_0=-\|\bar{s}\|$, 则

$$H\in\left\{-I_n,\begin{pmatrix}0 & \bar{w}^T\\ \bar{w} & J\end{pmatrix}\right\},$$

其中 $\bar{w}=\frac{\bar{s}}{\|\bar{s}\|}$, $J=\bar{w}\bar{w}^T-I_{n-1}$.

(d) 若 $s=0$, 则 $H=-I_n$ 或者 $H=I_n$ 或者

$$H\in\left\{\begin{pmatrix}0 & \bar{w}^T\\ \bar{w} & J\end{pmatrix}|J=\varrho(I_{n-1}-\bar{w}\bar{w}^T),|\varrho|\leq 1,\|\bar{w}\|=1\right\}.$$

由引理 2.3 知, 任取 $H\in\partial_B G(s)$ 有如下三种形式

$$H=-I_n,H=I_n,H=\begin{pmatrix}0 & \bar{w}^T\\ \bar{w} & J\end{pmatrix},\tag{2.7}$$

其中 $J=\varrho(I_{n-1}-\bar{w}\bar{w}^T),|\varrho|\leq 1,\|\bar{w}\|=1$. 在 (a)–(c) 中, $\bar{w}=\bar{s}/\|\bar{s}\|$, 而在 (d) 中 $\bar{w}$ 只需满足模为 1. 在 (a) 中 $\varrho=s_0/\|\bar{s}\|$, 且 $-1<\varrho<1$; 在 (b) 中 $\varrho=1$; 在 (c) 中 $\varrho=-1$; 在 (d) 中是满足 $|\varrho|\leq 1$ 的实数.

为了运用中心路径牛顿法来求解需要引入参数 θ, 对方程组 (2.5) 作如下扰动

$$F_\theta(x,\nu,y)=\begin{pmatrix}\nabla f(x)-A^T\nu-y\\ Ax-b\\ x_1+y_1-G(x_1-y_1)-\theta e\\ \vdots\\ x_r+y_r-G(x_r-y_r)-\theta e\end{pmatrix}.\tag{2.8}$$

算法的中心思想是利用牛顿法求解非线性方程组 (2.8), 且迭代的每一步都要在中心邻域内.

函数 $F_\theta(x,\nu,y)$ 在任意点 (x,ν,y) 处的 B - 次微分为

$$W=\begin{pmatrix}U & -A^T & -I_n\\ A & 0 & 0\\ I_n-H & 0 & I_n+H\end{pmatrix},\tag{2.9}$$

其中 $U=\nabla^2 f(x),I_n-H$, I_n+H 分别是函数 $\phi_\theta(x,y)=x+y-G(x-y)-\theta e$ 在 x,y 处的 $B-$ 次微分, 且矩阵 I_n-H, I_n+H 都有一重特征值 $\eta_0=0$ 和 $\eta_2=2$ 及 $n-2$ 重特征值 $\eta_n=\varrho$, $\varrho\in(0,2)$.

下面给出合适的条件, 使得函数 F_θ 在任意点处的 B - 次微分可逆.

令 $H^a,H^b\in R^{n\times n}$ 是两个正半定矩阵使得 $H^a+H^b\succ 0$, 且 H^a 和 H^b 有相同的特征向量基底, 所以存在正交矩阵 $Q\in R^{n\times n}$ 和对角矩阵 $P^a=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $P^b=$

$\mathrm{diag}(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 满足 $H^a = QP^aQ^T$, $H^b = QP^bQ^T$ 对所有的 $j = 1, 2, \cdots, n$, 有 $a_j \geq 0$, $b_j \geq 0$, $a_j + b_j > 0$. 将指标集 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 分割成 $\alpha \cup \beta \cup \gamma$,

$$\alpha = \{j|a_j > 0, b_j = 0\}, \beta = \{a_j > 0, b_j > 0\}, \gamma = \{j|a_j = 0, b_j > 0\}. \tag{2.10}$$

令 $Q_\alpha, Q_\beta, Q_\gamma$ 表示 Q 的子阵, 且它们由矩阵 Q 对应的指标集 $\alpha \cup \beta \cup \gamma$ 对应的列组成. 同理将对角矩阵分割为 $P^a = \mathrm{diag}(P^a_\alpha, P^a_\beta, P^a_\gamma)$, $P^b = \mathrm{diag}(P^b_\alpha, P^b_\beta, P^b_\gamma)$.

令

$$P_\beta = (P^b_\beta)^{-1} P^a_\beta. \tag{2.11}$$

参见文献 [8], 有以下结论成立.

引理 2.4 令 $U \in R^{n\times n}$ 是对称矩阵, $A \in R^{m\times n}$. 对于上述各量, 假设下面两个条件成立:

(a) 矩阵 $(AQ_\beta, AQ_\gamma) \in R^{m\times(|\beta|+|\gamma|)}$ 行满秩;

(b) 在子空间

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} d_\beta \\ d_\gamma \end{pmatrix} \in R^{|\beta|+|\gamma|} | (AQ_\beta, AQ_\gamma) \begin{pmatrix} d_\beta \\ d_\gamma \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

上, 矩阵

$$\begin{pmatrix} Q^T_\beta U Q_\beta + P_\beta & Q^T_\beta U Q_\gamma \\ Q^T_\gamma U Q_\beta & Q^T_\gamma U Q_\gamma \end{pmatrix} \in R^{(|\beta|+|\gamma|)\times(|\beta|+|\gamma|)}$$

正定. 则矩阵

$$M = \begin{pmatrix} U & -A^T & -I_n \\ A & 0 & 0 \\ H^a & 0 & H^b \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

非奇异.

尤其, 当 $U = 0$ 时, 如果矩阵 AQ_γ 列满秩, 则当条件 (a) 成立时, 矩阵 M 非奇异.

由引理 2.3 与引理 2.4, 可得到以下结论.

定理 2.1 函数 $F_\theta(x, \nu, y)$ 在任意点 (x, ν, y) 处的 B - 次微分如 (2.9) 式所示. 令 $I_n - H = H^a$, $I_n + H = H^b$, 当引理 2.3 中的条件满足时 (2.9) 式中的 W 可逆.

3 算法及其性质

首先, 作如下记号, $\forall s \in R^{2n+m}$, F 在 s 点处的 B - 次微分为 $W(s)$. 中心邻域为

$$N(\delta) = \left\{(x, \nu, y) | \nabla f(x) - A^T\nu - y = 0, Ax = b, \|F_\theta(x, \nu, y)\| \leq \delta\theta\right\}. \tag{3.1}$$

下面给出算法的具体步骤.

算法 A:

步骤 0 初始步 任意选取 $s^0 = (x^0, \nu^0, y^0) \in R^n \times R^m \times R^n$ 为初始点. 给定常数 $\sigma, \alpha_1 \in (0, 1)$. 选取常数 $\delta > 0$, $\theta_0 > 0$, 使得 $\|F_{\theta_0}(s^0)\| \leq \delta\theta_0$. 令 $k = 0$.

步骤 1 终止条件 若 $\|F_0(s^k)\| = 0$, 停止.

步骤 2 预估步 解方程组

$$W(s^k)d^k = -F_{\theta_k}(s^k), \tag{3.2}$$

得 $d^k = (\Delta x^k, \Delta\nu^k, \Delta\mu y^k) \in R^n \times R^m \times R^n$. 若 $\|F_0(s^k + d^k)\| = 0$, 停止; 否则, 若 $\|F_{\theta_k}(s^k + d^k)\| > \delta\theta_k$, 令 $\tilde{s}^k = s^k$, $\tilde{\theta}^k = \theta^k$, $\vartheta_k = 1$; 若 $\|F_{\theta_k}(s^k + d^k)\| \le \delta\theta_k$, 令 $\vartheta_k = \alpha_1^p$, p 是使得下面不等式成立的正整数

$$\begin{aligned} &\|F_{\alpha_1^q\theta_k}(s^k + d^k)\| \le \delta\alpha_1^q\theta_k, q = 0, 1, \cdots, p, \\ &\|F_{\alpha_1^{p+1}\theta_k}(s^k + d^k)\| > \delta\alpha_1^{p+1}\theta_k. \end{aligned} \tag{3.3}$$

令

$$\tilde{\theta}_k = \vartheta_k\theta_k, \tilde{s}^k = \begin{cases} s^k & p = 0, \\ s^k + d^k & p \ne 0. \end{cases}$$

步骤 3 校正步 解方程组

$$W(\tilde{s}^k)\tilde{d}^k = -F_{\tilde{\theta}_k}(\tilde{s}^k), \tag{3.4}$$

得 $\tilde{d}^k = (\Delta\tilde{x}^k, \Delta\tilde{\nu}^k, \Delta\tilde{y}^k) \in R^n \times R^m \times R^n$. 设 $\tilde{\vartheta}_k$ 是 $\{1, \alpha_1, \alpha_1^2, \cdots\}$ 中使得下式成立的最大值

$$\|F_{\tilde{\theta}_k}(\tilde{s}^k + \tilde{\vartheta}_k\tilde{d}^k)\|^2 \le \|F_{\tilde{\theta}_k}(\tilde{s}^k)\|^2 + \tilde{\vartheta}_k\sigma(\nabla\|F_{\tilde{\theta}_k}(\tilde{s}^k)\|^2)^T\tilde{d}^k. \tag{3.5}$$

令 $s^{k+1} = \tilde{s}^k + \tilde{\vartheta}_k\tilde{d}^k$.

步骤 4 修正 设 γ_k 是 $\{1, \alpha_1, \alpha_1^2, \cdots\}$ 中使得下式成立的最大值

$$\|F_{(1-\gamma_k)\tilde{\theta}_k}(s^{k+1})\| \le \delta(1 - \gamma_k)\tilde{\theta}_k. \tag{3.6}$$

令 $\theta_{k+1} = (1 - \gamma_k)\tilde{\theta}_k$, $k = k + 1$, 转步 1.

对于上述算法, 易知有以下良定性结论成立.

定理 3.1 在引理 2.4 的条件下, 对任意 $k \ge 0, \forall\theta_k > 0$, 方程组 (3.2) 和 (3.4) 都存在唯一解. 从而步骤 2, 3, 4 是良定的.

引理 3.1 在引理 2.4 的条件下, 则当 $k \ge 0$ 时, 有 $\theta_k = \theta_0(1-\gamma_0)\vartheta_0 \cdots (1-\gamma_{k-1})\vartheta_{k-1} > 0$. 而且对任意 $k \ge 0$, 有 $\|F_{\theta_k}(s^k)\| \le \delta\theta_k$. 此时, 当 $k \to \infty$ 时, $\nabla f(x^k) - A^T\nu^k - y^k \to 0$, $Ax^k - b \to 0$.

4 算法的全局收敛

本节证明算法 A 的全局收敛性.

定理 4.1 矩阵 $W(s)$ 可逆, 序列 $\left\{(s^k, \theta_k)\right\}$ 由算法 A 产生. 设 $(s^*, \theta_*) = (x^*, \nu^*, y^*, \theta_*)$ 是它的一个聚点, 则 $\theta_* = 0$, s^* 是 $F_0(s) = 0$ 的解.

证 不失一般性, 假设 $\lim\limits_{k\to\infty}(s_k, \theta_k) = (s^*, \theta_*)$. $\{\theta_k\}$ 由算法 A 产生, 由引理 3.1 知, 序列 $\{\theta_k\}$ 单调下降, 且有下界, 即 $\theta_* \ge 0$. 利用反证法证明 $\theta_* = 0$. 假设 $\theta_* > 0$, 则由算法 A 步骤 2 知, 当 k 充分大时有

$$\tilde{s}^k = s^k, \tilde{\theta}_k = \theta_k, \vartheta_k = 1. \tag{4.1}$$

因为 θ_k 的迭代公式为 $\theta_k = \theta_0(1 - \gamma_0)\vartheta_0 \cdots (1 - \gamma_{k-1})\vartheta_{k-1}$, 而且 $\theta_k \to \theta_* > 0$, 所以当 k 充分大时 $\lim\limits_{k\to\infty}\gamma_k = 0$. 对任意的 k, 有 $\vartheta_k \ge 0$, 不妨设 $\lim\limits_{k\to\infty}\inf\tilde{\vartheta}_k > 0$ 和 $\lim\limits_{k\to\infty}\inf\tilde{\vartheta}_k = 0$.

(i) 若 $\lim\limits_{k\to\infty}\inf\tilde{\vartheta}_k>0$, 则存在常数 $\tilde{\vartheta}>0$, 使得当 k 充分大时有 $\tilde{\vartheta}_k>\tilde{\vartheta}$. 由 (3.4) 和 (3.5) 式得

$$\|F_{\tilde{\theta}_k}(\tilde{s}^k+\tilde{\vartheta}_k\tilde{d}^k)\|^2\leq(1-2\sigma\tilde{\vartheta}_k)\|F_{\tilde{\theta}_k}(\tilde{s}^k)\|^2, \tag{4.2}$$

即

$$\|F_{\tilde{\theta}_k}(s^{k+1})\|\leq\sqrt{1-2\sigma\tilde{\vartheta}_k}\|F_{\tilde{\theta}_k}(\tilde{s}^k)\|\leq\sqrt{1-2\sigma\tilde{\vartheta}_k}\tilde{\theta}_k\delta. \tag{4.3}$$

由步骤 4 知, $\frac{\gamma_k}{\alpha_1}$ 不满足 (3.6) 式, 由文献 [5] 和 (4.3) 知,

$$\begin{aligned}\delta(1-\frac{\gamma_k}{\alpha_1})\tilde{\theta}_k &\leq \|F_{\tilde{\theta}_k}(s^{k+1})\|+\|F_{(1-\frac{\gamma_k}{\alpha_1})\tilde{\theta}_k}(s^{k+1})-F_{\tilde{\theta}_k}(s^{k+1})\|\\ &\leq \sqrt{1-2\sigma\tilde{\vartheta}_k}\tilde{\theta}_k\delta+\frac{\sqrt{2}\gamma_k}{\alpha_1}\tilde{\theta}_k.\end{aligned}$$

因此, $\gamma_k\geq\frac{\alpha_1\delta}{\delta+\sqrt{2}}(1-\sqrt{1-2\sigma\tilde{\vartheta}_k})>0$, 这与 $\lim\limits_{k\to\infty}\gamma_k=0$ 矛盾.

(ii) 若 $\lim\limits_{k\to\infty}\inf\tilde{\vartheta}_k=0$, 不妨设 $\lim\limits_{k\to\infty}\tilde{\vartheta}_k=0$. F 是关于 s 和 θ 的连续可微函数. 由步骤 3 的线搜索知 $\bar{\vartheta}=\frac{\tilde{\vartheta}_k}{\alpha_1}$ 不满足 (3.5) 式, 即

$$\frac{\|F_{\tilde{\theta}_k}(\tilde{s}^k+\bar{\vartheta}_k\tilde{d}^k)\|^2-\|F_{\tilde{\theta}_k}(\tilde{s}^k)\|^2}{\bar{\vartheta}_k}>\sigma(\nabla\|F_{\tilde{\theta}_k}(\tilde{s}^k)\|^2)^T\tilde{d}^k.$$

令 $k\to\infty$, 两边求极限得

$$(\nabla\|F_{\theta_*}(s^*)\|^2)^Td^*\geq\sigma(\nabla\|F_{\theta_*}(s^*)\|^2)^Td^*,$$

则

$$(\nabla\|F_{\theta_*}(s^*)\|^2)^Td^*\geq 0. \tag{4.4}$$

由式 (3.4) 和 (3.5) 知

$$W(s^*)d^*=-F_{\theta_*}(s^*),$$

因此

$$(\nabla\|F_{\theta_*}(s^*)\|^2)^Td^*=F_{\theta_*}(s^*)W(s^*)d^*=-\|F_{\theta_*}(s^*)\|^2\leq 0. \tag{4.5}$$

由式 (4.4) 和 (4.5) 知

$$F_{\theta_*}(s^*)=0. \tag{4.6}$$

又由算法 A 步骤 4 知, $\frac{\gamma_k}{\alpha_1}$ 不满足 (3.6) 式, 即

$$\|F_{(1-\frac{\gamma_k}{\alpha_1})\tilde{\theta}_k}(s^{k+1})\|>\delta(1-\frac{\gamma_k}{\alpha_1})\tilde{\theta}_k.$$

令 $k\to\infty$, 上式两边取极限得

$$\|F_{\theta_*}(s^*)\|\geq\delta\theta_*>0.$$

这与 (4.6) 式矛盾, 因此假设不成立, 即 $\theta_*=0$. 由引理 3.1 的 (iii) 知, s^* 是 $F_0(s)=0$ 的唯一解. 定理证明完毕.

参 考 文 献

[1] Alizadeh F, Goldfarb D. Second-order cone programming[J]. Mathematical Programming, 2003, 95: 3–51.

[2] Lobo M S, Vandenberghe L, Boyd S, Lebret H. Applications of second-order cone programming[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1998, 284: 193–228.

[3] 迟晓妮, 刘三阳. 二次锥规划的预估 - 校正光滑方法 [J]. 系统科学与数学, 2009, 29: 547–554.

[4] Liu Y J, Zhang L W, Wang Y H. Convergence properties of a smoothing method for linear second-order cone programming[J]. Advances in Mathematics, 2007, 4: 491–502.

[5] Fukushima M, Luo Z Q, Tseng P. Smoothing funtion for second-order-cone complementarity problems[J]. SIAM Journal on Optimization, 2001, 12: 436–460.

[6] Chen J S, Chen X, Tseng P. Analysis of nonsmooth vector-valued functions associated with second-order cones[J]. Marh. Program., 2004, 101: 95–117.

[7] Hayashi S, Yamashita N, Fukushima M. A combined smoothing and regularization method for monotone second-order cone complementarity problems[J]. SIAM J. on Opti., 2005, 15: 593–615.

[8] Kanzow C, Ferenczi I, Fukushima M. On the local convergence of semismooth Newton methods for linear and nonlinear second-order cone programs without strict complementarity[J]. SIAM J. on Opti., 2009, 20: 297–320.

[9] Huang Z H, Han J Y. Non-interior continuation method for solving the monotone semidefinite complementarity problem[J]. Applied Mathematics and Optimization, 2003, 47: 95–211.

[10] Pang J S, Qi L. Semismooth homeomorphisms and strong stability of semidefinite and Lorentz complementarity problems[J]. Mathematics of Operations Research, 2003, 28: 39–63.

A NON-SMOOTHING NEWTON METHOD FOR NONLINEAR SECOND-ORDER CONE PROGRAMMING

HU Chun-yan[a], GUI Zhu-qing[b], ZHU Zhi-bin[b], ZHU Hua-li[b]

(*a. School of Electronic Engineering and Automation;*

b. School of Mathematics and Computational Sciences,

Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China)

Abstract: In this paper, the second order cone programming is studied. By using the project mapping, the corresponding optimal conditions are transformed into a nonsmoothing system. Then, based on the center path idea, a modified nonsmoothing Newton method is proposed. Under some suitable conditions, the B-subdifferential of the system is reversible at any point, and the algorithm is proved to be global convergent.

Keywords: nonlinear second-order cone programming; B-subdifferential; non-smoothing Newton method; global convergence.

2010 MR Subject Classification: 90C30