

一类 α 次殆 β 型螺形映照的偏差上界估计

刘爱超¹, 陈莹¹, 刘浩²

(1. 黄淮学院数学科学系, 河南 驻马店 463000)

(2. 河南大学数学与信息科学学院, 河南 开封 475004)

摘要: 本文研究了复向量空间 C_n 中开单位球 B_n , 复 Banach 空间中单位球 B 和域 $\Omega_{p_1, \dots, p_n}$ 上一类 α 次殆 β 型螺形映照的偏差估计问题. 利用不等式、矩阵及 α 次殆 β 型螺形映照的增长定理等方法, 获得了上述域上的一类 α 次殆 β 型螺形映照的偏差上界估计, 所得结果推广了一些已知的结论.

关键词: α 次殆 β 型螺形映照; 增长定理; 偏差上界

MR(2010) 主题分类号: 32A30; 32H02

中图分类号: O174.56

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2014)03-0562-07

1 引言

在单复变函数中, 众所周知双全纯函数的偏差定理是成立的, 如下所示.

定理 1.1 ^[1] 若 f 为复平面单位圆盘 U 上正规化双全纯函数, 则 $\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}$.

然而, 在多复变量的情况下, Cartan^[2] 指出正规化的双全纯映照相应的偏差定理不再成立. 而且他建议人们去研究双全纯星形映照, 双全纯凸映照及其它重要的双全纯映照子族精确的偏差定理. 遗憾的是, 目前, 我们仅能获得星形映照, 螺形映照及其扩充子族的增长与掩盖定理 (相关结果可见文献 [3–4]), 但对应的偏差结果仍处于猜测阶段. 近年来, 双全纯凸 (准凸) 映照的偏差定理的研究已经获得一些可喜成果 (如文献 [5–9]). 但目前星形映照与螺形映照的偏差估计研究成果还较少. 在这篇文章中, 针对一类 α 次殆 β 型螺形映照, 我们建立了相应的偏差上界估计.

2 预备知识

全文中用 C 表示复平面, U 表示复平面上的单位圆盘; B_n 为复向量空间 C_n 中的开单位球, X 为具有任意范数 $\|\cdot\|$ 的复 Banach 空间, B 为 X 中的开单位球, X^* 为 X 的对偶空间. 对每一 $x \in X \setminus \{0\}$, 定义 $T(x) = \{T_x \in X^* : \|T_x\| = 1, T_x(x) = \|x\|\}$. 由 Hahn-Banach 定理 $T(x)$ 非空. 对任意 $\alpha (\neq 0) \in C$, 对应于 $T_x \in T(x)$, $\frac{|\alpha|}{\alpha} T_x \in T(\alpha x)$, 我们总是记 $\frac{|\alpha|}{\alpha} T_x = T_{\alpha x}$. 用 $H(U, C)$ 表示 U 到 C 的全纯函数的全体, $H(B)$ 表示 B 到 X 的全纯映射的全体. 若 Fréchet 导数 $Df(x)$ 在每一点 $x \in B$ 有有界逆, 称 f 为 B 上的局部双全纯映

*收稿日期: 2013-10-14

接收日期: 2013-11-18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11271359); 河南省计划项目 (112300410251); 河南省教育厅科学技术重点研究项目 (14B110015).

作者简介: 刘爱超 (1979–), 男, 河南新郑, 讲师, 主要研究方向: 多复变函数论.

通讯作者: 刘浩

射; 若逆映射 f^{-1} 存在, 且在 $f(B)$ 上全纯, 称 f 为 B 上的双全纯映射; 若 $f \in H(B)$ 满足 $f(0) = 0, Df(0) = I$, 其中 I 为单位矩阵, 称 f 为 B 上正规化全纯映射.

对于 Reinhard 域 $\Omega_{p_1, \dots, p_n} = \{z \in C^n : \sum_{j=1}^n |z_j|^{p_j} < 1\}, p_j \geq 1, j = 1, \dots, n$. 容易知道, 它是 C_n 中的有界凸圆型域, 即 $\Omega_{p_1, \dots, p_n}$ 满足: 对 $\forall z \in \Omega_{p_1, \dots, p_n}, \xi_j \in \overline{D}$, 都有 $(\xi_1 z_1, \dots, \xi_n z_n) \in \Omega_{p_1, \dots, p_n}$. $\Omega_{p_1, \dots, p_n}$ 上的 Minkowski 泛函 $\rho(z)$ 定义为 $\rho(z) = \inf\{t > 0 : \frac{z}{t} \in \Omega_{p_1, \dots, p_n}\}$. 易知, Minkowski 泛函 $\rho(z)$ 是 C_n 的一种 Banach 范数, 且 $\Omega_{p_1, \dots, p_n}$ 是 C_n 在此 Banach 范数下空间的单位球^[10]. 在 $\Omega_{p_1, \dots, p_n}$ 上, 除去一个低维流形外, Minkowski 泛函 $\rho(z)$ 是 C^1 的.

定义 2.1^[11] 设 f 是 B_n 上的正规化局部双全纯映射, 若 $\alpha \in (0, 1], \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 且

$$\operatorname{Re}\{e^{-i\beta} \frac{\overline{z'}}{\|z\|^2} J_f^{-1}(z) f(z)\} \geq \alpha \cos \beta, z \in B_n,$$

则称 f 为 B_n 上的 α 次殆 β 型螺形映射.

当 $n = 1$ 时, 定义转化为 $\operatorname{Re}\{e^{-i\beta} \frac{f(z)}{zf'(z)}\} \geq \alpha \cos \beta$.

定义 2.2 设 f 是 B 上的正规化局部双全纯映射, 若 $\alpha \in (0, 1], \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 且

$$\operatorname{Re}\{e^{-i\beta} \frac{1}{\|x\|} T_x[(DF(x))^{-1} F(x)]\} \geq \alpha \cos \beta,$$

则称 f 为 B 上的 α 次殆 β 型螺形映射.

定义 2.3^[11] 设 G 为 C_n 中的有界星形圆型域, 其 Minkowski 泛函 $\rho(z)$ 除去一个低维流形外是一个 C^1 函数, $f(z)$ 为 G 上正规化局部双全纯映射, 若 $\alpha \in (0, 1], \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 且

$$\operatorname{Re}\{e^{-i\beta} \frac{2}{\rho(z)} \frac{\partial \rho(z)}{\partial z} J_f^{-1}(z) f(z)\} \geq \alpha \cos \beta,$$

则称 $f(z)$ 为 G 上 α 次殆 β 型螺形映射. 此处 $\frac{\partial \rho(z)}{\partial z} = (\frac{\partial \rho(z)}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial \rho(z)}{\partial z_n})$.

本文的研究结果要用到下述引理, 陈述如下

引理 2.1^[12] 设 $p \in H(U)$, 且 $p(0) = 1$, 若 $\operatorname{Re} p(z) \geq 0$, 则 $\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq \operatorname{Re} p(z) \leq |p(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$.

引理 2.2 若 $\tau \neq 0$ 为一复数, 则 $\operatorname{Re} \tau \geq \lambda \iff |\frac{1}{\tau} - \frac{1}{2\lambda}| \leq \frac{1}{2\lambda}, \lambda > 0$.

证 简单计算可得.

引理 2.3 若 f 为单位圆盘 U 上的 α 次殆 β 型螺形函数, 则

$$|\frac{zf'(z)}{f(z)}| \leq \frac{1+|z|}{\cos \beta [1 - (1-2\alpha)|z|]}.$$

证 记 $p(z) = \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha} \frac{f(z)}{zf'(z)} - \frac{\alpha-i \tan \beta}{1-\alpha}, z \in U$. 因 f 为单位圆盘 U 上的 α 次殆 β 型螺形函数, 则 $p(z) \in H(U), p(0) = 1, \operatorname{Re} p(z) \geq 0$. 由引理 2.1 $\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq \operatorname{Re} p(z) \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$. 整理得

$$\frac{1 - (1-2\alpha)|z|}{1+|z|} \cos \beta \leq \operatorname{Re}\{e^{-i\beta} \frac{f(z)}{zf'(z)}\} \leq \frac{1 + (1-2\alpha)|z|}{1-|z|} \cos \beta.$$

对上式左端利用引理 2.2, 即有

$$\begin{aligned} & \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| - \frac{1+|z|}{2 \cos \beta [1 - (1-2\alpha)|z|]} = \left| e^{i\beta} \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| - \frac{1+|z|}{2 \cos \beta [1 - (1-2\alpha)|z|]} \\ & \leq \left| e^{i\beta} \frac{zf'(z)}{f(z)} - \frac{1+|z|}{2 \cos \beta [1 - (1-2\alpha)|z|]} \right| \leq \frac{1+|z|}{2 \cos \beta [1 - (1-2\alpha)|z|]} \end{aligned}$$

或

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1+|z|}{\cos \beta [1 - (1-2\alpha)|z|]}.$$

引理 2.4 设 f_j 为单位圆盘 U 上的 α 次殆 β 型螺形函数, $\lambda_j \geq 0$ 且 $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, 则 $F(z) = z \prod_{j=1}^n \left(\frac{f_j(z_j)}{z_j} \right)^{\lambda_j}$ 为 B_n 上 α 次殆 β 型螺形映照.

证 计算易得 $\frac{\overline{z'}}{\|z\|^2} J_F^{-1}(z) F(z) = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{z_j f'_j(z_j)}{f_j(z_j)}}$, 由已知条件 $\operatorname{Re}\{e^{-i\beta} \frac{f(z)}{zf'(z)}\} \geq \alpha \cos \beta$, 利用引理 2.2, 可知其等价于 $|e^{i\beta} \frac{zf'(z)}{f(z)} - \frac{1}{2\alpha \cos \beta}| \leq \frac{1}{2\alpha \cos \beta}$, 而

$$\begin{aligned} & \left| e^{i\beta} \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{z_j f'_j(z_j)}{f_j(z_j)} - \frac{1}{2\alpha \cos \beta} \right| = \left| \sum_{j=1}^n \lambda_j \left[e^{i\beta} \frac{z_j f'_j(z_j)}{f_j(z_j)} - \frac{1}{2\alpha \cos \beta} \right] \right| \\ & \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j \left| e^{i\beta} \frac{z_j f'_j(z_j)}{f_j(z_j)} - \frac{1}{2\alpha \cos \beta} \right| < \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{1}{2\alpha \cos \beta} = \frac{1}{2\alpha \cos \beta}. \end{aligned}$$

再次利用引理 2.2 可知

$$\operatorname{Re}\{e^{-i\beta} \frac{\overline{z'}}{\|z\|^2} J_F^{-1}(z) F(z)\} = \operatorname{Re}\{e^{-i\beta} \frac{1}{\sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{z_j f'_j(z_j)}{f_j(z_j)}}\} \geq \alpha \cos \beta.$$

故本结论成立.

引理 2.5 ^[11] 若 f 为 B_n 上 α 次殆 β 型螺形映照, 则

$$\frac{\|z\|}{[1 + (1-2\alpha)\|z\|]^{\frac{2(\alpha-1)}{2\alpha-1}}} \leq \|f(z)\| \leq \frac{\|z\|}{[1 - (1-2\alpha)\|z\|]^{\frac{2(\alpha-1)}{2\alpha-1}}}.$$

可见若 f 为单位圆盘 U 上 α 次殆 β 型螺形映照, 则

$$\frac{|z|}{[1 + (1-2\alpha)|z|]^{\frac{2(\alpha-1)}{2\alpha-1}}} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{[1 - (1-2\alpha)|z|]^{\frac{2(\alpha-1)}{2\alpha-1}}}.$$

引理 2.6 设 f_j 为单位圆盘 U 上的 α 次殆 β 型螺形函数, $\lambda_j \geq 0$ 且 $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, 则

$$F(x) = x \prod_{j=1}^n \left(\frac{f_j(T_{u_j}(x))}{T_{u_j}(x)} \right)^{\lambda_j}$$

为 B 上 α 次殆 β 型螺形映照.

证 记 $g(x) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{f_j(T_{u_j}(x))}{T_{u_j}(x)} \right)^{\lambda_j}$, 则 $DF(x)\eta = (Dg(x)\eta)x + g(x)\eta$, 且

$$\frac{Dg(x)x}{g(x)} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \left(\frac{x_j f'_j(x_j)}{f_j(x_j)} - 1 \right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{x_j f'_j(x_j)}{f_j(x_j)} - 1.$$

此处记 $x_j = T_{u_j}(x)$. 计算易得 $(DF(x))^{-1}\eta = \frac{1}{g(x)}[\eta - \frac{(Dg(x)\eta)x}{g(x)+(Dg(x)x)}]$. 进而

$$\frac{1}{\|x\|} T_x[(DF(x))^{-1}F(x)] = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{x_j f'_j(x_j)}{f_j(x_j)}}.$$

其它类似引理 2.4 可得.

对于 Reinhard 域 $\Omega_{p_1, \dots, p_n}$, 其 Minkowski 泛函 $\rho(z)$ 有下述引理

引理 2.7 ^[13] 设 $\rho(z)$ 是域 $\Omega_{p_1, \dots, p_n}$ 上的 Minkowski 泛函, $z \in \Omega_{p_1, \dots, p_n} \setminus \{0\}$, 则

$$\frac{\partial \rho(z)}{\partial z_j} = \frac{p_j \bar{z}_j |\frac{z_j}{\rho(z)}|^{p_j-2}}{2\rho(z) \sum_{i=1}^n p_i |\frac{z_i}{\rho(z)}|^{p_i}}, j = 1, \dots, n.$$

引理 2.8 设 f_j 为单位圆盘 U 上的 α 次殆 β 型螺形函数, $\lambda_j \geq 0$ 且 $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, 则

$F(z) = z \prod_{j=1}^n (\frac{f_j(z_j)}{z_j})^{\lambda_j}$ 为域 $\Omega_{p_1, \dots, p_n}$ 上 α 次殆 β 型螺形映照.

证 利用引理 2.7 简单计算可得 $\frac{2}{\rho(z)} \frac{\partial \rho(z)}{\partial z} J_F^{-1}(z) F(z) = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{z_j f'_j(z_j)}{f_j(z_j)}}$, 其它类似引理 2.4.

3 主要结果及证明

定理 3.1 设 f_j 为单位圆盘 U 上的 α 次殆 β 型螺形函数, $\lambda_j \geq 0$ 且 $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, 则

$$|\det J_F(z)| \leq \frac{1 + \|z\|}{\cos \beta [1 - (1 - 2\alpha)\|z\|]^{\frac{2(\alpha-1)}{2\alpha-1}n+1}},$$

其中 $F(z) = z \prod_{j=1}^n (\frac{f_j(z_j)}{z_j})^{\lambda_j}$, $z \in B_n$.

证 记 $g(z) = \prod_{j=1}^n (\frac{f_j(z_j)}{z_j})^{\lambda_j}$, 则

$$J_F(z) = g(z) \begin{pmatrix} 1 + z_1 \lambda_1 (\frac{f'_1(z_1)}{f_1(z_1)} - \frac{1}{z_1}) & z_1 \lambda_2 (\frac{f'_2(z_2)}{f_2(z_2)} - \frac{1}{z_2}) & \dots & z_1 \lambda_n (\frac{f'_n(z_n)}{f_n(z_n)} - \frac{1}{z_n}) \\ z_2 \lambda_1 (\frac{f'_1(z_1)}{f_1(z_1)} - \frac{1}{z_1}) & 1 + z_2 \lambda_2 (\frac{f'_2(z_2)}{f_2(z_2)} - \frac{1}{z_2}) & \dots & z_2 \lambda_n (\frac{f'_n(z_n)}{f_n(z_n)} - \frac{1}{z_n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_n \lambda_1 (\frac{f'_1(z_1)}{f_1(z_1)} - \frac{1}{z_1}) & z_n \lambda_2 (\frac{f'_2(z_2)}{f_2(z_2)} - \frac{1}{z_2}) & \dots & 1 + z_n \lambda_n (\frac{f'_n(z_n)}{f_n(z_n)} - \frac{1}{z_n}) \end{pmatrix}.$$

进而

$$|\det J_F(z)| = |g(z)|^n |1 + \sum_{j=1}^n z_j \lambda_j (\frac{f'_j(z_j)}{f_j(z_j)} - \frac{1}{z_j})| = \prod_{j=1}^n |\frac{f_j(z_j)}{z_j}|^{n\lambda_j} |\sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{z_j f'_j(z_j)}{f_j(z_j)}|,$$

由引理 2.3,

$$|\sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{z_j f'_j(z_j)}{f_j(z_j)}| \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j |\frac{z_j f'_j(z_j)}{f_j(z_j)}| \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{1 + |z_j|}{\cos \beta [1 - (1 - 2\alpha)|z_j|]}.$$

注意到 $|z_j| \leq \|z\|$, $\frac{1+t}{1-(1-2\alpha)t}$ 分别为递增函数, 上式变为

$$\left| \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{z_j f'_j(z_j)}{f_j(z_j)} \right| \leq \frac{1 + \|z\|}{\cos \beta [1 - (1 - 2\alpha)\|z\|]}.$$

另一方面由引理 2.5

$$\prod_{j=1}^n \left| \frac{f_j(z_j)}{z_j} \right|^{n\lambda_j} \leq \prod_{j=1}^n \frac{1}{[1 - (1 - 2\alpha)|z_j|]^{\frac{2(\alpha-1)}{2\alpha-1} n\lambda_j}},$$

而 $\frac{1}{[1 - (1 - 2\alpha)t]^{\frac{2(\alpha-1)}{2\alpha-1}}}$ 为递增函数, 又 $|z_j| \leq \|z\|$, 上式化为

$$\prod_{j=1}^n \left| \frac{f_j(z_j)}{z_j} \right|^{n\lambda_j} \leq \frac{1}{[1 - (1 - 2\alpha)\|z\|]^{\frac{2(\alpha-1)}{2\alpha-1} n}}.$$

综上所述可知

$$|\det J_F(z)| \leq \frac{1 + \|z\|}{\cos \beta [1 - (1 - 2\alpha)\|z\|]^{\frac{2(\alpha-1)}{2\alpha-1} n+1}}.$$

定理 3.2 设 f_j 为单位圆盘 U 上的 α 次殆 β 型螺形函数, $\lambda_j \geq 0$ 且 $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, 则

$$\|J_F(z)z\| \leq \frac{\|z\|(1 + \|z\|)}{\cos \beta [1 - (1 - 2\alpha)\|z\|]^{\frac{4\alpha-3}{2\alpha-1}}},$$

其中 $F(z) = z \prod_{j=1}^n \left(\frac{f_j(z_j)}{z_j} \right)^{\lambda_j}$, $z \in B_n$.

证 记 $g(z) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{f_j(z_j)}{z_j} \right)^{\lambda_j}$, 计算易得

$$J_F(z)z = zg(z) \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{z_j f'_j(z_j)}{f_j(z_j)} = z \prod_{j=1}^n \left(\frac{f_j(z_j)}{z_j} \right)^{\lambda_j} \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{z_j f'_j(z_j)}{f_j(z_j)}.$$

类似定理 3.1 的证明可得.

定理 3.3 设 f_j 为单位圆盘 U 上的 α 次殆 β 型螺形函数, $\lambda_j \geq 0$ 且 $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, 则

$$|\det DF(x)| \leq \frac{1 + \|x\|}{\cos \beta [1 - (1 - 2\alpha)\|x\|]^{\frac{2(\alpha-1)}{2\alpha-1} n+1}},$$

其中 $F(x) = x \prod_{j=1}^n \left(\frac{f_j(T_{u_j}(x))}{T_{u_j}(x)} \right)^{\lambda_j}$, $x \in B$.

证 记 $g(x) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{f_j(T_{u_j}(x))}{T_{u_j}(x)} \right)^{\lambda_j}$, 则 $DF(x) = g(x) \{ I + x \sum_{j=1}^n \lambda_j [\frac{f'_j(T_{u_j}(x))}{f_j(T_{u_j}(x))} - \frac{1}{T_{u_j}(x)}] T_{u_j}(\cdot) \}$,

此处 $T_{u_j}(\cdot)$ 是行向量. 因此

$$\begin{aligned} \det DF(x) &= |g(x)|^n \left| 1 + \sum_{j=1}^n \lambda_j \left[\frac{f'_j(T_{u_j}(x))}{f_j(T_{u_j}(x))} - \frac{1}{T_{u_j}(x)} \right] T_{u_j}(x) \right| \\ &= \prod_{j=1}^n \left| \frac{f_j(T_{u_j}(x))}{T_{u_j}(x)} \right|^{n\lambda_j} \left| \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{T_{u_j}(x) f'_j(T_{u_j}(x))}{f_j(T_{u_j}(x))} \right|. \end{aligned}$$

记 $x_j = T_{u_j}(x)$, 上式化为

$$\det DF(x) = |g(x)|^n \left| 1 + \sum_{j=1}^n \lambda_j \left[\frac{f'_j(x_j)}{f_j(x_j)} - \frac{1}{x_j} \right] x_j \right| = \prod_{j=1}^n \left| \frac{f_j(x_j)}{x_j} \right|^{n\lambda_j} \left| \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{x_j f'_j(x_j)}{f_j(x_j)} \right|.$$

其它类似定理 3.1, 可证本命题成立.

定理 3.4 设 f_j 为单位圆盘 U 上的 α 次殆 β 型螺形函数, $\lambda_j \geq 0$ 且 $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, 则

$$\|DF(x)x\| \leq \frac{\|x\|(1+\|x\|)}{\cos \beta [1 - (1-2\alpha)\|x\|]^{\frac{4\alpha-3}{2\alpha-1}}},$$

其中 $F(x) = x \prod_{j=1}^n \left(\frac{f_j(T_{u_j}(x))}{T_{u_j}(x)} \right)^{\lambda_j}, x \in B$.

证 类似定理 3.1 和 3.2 可证.

注 1 当 $\beta = 0$ 时, 定理 3.1–定理 3.4 即为 α 次殆星形映照的偏差上界, 因而推广了文 [11] 中的结果.

注 2 复 Banach 空间单位球 B 上的偏差上界和复 C^n 空间单位球 B_n 上的结果一致, 正如预期的一样. 同样对 Reinhard 域 $\Omega_{p_1, \dots, p_n}$ 执行类似讨论, 有与定理 3.1 和定理 3.2 同样的结论, 文中不再赘述.

4 问题

对于更一般的有界星形 (或凸) 圆型域, α 次殆 β 型螺形映照相应的偏差上界本文没有给出. 但引理 2.3 中的下界本文猜测如下

猜想 4.1 若 f 为单位圆盘 U 上的 α 次殆 β 型螺形函数, 则

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} \geq \frac{1-|z|}{\cos \beta [1 + (1-2\alpha)|z|]}.$$

若下界可得, 则复欧式空间 C_n 中的开单位球 B_n 和 Reinhard 域 $\Omega_{p_1, \dots, p_n}$ 的偏差下界估计即可顺利解决. 盼望对此文感兴趣的读者能做出进一步的研究, 不断丰富多复变函数论的内容.

参 考 文 献

- [1] Duren P L. Univalent functions[M]. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [2] Cartan H. Sur la possibilité de tendre aux fonctions de plusieurs variables complex la theorie des fonctions univalent [M]. Montel P (ed.). Lecons Sursles Fonctions Univalent ou Multivalent. Paris: Gauthier-Villar, 1933.
- [3] Zhang W J, Dong D J. The growth and $1/4$ theorems for starlike mappings in a Banach space[J]. Chin. Sci. Bull., 1992, 37(13): 1062–1064.
- [4] Hamada H, Kohr G, Liczberski P. Starling mappings of order α on the unit ball in complex Banach spaces[J]. Glasnik Matematiki, 2001, 36(56): 39–48.

- [5] Liu X S, Yin J H. The distortion theorem for some class of Starlike mappings of order α [J]. 徐州师范大学学报 (自然科学版), 2005, 23(1): 11–15.
- [6] 刘太顺, 张文俊. C^n 中双全纯凸映照的偏差定理 [J]. 数学年刊, 1999, 20(4): 505–512.
- [7] 刘太顺, 张文俊. 复 Banach 空间单位球双全纯凸映照的偏差定理 [J]. 数学学报, 2003, 46(6): 1041–1046.
- [8] 刘太顺, 卢金, 王建飞. 多复变数准凸映射的偏差定理 [J]. 数学年刊, 2011, 32(5): 607–612.
- [9] 刘小松, 刘太顺. 一类近于凸映照子族精确的偏差定理 [J]. 数学年刊, 2012, 33(1): 91–100.
- [10] Taylor A E, Lay D C. Introduction to functional analysis (2nd ed)[M]. New York: John Wiley and Sons, 1980.
- [11] 冯淑霞. 多复变数的几类全纯映照族 [D]. 合肥: 中国科技大学博士论文, 2004.
- [12] 史济怀, 刘太顺. 复变函数 (第一版)[M]. 北京: 中国科学技术大学出版社, 1998.
- [13] Zhang W J, Liu T S. On decomposition theorem of normalized biholomorphic convex mappings in Reinhardt domains[J]. Science in China, Sect. A, 2003, 46(1): 94–106.

THE DISTORTION UPPER BOUND FOR SOME CLASS OF ALMOST SPIRALLIKE MAPPINGS OF TYPE β AND ORDER α

LIU Ai-chao¹, CHEN Ying¹, LIU Hao²

(1. Department of Mathematics, Huanghuai University, Zhumadian 463000, China)

(2. College of Mathematics and Information Science, Henan University, Kaifeng 475004, China)

Abstract: This paper studies the distortion estimation of almost spirallike mapping of type β and order α on unit ball B_n in complex vector space C_n , unit ball B on complex Banach space and Reinhardt domain $\Omega_{p_1, \dots, p_n}$. By using the methods of inequalities, matrices and the growth and cover theorem of almost spirallike mapping of type β and order α , we obtain the distortion upper bound on the above domains, which generalizes some known conclusions.

Keywords: almost spirallike mappings of type β ; order α ; growth theorem; distortion upper bound

2010 MR Subject Classification: 32A30; 32H02