

旗传递 $5-(v, k, 2)$ 设计的分类

龚罗中¹, 刘伟俊², 唐剑雄², 谭琼华³

(1. 湖南科技学院计算数学研究所, 湖南 永州 425199)

(2. 中南大学数学与统计学院, 湖南 长沙 410075)

(3. 南华大学数理学院, 湖南 衡阳 421001)

摘要: 本文研究了 $5-(v, k, 2)$ 设计的分类问题. 利用典型群 $PSL(2, q)$ 的子群作用于投影线的轨道定理, 证明了旗传递 $5-(v, k, 2)$ 设计的自同构群的基柱不能与 $PSL(2, 3^n)$ 同构. 从而证明了不存在旗传递的 $5-(v, k, 2)$ 设计.

关键词: t -设计; 旗传递; 区组设计; 自同构群

MR(2010) 主题分类号: 05B05; 20B25

中图分类号: O157.2; O152.8

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2014)03-0553-09

1 引言

在文献 [1] 中, Cameron 和 Praeger 证明了, 如果一个非平凡的 t -设计具有一个旗传递的自同构群, 那么 $t \leq 6$. 因此, 对 $t \leq 6$ 的旗传递 t -设计的分类是很有必要的. 最近数十年, 旗传递 t -设计已经被广泛研究, 特别是 $t = 2$ 的情况. 文献 [2–5] 中, Buekenhout, Delandtsheer, Doyen, Kleidman, Liebeck 和 Saxl 利用了有限单群的分类, 共同完成了有限的旗传递线性空间 (Steiner2-设计) 的分类. 而对于 Steiner t -设计 ($t > 2$) 的分类问题, 40 年来一直是一个公开问题. 最近, Huber [6] 完成了 $6 > t > 2$ 的旗传递 Steiner t -设计的分类, 并证明没有非平凡的旗传递 Steiner6-设计. 前者利用了有限双传递和 3-齐次置换群的分类. 后者主要利用有限单群的分类. 他的这些工作与文献 [1] 共同完成了旗传递 Steiner t -设计的分类. 于是人们自然转到了更一般的旗传递 t -设计 (即 $\lambda \geq 2$) 的分类问题. 在文献 [7] 我们考虑非平凡旗传递 $5-(v, k, 2)$ 设计的分类, 证明了这些设计的自同构群的基柱只可能是 $PSL(2, 2^n)$ 或 $PSL(2, 3^n)$. 文 [8] 继续了文 [7] 的工作, 证明了基柱不可能是 $PSL(2, 2^n)$. 本文继续上面的工作, 证明了下面主要定理.

主要定理 设 $\mathcal{D}$ 是一个非平凡的 $5-(v, k, 2)$ 设计, $G \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$. 若 $\text{Soc}(G) = PSL(2, 3^n)$, 那么 G 不能旗传递的作用在设计 $\mathcal{D}$ 上. 从而证明了不存在旗传递非平凡的 $5-(v, k, 2)$ 设计.

2 预备引理

本部分, 我们先列出下文中需要的结论.

引理 2.1 [13] 设 $\mathcal{D} = (X, \mathcal{B}, I)$ 是一个 $t-(v, k, \lambda)$ 设计. 那么下列结论成立:

*收稿日期: 2013-08-10

接收日期: 2013-12-17

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11271208); 湖南省教育厅科研基金资助 (12B050); 湖南科技学院重点学科建设项目资助.

作者简介: 龚罗中 (1973–), 男, 湖南沅江, 副教授, 主要从事群论和代数组与代数编码研究.

(a) $bk = vr$;

(b) $\begin{pmatrix} v \\ t \end{pmatrix} \lambda = b \begin{pmatrix} k \\ t \end{pmatrix}$;

(c) 特别的, 如果 $t = 5$, 那么 $r(k-1)(k-2)(k-3)(k-4) = \lambda(v-1)(v-2)(v-3)(v-4)$.

引理 2.2 ^[13] 若 $\mathcal{D} = (X, \mathcal{B}, I)$ 是一个非平凡的 t -(v, k, λ) 设计, 那么 $v > k + t$.

设 $q = 3^n$, U 是 $PSL(2, q)$ 的子群, N_l 表示长度为 l 的轨道数. 由文献 [6], 我们有如下重要的引理.

引理 2.3 设 U 阶为 c 循环子群, $c | \frac{q \pm 1}{d}$. 那么,

(a) 如果 $c | \frac{q+1}{2}$, 则 $N_c = (q+1)/c$;

(b) 如果 $c | \frac{q-1}{2}$, 则 $N_1 = 2$ 和 $N_c = (q-1)/c$.

引理 2.4 设 U 阶为 $2c$ 的二面体子群, $c | \frac{q \pm 1}{2}$. 那么

(i) 对于 $q \equiv 1 \pmod{4}$, 则

(a) 如果 $c | \frac{q+1}{2}$, 那么 $N_c = 2$, 并且 $N_{2c} = (q+1-2c)/(2c)$;

(b) 如果 $c | \frac{q-1}{2}$, 那么 $N_2 = 1, N_c = 2$ 且 $N_{2c} = (q-1-2c)/(2c)$.

(ii) 对于 $q \equiv 3 \pmod{4}$, 则

(a) 如果 $c | \frac{q+1}{2}$, 那么 $N_c = 2$ 且 $N_{2c} = (q+1)/(2c)$;

(b) 如果 $c | \frac{q-1}{2}$, 那么 $N_2 = 1$ 且 $N_{2c} = (q-1)/(2c)$.

引理 2.5 设 U 阶为 $q_0|q$ 初等 Abelian 子群, 那么 $N_1 = 1$ 且 $N_{q_0} = q/q_0$.

引理 2.6 设 U 是阶为 $q_0(q_0|q)$ 初等 Abelian 群和阶为 $c(c|q_0-1)$ 的循环群的半直积群. 那么 $N_1 = 1, N_{q_0} = q/q_0$ 且 $N_{cq_0} = (q-q_0)/(cq_0)$.

引理 2.7 设 U 是 $PSL(2, q_0)$ ($q_0^m = q, m > 1$), 那么若 m 是偶数, 则 $N_{q_0+1} = 1, N_{q_0(q_0-1)} = 1$. 其他的轨道都是正规的.

引理 2.8 设 U 是 $PGL(2, q_0)$ ($q_0^m = q, m > 1$) 为偶数, 那么 $N_{q_0+1} = 1, N_{q_0(q_0-1)} = 1$, 其他的轨道都是正规的.

引理 2.9 设 U 同构于 A_4 . 则

(i) 若 $q \equiv 1 \pmod{4}$, 且 $3|q$, 那么 $N_4 = 1, N_6 = 1$, 且 $N_{12} = (q-9)/12$;

(ii) 若 $q \equiv 3 \pmod{4}$, 且 $3|q$, 那么 $N_4 = 1$, and $N_{12} = (q-3)/12$.

引理 2.10 设 U 同构于 A_5 , 那么若 $q \equiv 1 \pmod{4}$, 则

(a) 若 $3|q$ 且 $5 | \frac{q+1}{2}$, 则 $N_{10} = 1$, 且 $N_{60} = (q-9)/60$;

(b) 若 $3|q$ 且 $5 | \frac{q-1}{2}$, 则 $N_{10} = 1, N_{12} = 1, N_{12} = (q-21)/60$.

引理 2.11 ^[7] 设 $\mathcal{D} = (X, \mathcal{B}, I)$ 是一个 $t \geq 3$ 的 t -设计. 若 $G \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$ 旗传递的作用在设计 $\mathcal{D}$, 那么 G 也区传递的作用在设计 $\mathcal{D}$ 上.

3 主要定理的证明

因为 $G \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$ 旗传递的作用在 5 -($v, k, 2$) 设计 $\mathcal{D}$ 上, 由引理 2.11 和引理 2.1(b) 得到方程 $b = \frac{v(v-1)|G_{xy}|}{|G_B|}$, 这里 x, y 是 X 中的两个不同的点, B 是 $\mathcal{B}$ 中的一个区组. 于是有

$$2 \cdot \begin{pmatrix} v-2 \\ 3 \end{pmatrix} = (k-1) \cdot \begin{pmatrix} k-2 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{|G_{xy}|}{|G_{xB}|} \text{ 如果 } x \in B.$$

故有方程 $2d(q-2)(q-3)|PSL(2, q)_{0B}| = (k-1)k-2)(k-3)(k-4)$.

我们这里 $p = 3$, 因此 $\text{Aut}(N) = P\Gamma L(2, q) = PGL(2, q) : \langle \tau_\alpha \rangle$. 由于 $PGL(2, q)$ 是精确 3-传递群, 从而 $P\Gamma L(2, q)_{0,1,\infty} = \langle \tau_\alpha \rangle$. 定义 $G^* = G \cap (PSL(2, q) : \langle \tau_\alpha \rangle)$.

下面我们分 $G = G^*$ 和 $|G : G^*| = 2$ 两种情形进行讨论.

首先, 对于 $G = G^*$. 若存在一个旗 $\mathcal{F} = \{(0, B), (0, B')\}$, 使得

$$\langle \tau_\alpha \rangle \leq P\Sigma L(2, q)_{\mathcal{F}}, P\Sigma L(2, q) = PSL(2, q) : \langle \tau_\alpha \rangle,$$

则类似我们在文献 [7] 中讨论 $p > 3$ 的方法, 能够得到矛盾. 因此, 我们假设对任何的旗 $\mathcal{F}$ $\langle \tau_\alpha \rangle \not\leq P\Sigma L(2, q)_{\mathcal{F}}$. 设 s 是 $n = |\langle \tau_\alpha \rangle|$ 的一个素因子. 定义 $H := (PSL(2, q)_{0,1,\infty})^s \leq \langle \tau_\alpha \rangle$ 是一个指数为 s 的正规子群. 由文献 [10] 知, 它恰好有 $p^s + 1$ 个不同的稳定点. 因此 $H \cap G \leq G_{\mathcal{F}}$. 显然, 子群 $G \cap H$ 要么稳定区组 B , 要么将区组 B 与区组 B' 交换. 因此 $G_{0B} \cap H$ 的指数最多是 2. 于是可设 $G_{0B} = PSL(2, q)_{0B} : (G \cap H)$, 或者 $G_{0B} = PSL(2, q)_{0B} : (G \cap H)/2$. 对于前者 (后者类似可证), 有

$$4(q-2)(q-3)|PSL(2, q)_{0B}| |G \cap H| = (k-1)(k-2)(k-3)(k-4)|G \cap \langle \tau_\alpha \rangle|,$$

其中 $k = |0^{G_B}| = |G_B : G_{0B}|$, 若 $G = PSL(2, q) : G \cap H$, 则

$$4(q-2)(q-3)|PSL(2, q)_{0B}| = (k-1)(k-2)(k-3)(k-4),$$

其中 $|PSL(2, q)_{0B}| = \frac{|PSL(2, q)_B|}{k}$, 这正是我们在文献 [7] 中讨论过的不可能的情形. 因此 $G = P\Sigma L(2, q)$. 故

$$4(q-2)(q-3)|PSL(2, q)_{0B}| = (k-1)(k-2)(k-3)(k-4)s,$$

其中

$$|PSL(2, q)_{0B}| = \frac{|PSL(2, q)_B|}{k} \cdot \begin{cases} s, & \text{如果 } G_B = PSL(2, q)_B : \langle \tau_\alpha \rangle, \\ 1, & \text{如果 } G_B = PSL(2, q)_B : H. \end{cases}$$

由引理 2.3–引理 2.10 知, 我们只需考虑如下的可能情形:

- (i) $PSL(2, q)_B$ 共轭于 $PSL(2, q)$ 一个阶为 $c(c|\frac{q-1}{2})$ 的循环子群, 且 $k = c$.
- (ii) $PSL(2, q)_B$ 是 $PSL(2, q)$ 的一个阶为 $2c(c|\frac{q-1}{2})$ 的二面体群, 且 $k = c$ 或 $2c$.
- (iii) $PSL(2, q)_B$ 是 $PSL(2, q)$ 的阶为 $q_0|q$ 的初等 Abelianis 子群, 且 $k = q_0$.
- (iv) $PSL(2, q)_B$ 是 $PSL(2, q)$ 的阶为 $q_0|q$ 的初等 Abelianis 子群和阶为 c ($c|q_0 - 1$) 和 $c|q - 1$ 循子群的半直积, 且 $k = q_0$ 或 cq_0 .
- (v) $PSL(2, q)_B$ 共轭于 $PSL(2, q_0)$, 这里 $q_0^m = q, m > 1$, 且 $k = q_0 + 1$ 或 $q_0(q_0 - 1)$ (m 为偶数), 或者 $k = (q_0 - 1)q_0(q_0 + 1)/2$.
- (vi) $PSL(2, q)_B$ 共轭于 $PGL(2, q_0)$, 这里 $q_0^m = q, m > 1$ 为偶数, 且 $k = q_0 + 1, q_0(q_0 - 1)$ 或 $k = (q_0 - 1)q_0(q_0 + 1)$.
- (vii) $PSL(2, q)_B$ 共轭于 A_4 , 且 $k = 6$ 或 12 .
- (viii) $PSL(2, q)_B$ 共轭于 S_4 , 且 $k = 6$ 或 24 .
- (ix) $PSL(2, q)_B$ 共轭于 A_5 , 且 $k = 10, 12$ 或 20 .

下面我们分别对这 9 种情形进行讨论. 同文献 [8] 类似可设 $q = 3^n = 3^{s^u}$, 故可记 $q_0 = 3^r = 3^{s^w}$ ($0 \leq w \leq u$), 从而 $q = q_0^m = q_0^{s^{u-w}}$.

情形 (i) 由条件有 $4(q-2)(q-3)|PSL(2, q)_{0B}| = (c-1)(c-2)(c-3)(c-4)s$, 这里

$$|PSL(2, q)_{0B}| = \begin{cases} s, & \text{如果 } G_B = PSL(2, q)_B : \langle \tau_\alpha \rangle, \\ 1, & \text{如果 } G_B = PSL(2, q)_B : H. \end{cases}$$

若 $|PSL(2, q)_{0B}| = s$, 那么

$$(q-2)(q-3) = \frac{(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{4}. \quad (3.1)$$

若 $c|\frac{q+1}{2}$, 由方程 (3.1) 得

$$c|\frac{(q+1)(q-6)}{2} = \frac{(q-2)(q-3)}{2} - 6 = \frac{c}{8}(c^3 - 10c^2 + 35c - 50) - 3.$$

因此 $c|6$, 从而得 $c = 6$. 但是这个值不满足 (3.1) 式. 故 $c|\frac{q-1}{2}$, 又由方程 (3.1) 得

$$c|\frac{(q-1)(q-4)}{2} = \frac{(q-2)(q-3)}{2} - 1 = \frac{c}{8}(c^3 - 10c^2 + 35c - 50) + 2.$$

这可推出 $c = 4$. 这也不满足方程 (3.1). 因此 $|PSL(2, q)_{0B}| = 1$. 于是有

$$(q-2)(q-3) = \frac{(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)s}{4}. \quad (3.2)$$

若 $c|\frac{q+1}{2}$, 由方程 (3.2) 得

$$c|\frac{(q+1)(q-6)}{2} = \frac{(q-2)(q-3)}{2} - 6 = \frac{cs}{8}(c^3 - 10c^2 + 35c - 50) + 3s - 6,$$

从而 $c|2(3s-6)$. 若 $c|\frac{q-1}{2}$, 又由方程 (3.2) 得

$$c|\frac{(q-1)(q-4)}{2} = \frac{(q-2)(q-3)}{2} - 1 = \frac{cs}{8}(c^3 - 10c^2 + 35c - 50) + 3s - 1,$$

从而 $c|2(3s-1)$. 显然在这两种情形下都有 $c < 6s$, 故由方程 (3.2) 可得

$$(3^{s^u} - 2)(3^{s^{u-1}} - 1) < \frac{c^4 s}{12} < 2^2 \cdot 3^3 \cdot s^5,$$

这说明 $s^u \leq 5$. 故只有少量的 k 值需检验, 这些都可以利用方程 (3.2) 简单的排除.

情形 (ii) 先考虑 $k = c$, 此时有 $4(q-2)(q-3)|PSL(2, q)_{0B}| = (c-1)(c-2)(c-3)(c-4)s$, 这里

$$|PSL(2, q)_{0B}| = 2 \cdot \begin{cases} s, & \text{如果 } G_B = PSL(2, q)_B : \langle \tau_\alpha \rangle, \\ 1, & \text{如果 } G_B = PSL(2, q)_B : H. \end{cases}$$

若 $|PSL(2, q)_{0B}| = 2s$, 则

$$(q-2)(q-3) = \frac{(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{8}. \quad (3.3)$$

若 $c|\frac{q+1}{2}$, 由方程 (3.3) 得

$$c|(q+1)(q-6) = (q-2)(q-3) - 12 = \frac{c}{8}(c^3 - 10c^2 + 35c - 50) - 9.$$

因此 $c|18$, 故 $c = 2, 3, 6, 9$ 或 18 . 但是, 它们都不满足方程 (3.3) (因 $q = 3^n$). 故 $c|\frac{q-1}{2}$, 又由方程 (3.3) 得

$$c|(q-1)(q-4) = (q-2)(q-3) - 2 = \frac{c}{8}(c^3 - 10c^2 + 35c - 50) + 1.$$

因此 $c|2$, 故 $k = c = 2$. 而这个值对于设计太小了. 因此 $|PSL(2, q)_{0B}| = 2$, 于是有

$$(q-2)(q-3) = \frac{(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)s}{8}. \quad (3.4)$$

若 $c|\frac{q+1}{2}$, 由方程 (3.4) 得

$$c|(q+1)(q-6) = (q-2)(q-3) - 12 = \frac{cs}{8}(c^3 - 10c^2 + 35c - 50) + 3s - 12.$$

因此 $c|2(3s-12)$. 若 $c|\frac{q-1}{2}$, 又由方程 (3.4) 得

$$c|(q-1)(q-4) = (q-2)(q-3) - 2 = \frac{c}{8}(c^3 - 10c^2 + 35c - 50) + 3s - 2.$$

因此 $c|2(3s-2)$. 显然, 两种情形下都有 $c < 6s$, 故由方程 (3.4) 可得

$$(3^{s^u} - 2)(3^{s^{u-1}} - 1) < \frac{c^4 s}{24} < 2 \cdot 3^3 \cdot s^5,$$

从而 $s^u \leq 5$. 这也只有少量的 k 值需检验, 这些值也可以利用方程 (3.4) 轻易的排除.

故 $k = 2c$, 此时有

$$4(q-2)(q-3)|PSL(2, q)_{0B}| = (2c-1)(2c-2)(2c-3)(2c-4)s,$$

这里

$$|PSL(2, q)_{0B}| = \begin{cases} s, & \text{当 } G_B = PSL(2, q)_B : \langle \tau_\alpha \rangle, \\ 1, & \text{当 } G_B = PSL(2, q)_B : H. \end{cases}$$

若 $|PSL(2, q)_{0B}| = s$, 则有

$$(q-2)(q-3) = \frac{(2c-1)(2c-2)(2c-3)(2c-4)}{4}. \quad (3.5)$$

若 $c|\frac{q+1}{2}$, 由方程 (3.5) 可得

$$c|\frac{(q+1)(q-6)}{2} = \frac{(q-2)(q-3)}{2} - 6 = \frac{c}{2}(4c^3 - 20c^2 + 35c - 25) - 3.$$

因此 $c|6$, 故 $c = 3, 6$. 但是它们都不满足方程 (3.5). 若 $c|\frac{q-1}{2}$, 由方程 (3.5) 可得

$$c|\frac{(q-1)(q-4)}{2} = \frac{(q-2)(q-3)}{2} - 1 = \frac{c}{2}(4c^3 - 20c^2 + 35c - 25) + 2.$$

因此 $c|2$, 故 $c = 2$, 从而 $k = 4$, 这个值太小. 故只可能是 $|PSL(2, q)_{0B}| = 1$, 此时有

$$(q-2)(q-3) = \frac{(2c-1)(2c-2)(2c-3)(2c-4)s}{4}. \quad (3.6)$$

若 $c|\frac{q+1}{2}$, 由方程 (3.6) 可得

$$c|\frac{(q+1)(q-6)}{2} = \frac{(q-2)(q-3)}{2} - 6 = \frac{cs}{2}(4c^3 - 20c^2 + 35c - 25) + 3s - 6.$$

因此 $c|2(3s-6)$. 若 $c|\frac{q-1}{2}$, 又由方程 (3.6) 可得

$$c|\frac{(q-1)(q-4)}{2} = \frac{(q-2)(q-3)}{2} - 1 = \frac{c}{2}(4c^3 - 20c^2 + 35c - 25) + 3s - 1.$$

因此 $c|2(3s-1)$. 因此 $c < 6s$. 由方程 (3.6) 得

$$(3^{s^u} - 2)(3^{s^{u-1}} - 1) < \frac{(2c)^4 s}{12} < 2^6 \cdot 3^3 \cdot s^5,$$

从而 $s^u \leq 7$. 因为 $c|2(3s-6)$ 或 $c|2(3s-1)$, 这就只有少量的 k 值需检验, 利用方程 (3.6) 可以轻易的排除这些值.

情形 (iii) 此时 $4(q-2)(q-3)|PSL(2, q)_{0B}| = (q_0-1)(q_0-2)(q_0-3)(q_0-4)s$, 这里

$$|PSL(2, q)_{0B}| = \begin{cases} s, & \text{如果 } G_B = PSL(2, q)_B : \langle \tau_\alpha \rangle, \\ 1, & \text{如果 } G_B = PSL(2, q)_B : H. \end{cases}$$

故有方程

$$4(q-2)(q-3) = (q_0-1)(q_0-2)(q_0-3)(q_0-4)x \quad (x = 1 \text{ 或 } s). \quad (3.7)$$

因为 $q_0 = 3^{s^w} > 5$, 故 $w \geq 1$, 且 $s < 3^{s^w} \leq q_0$. 从而由方程 (3.7) 可得

$$4(q_0^{s^{u-w}} - 2)(q_0^{s^{u-w}} - 3) = 4(q-2)(q-3) < q_0^4 x.$$

由此不等式可得 $s = 2$ 且 $u-w = 1$. 于是由方程 (3.7) 可得 $q_0 - 3|(q-2)(q-3) = q_0^4 - 5q_0^2 + 6$. 但是 $(q_0 - 3, q_0^4 - 5q_0^2 + 6) = (q_0 - 3, 7)$, 这是一个矛盾.

情形 (iv) 首先, 设 $k = q_0$, 此时有方程

$$4(q-2)(q-3)|PSL(2, q)_{0B}| = (q_0-1)(q_0-2)(q_0-3)(q_0-4)s,$$

这里

$$|PSL(2, q)_{0B}| = c \cdot \begin{cases} s, & \text{如果 } G_B = PSL(2, q)_B : \langle \tau_\alpha \rangle, \\ 1, & \text{如果 } G_B = PSL(2, q)_B : H. \end{cases}$$

若 $c|q_0 - 1$, 与情形 (iii) 类似讨论, 可得到矛盾. 故 $k = cq_0$, 此时我们有

$$4(q-2)(q-3)|PSL(2, q)_{0B}| = (cq_0-1)(cq_0-2)(cq_0-3)(cq_0-4)s,$$

这里

$$|PSL(2, q)_{0B}| = \begin{cases} s, & \text{如果 } G_B = PSL(2, q)_B : \langle \tau_\alpha \rangle, \\ 1, & \text{如果 } G_B = PSL(2, q)_B : H. \end{cases}$$

从而我们可得到如下方程

$$4(q-2)(q-3) = (cq_0-1)(cq_0-2)(cq_0-3)(cq_0-4)x \quad (x=1 \text{ 或 } s). \quad (3.8)$$

由此得 $cq_0-3 \mid 2(q-2)(q-3)$. 由多项式带余除法知, 对于某个 $\bar{m} \in N$ 有

$$2(q^2-5q+6) = 2\left(\sum_{i=1}^m 3^{i-1} \frac{q^2}{(cq_0)^i} + \sum_{j=1}^{\bar{m}} 3^{j-1} \frac{((3/c)^m-5)q}{cq_0^j}\right)(cq_0-3) + 2\left(\frac{3}{c}\right)^{\bar{m}} \frac{((3/c)^m-5)q}{q_0^{\bar{m}}} + 12,$$

使得 $\deg((\frac{3}{c})^{\bar{m}} \frac{((3/c)^m-5)q}{q_0^{\bar{m}}} + 12) < \deg(cq_0-3)$. 因为 $c \mid q-1$, 故 c 不能被 3 整除. 因此这个余项可以写成

$$2 \cdot 3^{e-\bar{m}(r-1)} \frac{(3/c)^m-5}{c^{\bar{m}}} + 12.$$

故要使得这个余项为零, 必须有等式 $e-\bar{m}(r-1)=1$ 成立. 于是有 $3^m = (-2c^{\bar{m}}+5)c^m$, 这是一个矛盾.

情形 (v) 若 $k = q_0 + 1$, 则有

$$4(q-2)(q-3) \mid |PSL(2, q)_{0B}| = q_0(q_0-1)(q_0-2)(q_0-3)s,$$

这里

$$|PSL(2, q)_{0B}| = \frac{q_0(q_0-1)}{2} \cdot \begin{cases} s, & \text{如果 } G_B = PSL(2, q)_B : \langle \tau_\alpha \rangle, \\ 1, & \text{如果 } G_B = PSL(2, q)_B : H. \end{cases}$$

故我们有如下方程

$$2(q-2)(q-3) = (q_0-2)(q_0-3)x \quad (x=1 \text{ 或者 } s). \quad (3.9)$$

显然, 在方程 (3.9) 中, $x \neq 1$. 故 $x = s$. 由于 $k = q_0 + 1 = 3^{s^w} + 1 > 5$, 故 $w \geq 1$. 因此 $s < 3^{s^w} < q_0$. 从而由方程 (3.9) 可得

$$2(q_0^{s^{u-w}}-2)(q_0^{s^{u-w}}-3) < (q_0^2-2s)(q_0-3).$$

因此 $u-w \geq 1$ (否则, $k = p+1$, 与引理 2.2 矛盾). 因此方程

$$2(q_0^{s_i^{u_l-w_l}}-2)(q_0^{s_i^{u_l-w_l}}-3) < (q_0^2-2s_i)(q_0-3),$$

不可能成立, 矛盾.

若 $k = (q_0+1)q_0(q_0-1)/2$, 则有

$$4(q-2)(q-3) \mid |PSL(2, q)_{0B}| = \left(\frac{q_0^3-q_0}{2}-1\right)\left(\frac{q_0^3-q_0}{2}-2\right)\left(\frac{q_0^3-q_0}{2}-3\right)\left(\frac{q_0^3-q_0}{2}-4\right)s,$$

这里

$$|PSL(2, q)_{0B}| = \begin{cases} s, & \text{如果 } G_B = PSL(2, q)_B : \langle \tau_\alpha \rangle, \\ 1, & \text{如果 } G_B = PSL(2, q)_B : H. \end{cases}$$

故有方程

$$4(3^e - 2)(3^e - 3) = \left(\frac{q_0^3 - q_0}{2} - 1\right)\left(\frac{q_0^3 - q_0}{2} - 2\right)\left(\frac{q_0^3 - q_0}{2} - 3\right)\left(\frac{q_0^3 - q_0}{2} - 4\right)x \quad (x = 1 \text{ 或者 } s). \quad (3.10)$$

若 $x = 1$, 则由方程 (3.10) 可得

$$4q(q - 5) = q_0(q_0^2 - 1)((q_0^3 - q_0)^3 - 10(q_0^3 - q_0)^2 + 35(q_0^3 - q_0) - 50). \quad (3.11)$$

因为

$$(q(q_0^2 - 1)(q_0^3 - q_0)^3 - 10(q_0^3 - q_0)^2 + 35(q_0^3 - q_0) - 50) = 1,$$

故由方程 (3.11) 得 $q = q_0$, 但是这个值又不满足方程 (3.11). 因此 $x = s$. 于是有方程

$$4(q - 2)(q - 3) = \left(\frac{q_0^3 - q_0}{2} - 1\right)\left(\frac{q_0^3 - q_0}{2} - 2\right)\left(\frac{q_0^3 - q_0}{2} - 3\right)\left(\frac{q_0^3 - q_0}{2} - 4\right)s. \quad (3.12)$$

如果 $q_0 = 3$, 那么 $k = 12$. 故 $n < 5$. 因此只有少量的 q 值需检验, 这很容易排除. 从而 $s < q_0 > 3$. 由方程 (3.12) 可得 $4(q - 2)(q - 3) < \left(\frac{q_0^3 - q_0}{2}\right)^4 s < \frac{q_0^{13}}{16}$.

另一方面, 有

$$\begin{aligned} 4(q - 2)(q - 3) &= \left(\frac{q_0^3 - q_0}{2} - 1\right)\left(\frac{q_0^3 - q_0}{2} - 2\right)\left(\frac{q_0^3 - q_0}{2} - 3\right)\left(\frac{q_0^3 - q_0}{2} - 4\right)s \\ &\geq 2\left(\frac{q_0^3 - q_0}{2} - 1\right)\left(\frac{q_0^3 - q_0}{2} - 2\right)\left(\frac{q_0^3 - q_0}{2} - 3\right)\left(\frac{q_0^3 - q_0}{2} - 4\right) = \frac{q_0^{12}}{8} - l, \end{aligned}$$

其中

$$l = \frac{1}{2}q_0^{10} + \frac{5}{2}q_0^9 - \frac{3}{4}q_0^8 - \frac{15}{2}q_0^7 - 17q_0^6 + \frac{15}{2}q_0^5 + \frac{279}{8}q_0^4 + \frac{95}{2}q_0^3 - \frac{35}{2}q_0^2 - 50q_0 - 48.$$

因 $q_0 > 3$, 故有 $l < \frac{q_0^{12}}{16}$, 从而

$$\frac{q_0^{12}}{16} \leq 4(q - 2)(q - 3) = 4(q_0^{2m} - 5q_0^m + 6) \leq \frac{q_0^{13}}{16},$$

由此可推出 $m = 6$. 由方程 (3.12) 知 $q_0^3 - q_0 - 2$ 整除 $q_0^{12} - 5q_0^6 + 6$. 而由多项式带余除法可得

$$q_0^{12} - 5q_0^6 + 6 = (q_0^9 + q_0^7 + 2q_0^6 + q_0^5 + 4q_0^4 + 6q_0^2 + 8q_0 + 6)(q_0^3 - q_0 - 2) + (20q_0^2 + 18q_0 + 18),$$

显然上面的余式不为零, 矛盾.

情形 (vi) 与情形 (v) 类似的讨论可以排除.

情形 (vii) 此时我们有 $G_B = PSL(2, q)_B$ 与 A_4 共轭, 故有方程

$$48(3^n - 2)(3^n - 3) = k(k - 1)(k - 2)(k - 3)(k - 4)x \quad (x = 1 \text{ 或者 } s). \quad (3.13)$$

若 $k = 6$, 则方程 (3.13) 不成立. 故 $k = 12$, 从而有 $n \leq 3$, 这很少的几个值都可以利用方程 (3.13), 手算就可以排除.

情形 (viii) 和情形 (i) 与情形 (vii) 类似的方法可以排除.

利用上面的同样的讨论方法, 可以轻易的证明 $|G : G^*| = 2$ 也是不可能的. 至此, 我们讨论了所有的可能的情形. 再综合文献 [7-8] 知, 我们的主要定理成立.

参 考 文 献

- [1] Cameron P J, Praeger C E. Block-transitive t -designs, II[J]. Finite Geometry and Combinatorics (deinze, 1992. London Math. Soc. Lecture Note Series), 1993, 191: 103–119.
- [2] Delandtsheer A. Flag-transitive linear spaces with alternating socle[J]. Algebraic Combinatorics and Applications, 2001, 57: 79–88.
- [3] Buekenhout F, Delandtsheer A, Doyen J. Finite linear spaces with flag-transitive groups[J], J. Combin. Theory (Series A), 1988, 49: 268–293.
- [4] Saxl J. On finite linear spaces with almost simple flag-transitive automorphism groups[J]. J. Combin. Theory (Series A), 2002, 100: 322–348.
- [5] Liebeck M W. The classification of finite linear spaces with flag-transitive automorphism groups of affine type[J]. J. Combin. Theory (Series A), 1998, 84: 196–235.
- [6] Huber M. On highly symmetric combinatorial designs[M]. Aachen: Shaker, 2006.
- [7] Liu W j, Tan Q H, Gong L Z. Flag-transitive $5-(v, k, 2)$ designs[J]. Journal of Jiangsu University (Natural Science Edition), 2010, 31(5): 612–615.
- [8] Tan J X, Gong L Z, Liu W j. Flag-transitive $5-(v, k, 2)$ designs(II)[J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2012, 39(12): 105–108.
- [9] Beth Th, Jungnickel D, Lenz H. Design theory[M]. London: Cambridge Univ., 1999.
- [10] Dembowski P. Finite geometries[M]. New York: Springer, 1968.

CLASSIFICATION OF FLAG-TRANSITIVE $5-(v, k, 2)$ DESIGNS

GONG Luo-zhong¹, LIU Wei-jun², TANG Jian-xiong², TAN Qiong-hua³

(1. Institute for Computational Mathematics, Hunan University of Science and Engineering,
Yongzhou 425199, China)

(2. School of Mathematics and Statistics, Central South University, Changsha 410075, China)

(3. School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang 421001, China)

Abstract: This paper is devoted to the classification of flag-transitive 5-designs. Using the orbital theorem of classical simple group $PSL(2, q)$, it is proved that the socle of the flag-transitively act automorphisms of a non-trivial $5-(v, k, 2)$ designs can not be isomorphic to $PSL(2, 3^n)$, and it is proved that there exist not non-trivial $5-(v, k, 2)$ designs.

Keywords: t -designs; flag-transitive; block-design; automorphisms

2010 MR Subject Classification: 05B05; 20B25