

亚纯函数族的一个正规性定理

李 铭, 黄 斌

(长沙理工大学数学与计算科学学院, 湖南 长沙 410114)

摘 要: 本文研究了涉及一类微分多项式的亚纯函数族的正规性问题. 利用 Zalcman-Pang 的方法, 得到一个正规性定理, 推广了 2011 年袁文俊等得到的结果.

关键词: 亚纯函数; 正规族; 分担值; 微分多项式

MR(2010) 主题分类号: 30D45

中图分类号: O174.52

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2014)03-0539-07

1 相关定义与主要结果

定义 1.1 设 $D \subset C$ 是任意的区域, $m, l_1, l_2, \dots, l_m$ 是非零正整数且 $0 \leq l_i \leq k (1 \leq i \leq m)$, 如果

$$M(f, f', \dots, f^{(k)}) = a(z) \prod_{i=1}^m f^{(l_i)},$$

其中 f 是 D 内的一个亚纯函数, $a(z)$ 是 D 内的解析函数, 那么我们就说 $M(f, f', \dots, f^{(k)})$ 是区域 D 内的一个微分单项式. 若 $a(z) \neq 0$, 定义 $\deg(M) = m$, $w(M) = \sum_{i=1}^m (1 + l_i)$. 若 $M \equiv \text{常数}$ 我们也将它看做是关于 f 的微分单项式, 此时 $\deg(M) = 0$, $w(M) = 0$. $H(f, f', \dots, f^{(k)}) = \sum_i M_i$ 称为微分多项式, 定义

$$\deg(H) = \max\{\deg(M_1), \deg(M_2), \dots, \deg(M_n)\},$$

$$w(H) = \max\{w(M_1), w(M_2), \dots, w(M_n)\}.$$

定义 1.2 对于有理函数 $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z)$ 和 $Q(z)$ 是互素的多项式, 我们记 R_∞ 为 R 在 ∞ 处的级, 也就是说 $R_\infty = \deg(P) - \deg(Q)$. 将 R 在 ∞ 处按罗朗级数展开, 我们可知 $(R^{(k)})_\infty \leq R_\infty - k$, 特别地, 当 $R_\infty < 0$ 时, $(R^{(k)})_\infty = R_\infty - k$.

2004 年方明亮和 Zalcman 证明了:

定理 1.A [8] 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的一族亚纯函数, $n \geq 1$ 是正整数, $b \neq 0$ 是一个非零复数, 且对 $\mathcal{F}$ 中任意的函数 f 与 g 满足 f 与 g IM 分担 0, $f^n f'$ 与 $g^n g'$ 在 D 内 IM 分担 b , 那么 $\mathcal{F}$ 必在 D 上正规.

2008 年张庆彩改进了他们的结果得到:

*收稿日期: 2012-05-11

接收日期: 2013-04-01

基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目 (12jj3006); 国家自然科学基金资助项目 (11071064).

作者简介: 李铭 (1988-), 女, 湖南岳阳, 硕士, 主要研究方向: 复分析.

定理 1.B ^[9] 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的一族亚纯函数, $n \geq 2$ 是正整数, a 是一个非零有穷复数, 如果 $\mathcal{F}$ 中的任意函数对 (f, g) 均满足 $f^n f'$ 与 $g^n g'$ 在 D 内 IM 分担 a , 则 $\mathcal{F}$ 必在 D 上正规.

2011 年袁文俊, 朱冰和林剑鸣有以下结果:

定理 1.C ^[7] 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的一族亚纯函数, $n \geq 4$ 是正整数, a 是一个非零复数, 如果 $\mathcal{F}$ 中的任意函数对 (f, g) 均满足 $f^{-n} f'$ 与 $g^{-n} g'$ 在 D 内 IM 分担 a , 则 $\mathcal{F}$ 必在 D 上正规.

在这篇文章中, 我们把定理 C 的结果推广到微分多项式上, 得到下面的结果:

定理 1.1 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的一族亚纯函数, $k, n \geq k+3$ 是正整数, 复数 $a \neq 0$, 且对 $\mathcal{F}$ 中的任意函数 f , f 的所有极点和零点的重数都至少是 k , $\mathcal{F}$ 中的任意函数 f 与 g 满足 $G(f)$ 与 $G(g)$ 在 D 内分担 a , 其中 $G(f) = P(f)f^{-n}$, $P(f) = H(f) + f^{(k)}$, $H(f) = \sum_i M_i$ 是 f 的微分多项式, 且满足条件 $\max\{w(M_i) - \frac{2}{n-1}\deg(M_i) < k\}$, 则 $\mathcal{F}$ 必在 D 上正规.

定理 1.2 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的一族亚纯函数, $k, n \geq k+3$ 是正整数, 复数 $a \neq 0$, 且对 $\mathcal{F}$ 中的任意函数 f , f 的所有极点和零点的重数都至少是 k , 且当 $G(f(z)) = a$ 时就有 $|f^{(k)}(z)| \leq A$, 其中 A 是一个正数, $G(f) = P(f)f^{-n}$, $P(f) = H(f) + f^{(k)}$, $H(f) = \sum_i M_i$ 是 f 的微分多项式, 且满足

$$\max\{w(M_i) - \frac{2}{n-1}\deg(M_i) < k\},$$

则 $\mathcal{F}$ 必在 D 上正规.

注 1 当 $k=1$ 时, 定理 1 的结论即是定理 C, 所以定理 1.1 是定理 1.C 的推广.

注 2 下面的例子说明定理 1.1 和定理 1.2 中的条件 $n \geq k+3$ 是必须的.

例 1 亚纯函数族 $\mathcal{F} = \{f_j(z) : f_j(z) = \frac{1}{\sqrt{j}(z-\frac{1}{j})}, j=1, 2, \dots\}$ 在 $D = \{z : |z| < 1\}$ 内不正规, 显然当 $n=3, k=1$ 时, $f'f^{-3} = -jz+1$, 所以对 $\mathcal{F}$ 中的任意函数 f 和 g , $P(f)f^{-3}$ 和 $P(g)g^{-3}$ 在 D 内分担 $1(H(f) \equiv 0)$, 但是 $\mathcal{F}$ 在点 $z=0$ 处不正规, 那是因为当 $j \rightarrow \infty$ 时, $f_j^\#(0) = \frac{2(\sqrt{j})^3}{1+j} \rightarrow \infty$, 这里 $f_j^\#(0)$ 是 f_j 在 $z=0$ 处的球面导数.

注 3 下面的例子说明定理 1 和定理 2 中对零点重数的要求是必须的.

例 2 对于正整数 $k \geq 2$, 零点重级为 $k-1$ 的亚纯函数族

$$\mathcal{F} = \{f_j(z) : f_j(z) = jz^{k-1}, j=1, 2, \dots\}$$

在 $D = \{z : |z| < 1\}$ 内, 注意到 $f_j^{(k)} \equiv 0$, 那么对任意的 $n \geq k+3$, 和 $\mathcal{F}$ 中的任意函数 f 和 g , $P(f)f^{-n}$ 和 $P(g)g^{-n}$ 在 D 内分担任意有穷复数 $b(H(f) \equiv 0)$, 但是显然 $\mathcal{F}$ 在点 $z=0$ 处不正规.

2 相关引理

引理 2.1 ^[1] (Zalcman 引理) 设 k 是一个正整数, $\mathcal{F}$ 是单位圆 Δ 内的一个亚纯函数族, 对 $\mathcal{F}$ 中的任意函数 f , f 的所有零点的重数都至少是 p , 极点的重数都至少是 q . 假设 $\mathcal{F}$ 在点 z_0 不正规, 那么对于实数 $-q < \alpha < p$, 存在

a) 点列 $z_n \in \Delta, z_n \rightarrow z_0$;

- b) 正数列 $\rho_n \rightarrow 0^+$;
 c) 函数列 $f_n \in \mathcal{F}$ 使得 $g_n(\xi)$ 按球面度量局部一致收敛到 $g(\xi)$, 即

$$\rho_n^{-\alpha} f_n(z_n + \rho_n \xi) = g_n(\xi) \Rightarrow g(\xi),$$

其中 $g(\xi)$ 是复平面 C 上的非常数亚纯函数, 且其所有零点的重数都至少为 p , 极点的重数至少为 q , 级至多为 2.

引理 2.2 ^[10] (Hurwitz 定理) 设函数序列 $\{f_n(z)\}$ 在区域 D 内解析, 并且在 D 内闭一致收敛到一个不恒等于零的函数 $f(z)$, γ 是 D 内可求长简单闭曲线, 其内部属于 D , 且不经过 $f(z)$ 的零点. 则存在正整数 N , 使得当 $n \geq N$ 时, 在 γ 内部 $f_n(z)$ 和 $f(z)$ 的零点个数是相同的.

引理 2.3 ^[6] 设 $k, n \geq k+3$ 是两个正整数, $a \neq 0$ 为常数, 如果 f 是复平面 C 内的超越亚纯函数, 那么 $f^{(k)} - af^n$ 有无穷多个零点.

引理 2.4 设 k, n 是两个正整数, $b \neq 0$ 为常数, 如果 f 是一个极点重数至少为 k 的非常数有理函数, 如果 $n \geq 4$, 那么 $f^{(k)} - af^n$ 至少有两个不同的零点.

证 设

$$f(z) = \frac{B(z - \beta_1)^{n_1}(z - \beta_2)^{n_2} \dots (z - \beta_t)^{n_t}}{(z - \alpha_1)^{m_1}(z - \alpha_2)^{m_2} \dots (z - \alpha_s)^{m_s}}, \quad (2.1)$$

其中 B 是一个非零常数, $\alpha_i (1 \leq i \leq s)$, $\beta_j (1 \leq j \leq t)$ 是相互判别的复数, $m_i (1 \leq i \leq s)$ 和 $n_j (1 \leq j \leq t)$ 是正整数. 由已知条件可知 $m_i \geq k (1 \leq i \leq s)$.

令 $M = \sum_{i=1}^s m_i$, $N = \sum_{j=1}^t n_j$, 那么 $M \geq ks$, $N \geq t$. 对于方程 (2.1), 求 k 阶导数有

$$f^{(k)}(z) = \frac{g(z)(z - \beta_1)^{n_1-k}(z - \beta_2)^{n_2-k} \dots (z - \beta_t)^{n_t-k}}{(z - \alpha_1)^{m_1+k}(z - \alpha_2)^{m_2+k} \dots (z - \alpha_s)^{m_s+k}}, \quad (2.2)$$

这里 $g(z)$ 是一个多项式, 且在 $\alpha_i (1 \leq i \leq s)$, $\beta_j (1 \leq j \leq t)$ 处不为零, 且 $\deg(g) \leq k(s+t-1)$. 这是因为 $f_\infty = N - M$, $(f^{(k)})_\infty = \deg(g) + N - kt - M - ks$, 又由定义知

$$\deg(g) + N - kt - M - ks = (f^{(k)})_\infty \leq f_\infty - k = N - M - k,$$

所以 $\deg(g) \leq k(s+t-1)$.

由式 (2.1) 和 (2.2) 式得到

$$\begin{aligned} f^{-n}(z)f^{(k)}(z) &= \frac{B^n g(z)(z - \beta_1)^{(n-1)n_1-k}(z - \beta_2)^{(n-1)n_2-k} \dots (z - \beta_t)^{(n-1)n_t-k}}{(z - \alpha_1)^{(n-1)m_1+k}(z - \alpha_2)^{(n-1)m_2+k} \dots (z - \alpha_s)^{(n-1)m_s+k}} \\ &= \frac{B^n g(z)(z - \alpha_1)^{(n-1)m_1-k}(z - \alpha_2)^{(n-1)m_2-k} \dots (z - \alpha_s)^{(n-1)m_s-k}}{(z - \beta_1)^{(n-1)n_1+k}(z - \beta_2)^{(n-1)n_2+k} \dots (z - \beta_t)^{(n-1)n_t+k}} = \frac{P(z)}{Q(z)}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

这里 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 是互素的多项式.

我们可以断定 $f^{-n}f^{(k)} - b$ 至少有一个零点. 这是因为若 $f^{-n}f^{(k)} - b = \frac{P(z)-bQ(z)}{Q(z)}$ 没有零点, 那么 $P(z) - bQ(z) \equiv c$, c 为一非零常数, 即 $P(z) \equiv bQ(z) + c$. 所以

$$(n-1)N + kt = \deg(Q(z)) = \deg(P(z)) \leq (n-1)M - ks + k(s+t-1),$$

整理得 $(n-1)N \leq (n-1)M - k$.

从另一面由

$$\begin{aligned} [f^{-n}f^{(k)} - b]' &= \left[\frac{c}{Q(z)}\right]' = \frac{-cQ'(z)}{Q^2(z)}, \\ [f^{-n}f^{(k)}]' &= \left[\frac{P(z)}{Q(z)}\right]' = \frac{P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)}{Q^2(z)}, \end{aligned}$$

知道 $P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z) \equiv -cQ'(z)$, 即 $P'(z)Q(z) \equiv (P(z) - c)Q'(z)$.

若 $P(z)$ 只有单零点, 那么 $(n-1)m_i - k = 1$, 即 $m_i = \frac{k+1}{n-1}$ 这与 $(n-1)m_i \geq k (1 \leq i \leq s)$ 和 $n \geq 4$ 矛盾. 所以 $(n-1)m_i - k > 1$, 那么 $\alpha_i (1 \leq i \leq s)$ 是 $P'(z)$ 的 $(n-1)m_i - k - 1$ 重零点, 而不是 $P(z) - c$ 的零点, 由上式可知 $\alpha_i (1 \leq i \leq s)$ 是 $Q'(z)$ 的 $(n-1)m_i - k - 1$ 重零点, 又 $\beta_j (1 \leq j \leq t)$ 也是 $Q'(z)$ 的 $(n-1)n_j + k - 1$ 重零点, 所以有

$$\deg(Q'(z)) = (n-1)n_j + kt - 1 \geq (n-1)N + kt - t + (n-1)M - ks - s,$$

整理得

$$(n-1)M \geq ks + s + t - 1 \geq M + \frac{M}{k} + N - 1 \geq (2 + \frac{1}{k})M - \frac{k}{n-1} - 1,$$

这与 $n \geq 4$ 矛盾.

下面假设 $f^{-n}f^{(k)} - b$ 只有一个零点, 那么

$$f^{-n}(z)f^{(k)}(z) = b + \frac{C(z-z_0)^l}{(z-\beta_1)^{(n-1)n_1+k}(z-\beta_2)^{(n-1)n_2+k} \dots (z-\beta_t)^{(n-1)n_t+k}} = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad (2.4)$$

这里 l 是一个正整数, C 是一个非零常数, 因为 $b \neq 0$, 所以 $z_0 \neq \alpha_i (1 \leq i \leq s)$.

对 (2.3) 式求导有

$$[f^{-n}(z)f^{(k)}(z)]' = \frac{g_1(z)(z-\alpha_1)^{(n-1)m_1-k-1}(z-\alpha_2)^{(n-1)m_2-k-1} \dots (z-\alpha_s)^{(n-1)m_s-k-1}}{(z-\beta_1)^{(n-1)n_1+k+1}(z-\beta_2)^{(n-1)n_2+k+1} \dots (z-\beta_t)^{(n-1)n_t+k+1}}, \quad (2.5)$$

这里 $g_1(z)$ 是一个多项式, 且在 $\alpha_i (1 \leq i \leq s)$ 和 $\beta_j (1 \leq j \leq t)$ 处不为零. 和前面一样可以得到 $\deg(g_1) \leq (k+1)(s+t-1)$.

从另一个方面, 由 (2.4) 式求得

$$[f^{-n}(z)f^{(k)}(z)]' = \frac{(z-z_0)^{l-1}g_2(z)}{(z-\beta_1)^{(n-1)n_1+k+1}(z-\beta_2)^{(n-1)n_2+k+1} \dots (z-\beta_t)^{(n-1)n_t+k+1}}, \quad (2.6)$$

这里 $g_2(z) = C[l - (n-1)N - kt]z^t + C_{t-1}z^{t-1} + \dots + C_0$, $C_0, \dots, C_{t-1}$ 是常数.

下面分两种情况讨论:

(a) $l \neq (n-1)N + kt$;

由 (2.4) 式有 $\deg(Q(z)) \leq (P(z))$, 所以由 (2.3) 式得到

$$(n-1)N + kt \leq (n-1)M - ks + \deg(g) \leq (n-1)M - ks + k(s+t-1).$$

也就是 $(n-1)(M-N) \geq k$, 所以 $M > N$.

注意到 $z_0 \neq \alpha_i (1 \leq i \leq s)$, 由 (2.5) 和 (2.6) 式有 $(n-1)N - (k+1)s \leq \deg(g_2) \leq t$, 又因为 $M > ks$, $N > t$, 所以

$$(n-1)M \leq (k+1)s + t \leq (k+1)\frac{M}{k} + N \leq \frac{2k+1}{k}M,$$

这与 $n \geq 4$ 矛盾.

(b) $l = (n-1)N + kt$. 当 $M > N$ 时由 (2.5) 和 (2.6) 式有

$$(n-1)N - (k+1)s \leq \deg(g_2) \leq t-1,$$

同样因为 $M > ks$, $N > t$, 所以

$$(n-1)M \leq (k+1)s + t - 1 \leq (k+1)\frac{M}{k} + N - 1 \leq \frac{2k+1}{k}M,$$

这与 $n \geq 4$ 矛盾.

当 $M \geq N$ 时由 (2.5) 和 (2.6) 式知 $l-1 \leq \deg(g_1) \leq (k+1)(s+t-1)$, 即

$$(n-1)N + kt \leq (k+1)(s+t-1),$$

所以

$$(n-1)N \leq (k+1)s + t - k \leq (k+1)\frac{M}{k} + N - k \leq sN - k,$$

这与 $n \geq 4$ 矛盾, 所以引理 2.4 得证.

3 主要定理的证明

定理 1.1 的证明 反设 $\mathcal{F}$ 在区域 D 内不正规, 那么区域 D 内至少存在一点 z_0 使得 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处不正规, 不失一般地, 设 $z_0 = 0$, 由 Zalcman 引理, 存在点列 $z_j \rightarrow 0$, 正数列 $\rho_j \rightarrow 0$, 和函数列 $f_j \in \mathcal{F}$ 满足 $g_j(\xi)$ 按球面度量局部一致收敛到 $g(\xi)$, 即

$$g_j(\xi) = \rho_j^{\frac{k}{n-1}} f_j(z_j + \rho_j \xi) \Rightarrow g(\xi), \quad (3.1)$$

其中 g 是一个极点重数至少为 k 的非常数亚纯函数, 且 g 的级至多为 2, “ $\Rightarrow$ ” 表示局部一致收敛, 下同.

由 (3.1) 式及 $n \geq k+3$, $\max\{w(M_i) - \frac{2}{n-1}\deg(M_i) < k\}$, 对任意的 $1 \leq m \leq k$, 有

$$\begin{aligned} g_j^{(m)}(\xi) &= \rho_j^{\frac{k}{n-1}+m} f_j^{(m)}(z_j + \rho_j \xi) \Rightarrow g^{(m)}(\xi), \\ P(f_j(z_j + \rho_j \xi)) f_j^{-n}(z_j + \rho_j \xi) - a &= \rho_j^{\frac{nk}{n-1}} [\rho_j^{-k-\frac{k}{n-1}} g_j^{(k)}(\xi) \\ &+ \sum_i a_i(z_j + \rho_j \xi) \rho_j^{\deg(M_i)-w(M_i)-\frac{k\deg(M_i)}{n-1}} M_i(g_j, g'_j, \dots, g_j^{(k)})] g_j^{-n}(\xi) - a \\ &= g_j^{(k)}(\xi) g_j^{-n}(\xi) + \sum_i a_i(z_j + \rho_j \xi) \rho_j^{\deg(M_i)(1-\frac{k}{n-1})-w(M_i)+\frac{nk}{n-1}} M_i(g_j, g'_j, \dots, g_j^{(k)}) g_j^{-n}(\xi) - a \\ &\Rightarrow g^{(k)}(\xi) g^{-n}(\xi) - a. \end{aligned} \quad (3.2)$$

如果 $g^{(k)}(\xi)g^{-n}(\xi) \equiv a$, 那么 g 没有极点, 当然 g 也没有零点, 注意到 g 的级至多为 2, 我们推断 $g(\xi) = e^{c_0+c_1\xi+c_2\xi^2}$, 其中 c_0, c_1, c_2 为常数, 且 c_1, c_2 不同时为零. 显然这与 $g_j^{(k)}(\xi)g_j^{-n}(\xi) \equiv a$ 矛盾. 又由引理 2.3 和引理 2.4 知 $g^{(k)}(\xi)g^{-n}(\xi) - a$ 一定有零点.

下面证明 $g^{(k)}(\xi)g^{-n}(\xi) - a$ 只可能有一个零点. 设 ξ_0 和 ξ_0^* 是 $g^{(k)}(\xi)g^{-n}(\xi) - a$ 的两个不同的零点, 选取适当的 $\delta > 0$ 使得 $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, 这里

$$D_1 = \{\xi \in C : |\xi - \xi_0| < \delta\}, D_2 = \{\xi \in C : |\xi - \xi_0^*| < \delta\}.$$

由 (3.2) 式及 Hurwitz 定理知, 存在点列 $\xi_j \in D_1, \xi_j^* \in D_2$, 当 j 足够大时有

$$P(f_j(z_j + \rho_j \xi_j))f_j^{-n}(z_j + \rho_j \xi_j) = a,$$

$$P(f_j(z_j + \rho_j \xi_j^*))f_j^{-n}(z_j + \rho_j \xi_j^*) = a.$$

由定理的已知条件知道 $\mathcal{F}$ 中的任何函数 f 与 g 满足 $G(f)$ 与 $G(g)$ 在内 D 分担 a , 所以对任意的正整数 m 有

$$P(f_m(z_j + \rho_j \xi_j))f_m^{-n}(z_j + \rho_j \xi_j) = a,$$

$$P(f_m(z_j + \rho_j \xi_j^*))f_m^{-n}(z_j + \rho_j \xi_j^*) = a.$$

固定 m , 令 $j \rightarrow \infty$, 那么 $z_j + \rho_j \xi_j \rightarrow 0, z_j + \rho_j \xi_j^* \rightarrow 0$, 所以 $P(f_m(0))f_m^{-n}(0) = a$.

因为 $P(f(\xi))f^{-n}(\xi) - a$ 的零点不可能有聚点, 所以当 j 充分大时 $z_j + \rho_j \xi_j = 0, z_j + \rho_j \xi_j^* = 0$, 即 $\xi_j = \frac{z_j}{\rho_j}, \xi_j^* = \frac{z_j}{\rho_j}$. 这与 $\xi_j \in D_1, \xi_j^* \in D_2$ 和 $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ 矛盾, 所以 $g^{(k)}(\xi)g^{-n}(\xi) - a$ 只能有一个零点, 这与引理 2.3 和引理 2.4 矛盾, 所以 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

定理 1.2 的证明 由定理 1.1 的证明过程我们知道 $g(\xi)$ 的所有极点重级至少为 k , 又 $n \geq k+3 \geq 4$, 所以由引理 2.3 和引理 2.4 知道 $g^{(k)}(\xi)g^{-n}(\xi) - a$ 至少有一个零点 ξ_0 .

由 (3.2) 式和 Hurwitz 定理, 存在点列 $\xi_j \rightarrow \xi_0 (j \rightarrow \infty)$, 所以当 j 足够大时有

$$|g_j^{(k)}(\xi_j)| = \rho_j^{k+\frac{k}{n-1}} |f_j^{(k)}(z_j + \rho_j \xi_j)| \leq A \rho_j^{k+\frac{k}{n-1}},$$

于是得到 $g_j^{(k)}(\xi_0) = \lim_{j \rightarrow \infty} g_j^{(k)}(\xi_j) = 0$, 这与 $g^{(k)}(\xi_0)g^{-n}(\xi_0) = a \neq 0$ 矛盾, 所以 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

参 考 文 献

- [1] Qi J M, Ding J, Yang L Z. Normality criteria for families of meromorphic function concerning shared values. *Bull Malays[J]. Math. Sci. Soc.*, 2012, 35(2): 449-457.
- [2] Lin C L, Fang M L. Normality and shared values concerning differential polynomials[J]. *Sci. China Math.*, 2010, 53(3): 749-754.
- [3] Wu X Z, Xu Y. Normal families of meromorphic functions and shared values[J]. *Monatsh Math.*, Doi:10.1007/s00605-010-0272-2.
- [4] 袁文俊, 方明亮. 亚纯函数族正规性的进一步结果 [J]. 广州大学学报, 2002, 1(1): 1-9.
- [5] 杨乐. 值分布论及其新研究 [M]. 北京: 科学出版社, 1982.
- [6] 张占亮. 关于 $f^{(k)} - af^n$ 的零点 [J]. 数学的实践与认识, 2004, 34(11): 129-134.

- [7] Yuan J, Zhu B, Lin M. Some normality criteria of functions related a Hayman conjecture[J]. J. of Inequal. and Appl., doi:10.1186/1029-242x-2011-97.
- [8] Fang M L, Zalcman L. A note on normality and shared value[J]. Aust. Math. Soc., 2004, 76: 141–150.
- [9] Zhang Q C. Normal families of meromorphic functions concerning shared values[J]. Math. Anal. Appl., 2008, 338: 545–551.
- [10] 方企勤. 复变函数教程 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1986.

NORMAL CRITERIA FOR FAMILIES OF MEROMORPHIC FUNCTIONS

LI Ming , HUANG Bin

*(College of Mathematics and Computing Science, Changsha University of Science & Technology,
Changsha 410114, China)*

Abstract: This paper studies the normality of the family of meromorphic functions concerning a class of differential polynomials. By using Zalcman-Pang's method, we obtain a normal criterion, which improves a result got by Wenjun Yuan in 2011.

Keywords: meromorphic functions; normal families; shared value; differential polynomial

2010 MR Subject Classification: 30D45