Vol. 34 (2014)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

带变量核的 Marcinkiewicz 算子交换子在加权 Herz 空间上的有界性

闫 健, 束立生
(安徽师范大学数学计算机科学学院, 安徽 芜湖 241003)

摘 要: 本文研究了带变量核的 Marcinkiewicz 算子交换子的有界性问题. 利用其在 $L^p(\omega)$ 空间上有界的方法, 获得了该交换子在加权 Herz 空间上有界的结果.

关 键 词: 变量核; Marcinkiewicz 积分算子; 交换子; 加权 Herz 空间
MR(2010) **主题分类号**: 42B20; 42B25　　**中图分类号**: O174.2
文献标识码: A　　**文章编号**: 0255-7797(2014)03-0529-10

1 引言及定义

1990 年, Torchinsky 和 Wang[1] 证明了 μ_Ω 的加权有界性. 随后, Chen 等 [2] 得到了当 Ω 在 S^{n-1} 上满足一类 $L^r-\mathrm{Dini}(r\geq 1)$ 条件时, 对某些 $p\leq 1$, 带变量核的奇异积分算子是 H^p 到 L^p 有界的. 随后, Ding 等 [3,4] 得到了带变量核的 Marcinkiewicz 算子的 L^p 有界性. 2005 年, 陈冬香等 [5] 讨论了带粗糙核的 Marcinkiewicz 算子在 Herz 空间上的有界性. 2010 年, 陶双平等 [6] 讨论了带变量核的 Marcinkiewicz 算子在齐次 Morrey-Herz 空间上的有界性. 2010 年, 肖强等 [7] 讨论了带粗糙核的 Marcinkiewicz 算子在加权 Morrey-Herz 空间上的有界性. 受此启发, 本文讨论了带变量核的 Marcinkiewicz 算子在加权 Herz 空间上的有界性. 为此先介绍相关的定义.

记 S^{n-1} 为 $\mathbb{R}^n(n\geq 2)$ 中的单位球面, $d\sigma$ 表示单位球面上的 Lebesgue 测度, 称定义在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上的函数 $\Omega(x,z)\in L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})(r\geq 1)$ 是指

$$\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(\int_{S^{n-1}}|\Omega(x,z')|^r d\sigma(z')\right)^{\frac{1}{r}}<\infty, \tag{1}$$

其中 $z'=\dfrac{z}{|z|}, z\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}, \Omega$ 是零阶齐次的是指

$$\Omega(x,\lambda\, z)=\Omega(x,z),\forall x,z\in\mathbb{R}^n,\lambda>0. \tag{2}$$

设 Ω 满足消失矩条件:

$$\int_{S^{n-1}}\Omega(x,z')d(z')=0,\forall\, x\in\mathbb{R}^n. \tag{3}$$

*收稿日期: 2013-01-05　　接收日期: 2013-04-18
基金项目: 安徽省高校自然科学项目基金资助 (KJ2011A138; KJ2012Z129).
作者简介: 闫健 (1986–), 女, 安徽阜阳, 硕士, 主要研究方向: 调和分析.

设 $b\in BMO(\mathbb{R}^n)$, 带变量核的 Marcinkiewicz 积分算子与 b 生成的交换子 μ_Ω^b 定义为

$$\mu_\Omega^b(f)(x)=\left\{\int_0^\infty\Big|\int_{|x-y|\le t}\frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-1}}(b(x)-b(y))f(y)dy\Big|^2\frac{dt}{t^3}\right\}^{\frac12}.$$

加权 Herz 空间定义如下:

定义 [8] 设 $0<\alpha<\infty,0<p<\infty,1\le q<\infty$, 且 ω_1,ω_2 是非负权函数, 加权 Herz 空间 $K_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 的定义为

$$K_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)=\{f\in L_{loc}^q(\mathbb{R}^n\backslash\{0\},\omega_2):\big\|f\big\|_{K_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)}<\infty\},$$

其中

$$\big\|f\big\|_{K_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)}=\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}\big\|f\chi_k\big\|_{L^q(\omega_2)}^p\right\}^{\frac1p},$$

这里,$B_k=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\le 2^k\},C_k=B_k\backslash B_{k-1},k\in\mathbb{Z},\chi_k=\chi_{C_k}(x)$ 为集合 C_k 的特征函数, 并记 $f_k=f\chi_k$.

本文中 C 在不同的地方表示不同的正常数.

2 主要结果及其证明

为了证明本文定理, 需要以下引理:

引理 2.1 [9] 如果 $\omega\in A_p,1\le p<\infty$, 则存在常数 $C>0$ 及 $0<\delta<1$, 使得对任意 $k,j\in\mathbb{Z}$, 有

(i) $\forall\, k>j,\dfrac{\omega(B_k)}{\omega(B_j)}\le C\dfrac{|B_k|}{|B_j|}$;

(ii) $\forall\, k\le j,\dfrac{\omega(B_k)}{\omega(B_j)}\le C(\dfrac{|B_k|}{|B_j|})^\delta$;

(iii) $\forall\, j,\omega(B_j)\le C|B_j|essinf\{\omega(y):y\in B_j\}$.

引理 2.2 [10] 设核函数 Ω 满足 (1)–(3) 式, $a>0,1<r\le\infty,0<d\le r$ 且 $-\frac nd+\frac{(n-1)}{r}<\beta<\infty$, 则

$$\left\{\int_{|y|\le a|x|}|\Omega(x,x-y)|y|^\beta|^d dy\right\}^{\frac1d}\le C\big|x\big|^{\beta+\frac nd}\big\|\Omega\big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}.$$

引理 2.3 [10] 设核函数 Ω 满足 (1)–(3) 式, $a>0,1<r\le\infty,0<d\le r$ 且 $\beta<-\frac nd$. 则

$$\left\{\int_{|y|\ge a|x|}|\Omega(x,x-y)|y|^\beta|^d dy\right\}^{\frac1d}\le C\big|x\big|^{\beta+\frac nd}\big\|\Omega\big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}.$$

引理 2.4 [11] 设核函数 Ω 满足 (1)–(3) 式, 对 $1\le q<\infty$, 权函数 $\omega\in A_q$, 则存在常数 $C>0$, 使得 $\big\|\mu_\Omega^b(f)\big\|_{L^q(\omega)}\le C\big\|b\big\|_{\mathrm{BMO}}\big\|f\big\|_{L^q(\omega)}$ 对任意的 $f\in L^q(\omega)$ 成立.

定理 设核函数 Ω 满足 (1)–(3) 式, $0<p<\infty,1<q<\infty,0<r\le\infty,\delta$ 为引理 2.1 中的常数且权函数 $\omega_1,\omega_2\in A_1$, 若 $r'<q$ 且 $n(\dfrac{1}{\delta r'}-\dfrac1q)<\alpha<n(\dfrac{1}{r'}-\dfrac1q)+\dfrac1r,b\in\mathrm{BMO}$, 则带变

量核的 Marcinkiewicz 积分算子与函数 b 生成的交换子 μ_Ω^b 在加权 Herz 空间 $K_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 上有界.

证 只需证明存在常数 $C>0$, 使得 $\|\mu_\Omega^b(f)\|_{K_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)}\le C\|b\|_{\mathrm{BMO}}\|f\|_{K_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)}$ 对任意的 $f\in K_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 成立.

设 $f\in K_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$, 记 $f(x)=\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}f(x)\chi_j(x)=\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}f_j(x)$. 于是

$$\begin{aligned}\|\mu_\Omega^b(f)\|^p_{K_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)}=&\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|\mu_\Omega^b(f)\chi_k\|^p_{L^q(\omega_2)}\\ \le& C\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}\left\{\sum_{j=-\infty}^{k-2}\|\mu_\Omega^b(f_j)\chi_k\|_{L^q(\omega_2)}\right\}^p\\ &+C\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}\left\{\sum_{j=k-1}^{k+1}\|\mu_\Omega^b(f_j)\chi_k\|_{L^q(\omega_2)}\right\}^p\\ &+C\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}\left\{\sum_{j=k+2}^{\infty}\|\mu_\Omega^b(f_j)\chi_k\|_{L^q(\omega_2)}\right\}^p\\ \triangleq& U_1+U_2+U_3.\end{aligned}$$

首先考虑 U_2, 由引理 2.1 及引理 2.4 知

$$\begin{aligned}U_2\le& C\|b\|^p_{\mathrm{BMO}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}\left\{\sum_{j=k-1}^{k+1}\|f_j\|_{L^q(\omega_2)}\right\}^p\\ \le& C\|b\|^p_{\mathrm{BMO}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f\chi_k\|^p_{L^q(\omega_2)}\\ \le& C\|b\|^p_{\mathrm{BMO}}\|f\|^p_{K_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)}.\end{aligned}$$

为了考虑 U_1, 我们首先估计 $\|\mu_\Omega^b(f_j)\chi_k\|_{L^q(\omega_2)}$, 有

$$\begin{aligned}\|\mu_\Omega^b(f_j)\chi_k\|_{L^q(\omega_2)}=&\left\{\int_{C_k}\left[\int_0^\infty\Big|\int_{|x-y|\le t}\frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-1}}(b(x)-b(y))f_j(y)dy\Big|^2\frac{dt}{t^3}\right]^{\frac q2}\omega_2(x)dx\right\}^{\frac1q}\\ =&\left\{\int_{C_k}\left[\Big(\int_0^{|x|}+\int_{|x|}^\infty\Big)\Big|\int_{|x-y|\le t}\frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-1}}(b(x)-b(y))f_j(y)dy\Big|^2\frac{dt}{t^3}\right]^{\frac q2}\omega_2(x)dx\right\}^{\frac1q}\\ \le& C\left\{\int_{C_k}\left[\int_0^{|x|}\Big|\int_{|x-y|\le t}\frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-1}}(b(x)-b(y))f_j(y)dy\Big|^2\frac{dt}{t^3}\right]^{\frac q2}\omega_2(x)dx\right\}^{\frac1q}\\ &+C\left\{\int_{C_k}\left[\int_{|x|}^\infty\Big|\int_{|x-y|\le t}\frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-1}}(b(x)-b(y))f_j(y)dy\Big|^2\frac{dt}{t^3}\right]^{\frac q2}\omega_2(x)dx\right\}^{\frac1q}\\ \triangleq& C(A+B).\end{aligned}$$

记 $b_k=\dfrac{1}{|B_k|}\int_{B_k}|b(y)|dy$, 首先考虑 $\{\int_{C_k}|b(x)-b_k|^q\omega_2(x)dx\}^{\frac{1}{q}}$. 取适当的 s, 使得 $s>q$, 且 $\omega_2(x)$ 关于指数 $\dfrac{s}{s-q}$ 满足反向 Hölder 不等式. 由 Hölder 不等式及反向 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}
&\left\{\int_{C_k}|b(x)-b_k|^q\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\leq C\left\{(\int_{C_k}|b(x)-b_k|^s dx)^{\frac{q}{s}}(\int_{C_k}(\omega_2(x))^{\frac{s}{s-q}}dx)^{\frac{s-q}{s}}\right\}^{\frac{1}{q}}\\
\leq& C|B_k|^{\frac{1}{s}}\left\{\frac{1}{|B_k|}\int_{Bk}|b(x)-b_k|^s dx\right\}^{\frac{1}{s}}|B_k|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{s}}\left\{\frac{1}{|B_k|}\int_{B_k}(\omega_2(x))^{\frac{s}{s-q}}dx\right\}^{\frac{s-q}{sq}}\\
\leq& C|B_k|^{\frac{1}{q}}\|b\|_{\mathrm{BMO}}\left\{\frac{1}{|B_k|}\int_{B_k}\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\
\leq& C|B_k|^{\frac{1}{q}}\|b\|_{\mathrm{BMO}}\left[\frac{\omega_2(B_k)}{|B_k|}\right]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

注意到 $x\in C_k, y\in C_j, j\leq k-2$, 则 $|x-y|\sim|x|$, 且 $\Big|\dfrac{1}{|x-y|^2}-\dfrac{1}{|x|^2}\Big|\leq C\dfrac{|y|}{|x-y|^3}$. 由 $r'<q$, 我们可选取适当的 $\beta:-\frac{1}{r}<\beta<0$, 使得 $\alpha<-\beta-\frac{n}{q}+\frac{n}{r'}<n(\frac{1}{r'}-\frac{1}{q})+\frac{1}{r}$, 由引理 2.2 及 Minkowski 不等式得

$$\begin{aligned}
A=&\left\{\int_{C_k}\left[\int_0^{|x|}\Big|\int_{|x-y|\leq t}\frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-1}}(b(x)-b(y))f_j(y)dy\Big|^2\frac{dt}{t^3}\right]^{\frac{q}{2}}\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\
\leq& C\left\{\int_{C_k}\left[\int_{C_j}\frac{|\Omega(x,x-y)|}{|x-y|^{n-1}}|b(x)-b(y)||f_j(y)|\left(\int_{|x-y|\leq t\leq|x|}\frac{dt}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}}dy\right]^q\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\
\leq& C\left\{\int_{C_k}\left[\int_{C_j}\frac{|\Omega(x,x-y)|}{|x-y|^{n-1}}|b(x)-b(y)||f_j(y)|\Big|\frac{1}{|x-y|^2}-\frac{1}{|x|^2}\Big|^{\frac{1}{2}}dy\right]^q\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\
\leq& C\left\{\int_{C_k}\left[\int_{C_j}|\Omega(x,x-y)||b(x)-b(y)||f_j(y)|\frac{|y|^{\frac{1}{2}}}{|x|^{n+\frac{1}{2}}}dy\right]^q\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\
\leq& C\left\{\int_{C_k}\left[\int_{C_j}|\Omega(x,x-y)||y|^{\beta}|b(x)-b(y)||f_j(y)|\frac{|y|^{\frac{1}{2}-\beta}}{|x|^{n+\frac{1}{2}}}dy\right]^q\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\
\leq& C2^{\frac{j}{2}-\frac{k}{2}-kn-j\beta}\left\{\int_{C_k}\left[\int_{C_j}|\Omega(x,x-y)||y|^{\beta}|b(x)-b(y)||f_j(y)|dy\right]^q\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\
\leq& C2^{\frac{j}{2}-\frac{k}{2}-kn-j\beta}\left\{\int_{C_k}\left[\left(\int_{C_j}|\Omega(x,x-y)|^r|y|^{r\beta}dy\right)^{\frac{q}{r}}\left(\int_{C_j}|b(x)-b(y)|^{r'}|f_j(y)|^{r'}dy\right)^{\frac{q}{r'}}\right]\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\
\leq& C2^{\frac{j}{2}-\frac{k}{2}-kn-j\beta}\cdot 2^{k(\beta+\frac{n}{r})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\left\{\int_{C_k}\left(\int_{C_j}|b(x)-b(y)|^{r'}|f_j(y)|^{r'}dy\right)^{\frac{q}{r'}}\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\
\leq& C2^{\frac{j}{2}-\frac{k}{2}-kn-j\beta}\cdot 2^{k(\beta+\frac{n}{r})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\\
&\left\{\int_{C_k}\left[\left(\int_{C_j}|b(x)-b(y)|^{\frac{qr'}{q-r'}}dy\right)^{\frac{q-r'}{r'}}\left(\int_{C_j}|f_j(y)|^q dy\right)\right]\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le C2^{\frac{j}{2}-\frac{k}{2}-kn-j\beta}\cdot 2^{k(\beta+\frac{n}{r})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\left\{\int_{C_k}\left[\int_{C_j}|b(x)-b(y)|^{\frac{qr'}{q-r'}}dy\right]^{\frac{q-r'}{r'}}\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\
&\le C2^{\frac{j}{2}-\frac{k}{2}-kn-j\beta}\cdot 2^{k(\beta+\frac{n}{r})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\left(\int_{C_k}\left[\int_{C_j}|b(x)-b_k|^{\frac{qr'}{q-r'}}dy\right]^{\frac{q-r'}{r'}}\omega_2(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\quad + C2^{\frac{j}{2}-\frac{k}{2}-kn-j\beta}\cdot 2^{k(\beta+\frac{n}{r})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\left(\int_{C_k}\left[\int_{C_j}|b_k-b_j|^{\frac{qr'}{q-r'}}dy\right]^{\frac{q-r'}{r'}}\omega_2(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\quad + C2^{\frac{j}{2}-\frac{k}{2}-kn-j\beta}\cdot 2^{k(\beta+\frac{n}{r})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\left(\int_{C_k}\left[\int_{C_j}|b(y)-b_j|^{\frac{qr'}{q-r'}}dy\right]^{\frac{q-r'}{r'}}\omega_2(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\triangleq C(A_1+A_2+A_3).
\end{aligned}$$

对 A_1, 有

$$\begin{aligned}
A_1 =&2^{\frac{j}{2}-\frac{k}{2}-kn-j\beta}\cdot 2^{k(\beta+\frac{n}{r})}\\
&\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\left\{\int_{C_k}\left[\int_{C_j}|b(x)-b_k|^{\frac{qr'}{q-r'}}dy\right]^{\frac{q-r'}{r'}}\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\
\le& C2^{\frac{j}{2}-\frac{k}{2}-kn-j\beta}\cdot 2^{k(\beta+\frac{n}{r})}\cdot 2^{jn(\frac{1}{r'}-\frac{1}{q})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\left\{\int_{C_k}|b(x)-b_k|^q\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\
\le& C2^{\frac{j}{2}-\frac{k}{2}-kn-j\beta}\cdot 2^{k(\beta+\frac{n}{r})}\cdot 2^{jn(\frac{1}{r'}-\frac{1}{q})}\cdot 2^{\frac{kn}{q}}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\|b\|_{\mathrm{BMO}}\left[\frac{\omega_2(B_k)}{|B_k|}\right]^{\frac{1}{q}}\\
\le& C2^{\frac{j}{2}-\frac{k}{2}-kn-j\beta}\cdot 2^{k(\beta+\frac{n}{r})}\\
&\cdot 2^{jn(\frac{1}{r'}-\frac{1}{q})}\cdot 2^{\frac{kn}{q}}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|f_j\|_{L^q(\omega_2)}\|b\|_{\mathrm{BMO}}\left[\frac{|B_j|}{\omega_2(B_j)}\right]^{\frac{1}{q}}\left[\frac{\omega_2(B_k)}{|B_k|}\right]^{\frac{1}{q}}\\
\le& C2^{(k-j)(\beta-\frac{1}{2}+\frac{n}{q}-\frac{n}{r'})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|b\|_{\mathrm{BMO}}\|f_j\|_{L^q(\omega_2)}.
\end{aligned}$$

对 A_2, 注意到 $|b_k-b_j|\le C(k-j)\|b\|_{\mathrm{BMO}}$, 有

$$\begin{aligned}
A_2 =&2^{\frac{j}{2}-\frac{k}{2}-kn-j\beta}\cdot 2^{k(\beta+\frac{n}{r})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\left\{\int_{C_k}\left[\int_{C_j}|b_k-b_j|^{\frac{qr'}{q-r'}}dy\right]^{\frac{q-r'}{r'}}\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\
\le& C(k-j)2^{\frac{j}{2}-\frac{k}{2}-kn-j\beta}\cdot 2^{k(\beta+\frac{n}{r})}\\
&\cdot 2^{jn(\frac{1}{r'}-\frac{1}{q})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\|b\|_{\mathrm{BMO}}\left\{\int_{C_k}\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\
\le& C(k-j)2^{\frac{j}{2}-\frac{k}{2}-kn-j\beta}\cdot 2^{k(\beta+\frac{n}{r})}\cdot 2^{jn(\frac{1}{r'}-\frac{1}{q})}\\
&\cdot 2^{\frac{kn}{q}}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|f_j\|_{L^q(\omega_2)}\|b\|_{\mathrm{BMO}}\left[\frac{|B_j|}{\omega_2(B_j)}\right]^{\frac{1}{q}}\left[\frac{\omega_2(B_k)}{|B_k|}\right]^{\frac{1}{q}}\\
\le& C(k-j)2^{(k-j)(\beta-\frac{1}{2}+\frac{n}{q}-\frac{n}{r'})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|b\|_{\mathrm{BMO}}\|f_j\|_{L^q(\omega_2)}.
\end{aligned}$$

对 A_3, 有

$$
\begin{aligned}
A_3 =& 2^{\frac{j}{2}-\frac{k}{2}-kn-j\beta}\cdot 2^{k(\beta+\frac{n}{r})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\left\{\int_{C_k}\left[\int_{C_j}|b(y)-b_j|^{\frac{qr'}{q-r'}}dy\right]^{\frac{q-r'}{r'}}\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\
\leq& C2^{\frac{j}{2}-\frac{k}{2}-kn-j\beta}\cdot 2^{k(\beta+\frac{n}{r})}\cdot 2^{jn(\frac{1}{r'}-\frac{1}{q})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\|b\|_{\mathrm{BMO}}\left\{\int_{C_k}\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\
\leq& C2^{\frac{j}{2}-\frac{k}{2}-kn-j\beta}\cdot 2^{k(\beta+\frac{n}{r})}\\
&\cdot 2^{jn(\frac{1}{r'}-\frac{1}{q})}\cdot 2^{\frac{kn}{q}}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|f_j\|_{L^q(\omega_2)}\|b\|_{\mathrm{BMO}}\left[\frac{|B_j|}{\omega_2(B_j)}\right]^{\frac{1}{q}}\left[\frac{\omega_2(B_k)}{|B_k|}\right]^{\frac{1}{q}}\\
\leq& C2^{(k-j)(\beta-\frac{1}{2}+\frac{n}{q}-\frac{n}{r'})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|b\|_{\mathrm{BMO}}\|f_j\|_{L^q(\omega_2)}.
\end{aligned}
$$

从而

$$A\leq C(k-j)2^{(k-j)(\beta-\frac{1}{2}+\frac{n}{q}-\frac{n}{r'})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|b\|_{BMO}\|f_j\|_{L^q(\omega_2)}.$$

对 B, 类似于 A 的估计方法, 得

$$
\begin{aligned}
B =& \left\{\int_{C_k}\left[\int_{|x|}^\infty\left|\int_{|x-y|\leq t}\frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-1}}(b(x)-b(y))f_j(y)dy\right|^2\frac{dt}{t^3}\right]^{\frac{q}{2}}\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\
\leq& C\left\{\int_{C_k}\left[\int_{C_j}\frac{|\Omega(x,x-y)|}{|x-y|^{n-1}}|b(x)-b(y)||f_j(y)|\left(\int_{|x-y|\leq t,|x|\leq t}\frac{dt}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}}dy\right]^q\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\
\leq& C\left\{\int_{C_k}\left[\int_{C_j}\frac{|\Omega(x,x-y)|}{|x-y|^{n-1}}|b(x)-b(y)||f_j(y)|\frac{1}{|x-y|}dy\right]^q\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\
\leq& C\left\{\int_{C_k}\left[\int_{C_j}|\Omega(x,x-y)||b(x)-b(y)||f_j(y)|\frac{1}{|x|^n}dy\right]^q\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\
\leq& C\left\{\int_{C_k}\left[\int_{C_j}|\Omega(x,x-y)||y|^\beta|b(x)-b(y)||f_j(y)|\frac{|y|^{-\beta}}{|x|^n}dy\right]^q\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\
\leq& C2^{-kn-j\beta}\left\{\int_{C_k}\left[\left(\int_{C_j}|\Omega(x,x-y)|^r|y|^{r\beta}dy\right)^{\frac{q}{r}}\left(\int_{C_j}|b(x)-b(y)|^{r'}|f_j(y)|^{r'}dy\right)^{\frac{q}{r'}}\right]\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\
\leq& C2^{-kn-j\beta}\cdot 2^{k(\beta+\frac{n}{r})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\left\{\int_{C_k}\left(\int_{C_j}|b(x)-b(y)|^{r'}|f_j(y)|^{r'}dy\right)^{\frac{q}{r'}}\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\
\leq& C2^{-kn-j\beta}\cdot 2^{k(\beta+\frac{n}{r})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\\
&\left\{\int_{C_k}\left[\left(\int_{C_j}|b(x)-b(y)|^{\frac{qr'}{q-r'}}dy\right)^{\frac{q-r'}{r'}}\left(\int_{C_j}|f_j(y)|^q dy\right)\right]\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\
\leq& C2^{-kn-j\beta}\cdot 2^{k(\beta+\frac{n}{r})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\left\{\int_{C_k}\left[\int_{C_j}|b(x)-b(y)|^{\frac{qr'}{q-r'}}dy\right]^{\frac{q-r'}{r'}}\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\leq & C2^{-kn-j\beta}\cdot 2^{k(\beta+\frac{n}{r})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\left(\int_{C_k}\left[\int_{C_j}|b(x)-b_k|^{\frac{qr'}{q-r'}}dy\right]^{\frac{q-r'}{r'}}\omega_2(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+C2^{-kn-j\beta}\cdot 2^{k(\beta+\frac{n}{r})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\left(\int_{C_k}\left[\int_{C_j}|b_k-b_j|^{\frac{qr'}{q-r'}}dy\right]^{\frac{q-r'}{r'}}\omega_2(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+C2^{-kn-j\beta}\cdot 2^{k(\beta+\frac{n}{r})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\left(\int_{C_k}\left[\int_{C_j}|b(y)-b_j|^{\frac{qr'}{q-r'}}dy\right]^{\frac{q-r'}{r'}}\omega_2(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
\triangleq & C(B_1+B_2+B_3).
\end{aligned}
$$

对 B_1, 有

$$
\begin{aligned}
B_1 =& 2^{-kn-j\beta}\cdot 2^{k(\beta+\frac{n}{r})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\\
&\left\{\int_{C_k}\left[\int_{C_j}|b(x)-b_k|^{\frac{qr'}{q-r'}}dy\right]^{\frac{q-r'}{r'}}\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\
\leq & C2^{-kn-j\beta}\cdot 2^{k(\beta+\frac{n}{r})}\cdot 2^{jn(\frac{1}{r'}-\frac{1}{q})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\left\{\int_{C_k}|b(x)-b_k|^q\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\
\leq & C2^{-kn-j\beta}\cdot 2^{k(\beta+\frac{n}{r})}\cdot 2^{jn(\frac{1}{r'}-\frac{1}{q})}\cdot 2^{\frac{kn}{q}}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\|b\|_{\mathrm{BMO}}\left[\frac{\omega_2(B_k)}{|B_k|}\right]^{\frac{1}{q}}\\
\leq & C2^{-kn-j\beta}\cdot 2^{k(\beta+\frac{n}{r})}\cdot 2^{jn(\frac{1}{r'}-\frac{1}{q})}\\
&\cdot 2^{\frac{kn}{q}}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|f_j\|_{L^q(\omega_2)}\|b\|_{\mathrm{BMO}}\left[\frac{|B_j|}{\omega_2(B_j)}\right]^{\frac{1}{q}}\left[\frac{\omega_2(B_k)}{|B_k|}\right]^{\frac{1}{q}}\\
\leq & C2^{(k-j)(\beta+\frac{n}{q}-\frac{n}{r'})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|b\|_{\mathrm{BMO}}\|f_j\|_{L^q(\omega_2)}.
\end{aligned}
$$

对 B_2, 注意到 $|b_k-b_j|\leq C(k-j)\|b\|_{\mathrm{BMO}}$, 有

$$
\begin{aligned}
B_2 =& 2^{-kn-j\beta}\cdot 2^{k(\beta+\frac{n}{r})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\left\{\int_{C_k}\left[\int_{C_j}|b_k-b_j|^{\frac{qr'}{q-r'}}dy\right]^{\frac{q-r'}{r'}}\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\
\leq & C(k-j)2^{-kn-j\beta}\cdot 2^{k(\beta+\frac{n}{r})}\cdot 2^{jn(\frac{1}{r'}-\frac{1}{q})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\|b\|_{\mathrm{BMO}}\left\{\int_{C_k}\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\
\leq & C(k-j)2^{-kn-j\beta}\cdot 2^{k(\beta+\frac{n}{r})}\cdot 2^{jn(\frac{1}{r'}-\frac{1}{q})}\\
&\cdot 2^{\frac{kn}{q}}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|f_j\|_{L^q(\omega_2)}\|b\|_{\mathrm{BMO}}\left[\frac{|B_j|}{\omega_2(B_j)}\right]^{\frac{1}{q}}\left[\frac{\omega_2(B_k)}{|B_k|}\right]^{\frac{1}{q}}\\
\leq & C(k-j)2^{(k-j)(\beta+\frac{n}{q}-\frac{n}{r'})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|b\|_{\mathrm{BMO}}\|f_j\|_{L^q(\omega_2)}.
\end{aligned}
$$

对 B_3, 有

$$
\begin{aligned}
B_3 =& 2^{-kn-j\beta}\cdot 2^{k(\beta+\frac{n}{r})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\left\{\int_{C_k}\left[\int_{C_j}|b(y)-b_j|^{\frac{qr'}{q-r'}}dy\right]^{\frac{q-r'}{r'}}\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\
\leq & C2^{-kn-j\beta}\cdot 2^{k(\beta+\frac{n}{r})}\cdot 2^{jn(\frac{1}{r'}-\frac{1}{q})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\|b\|_{\mathrm{BMO}}\left\{\int_{C_k}\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

$$\leq C2^{-kn-j\beta}\cdot 2^{k(\beta+\frac{n}{r})}\cdot 2^{jn(\frac{1}{r'}-\frac{1}{q})}$$
$$\cdot 2^{\frac{kn}{q}}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|f_j\|_{L^q(\omega_2)}\|b\|_{\mathrm{BMO}}\left[\frac{|B_j|}{\omega_2(B_j)}\right]^{\frac{1}{q}}\left[\frac{\omega_2(B_k)}{|B_k|}\right]^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq C2^{(k-j)(\beta+\frac{n}{q}-\frac{n}{r'})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|b\|_{\mathrm{BMO}}\|f_j\|_{L^q(\omega_2)}.$$

从而
$$B\leq C(k-j)2^{(k-j)(\beta+\frac{n}{q}-\frac{n}{r'})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|b\|_{\mathrm{BMO}}\|f_j\|_{L^q(\omega_2)}.$$

故根据引理 2.1(i), 可得

$$\begin{aligned}U_1\leq & C\|\Omega\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|b\|^p_{\mathrm{BMO}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}\left\{\sum_{j=-\infty}^{k-2}(k-j)2^{(k-j)(\beta-\frac{1}{2}+\frac{n}{q}-\frac{n}{r'})}\|f_j\|_{L^q(\omega_2)}\right\}^p\\ &+C\|\Omega\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|b\|^p_{\mathrm{BMO}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}\left\{\sum_{j=-\infty}^{k-2}(k-j)2^{(k-j)(\beta+\frac{n}{q}-\frac{n}{r'})}\|f_j\|_{L^q(\omega_2)}\right\}^p\\ \leq & C\|b\|^p_{\mathrm{BMO}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{j=-\infty}^{k-2}(k-j)2^{(k-j)(\beta+\frac{n}{q}-\frac{n}{r'})}\left[\frac{\omega_1(B_k)}{\omega_1(B_j)}\right]^{\frac{\alpha}{n}}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha}{n}}\|f_j\|_{L^q(\omega_2)}\right\}^p\\ \leq & C\|b\|^p_{\mathrm{BMO}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{j=-\infty}^{k-2}(k-j)2^{(k-j)(\alpha+\beta+\frac{n}{q}-\frac{n}{r'})}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha}{n}}\|f_j\|_{L^q(\omega_2)}\right\}^p.\end{aligned}$$

当 $0<p\leq 1$ 时, 利用 $(\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}|a_j|)^p\leq\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}|a_j|^p$, 可得

$$\begin{aligned}U_1\leq & C\|b\|^p_{\mathrm{BMO}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{j=-\infty}^{k-2}(k-j)^p2^{p(k-j)(\alpha+\beta+\frac{n}{q}-\frac{n}{r'})}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f_j\|^p_{L^q(\omega_2)}\right\}\\ \leq & C\|b\|^p_{\mathrm{BMO}}\sum_{j=-\infty}^{\infty}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f_j\|^p_{L^q(\omega_2)}\left\{\sum_{k=j+2}^{\infty}(k-j)^p2^{p(k-j)(\alpha+\beta+\frac{n}{q}-\frac{n}{r'})}\right\}\\ \leq & C\|b\|^p_{\mathrm{BMO}}\|f\|^p_{K_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)}.\end{aligned}$$

当 $1<p<\infty$ 时, 利用 Hölder 不等式, 可得

$$\begin{aligned}U_1\leq & C\|b\|^p_{\mathrm{BMO}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{j=-\infty}^{k-2}(k-j)^p2^{p(k-j)(\alpha+\beta+\frac{n}{q}-\frac{n}{r'})/2}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f_j\|^p_{L^q(\omega_2)}\right\}\\ &\times\left\{\sum_{j=-\infty}^{k-2}2^{p'(k-j)(\alpha+\beta+\frac{n}{q}-\frac{n}{r'})/2}\right\}^{\frac{p}{p'}}\leq C\|b\|^p_{\mathrm{BMO}}\|f\|^p_{K_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)}.\end{aligned}$$

最后考虑 U_3, 首先估计 $\left\|\mu^b_\Omega(f_j)\chi_k\right\|_{L^q(\omega_2)}$, 有

$$\begin{aligned}\|\mu^b_\Omega(f_j)\chi_k\|_{L^q(\omega_2)}= & \left\{\int_{C_k}\left[\int_0^\infty\Big|\int_{|x-y|\leq t}\frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-1}}(b(x)-b(y))f_j(y)dy\Big|^2\frac{dt}{t^3}\right]^{\frac{q}{2}}\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\ = & \left\{\int_{C_k}\left[(\int_0^{|y|}+\int_{|y|}^\infty)\Big|\int_{|x-y|\leq t}\frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-1}}(b(x)-b(y))f_j(y)dy\Big|^2\frac{dt}{t^3}\right]^{\frac{q}{2}}\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\\ \leq & C\left\{\int_{C_k}\left[\int_0^{|y|}\Big|\int_{|x-y|\leq t}\frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-1}}(b(x)-b(y))f_j(y)dy\Big|^2\frac{dt}{t^3}\right]^{\frac{q}{2}}\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

$$+ C\left\{\int_{C_k}\left[\int_{|y|}^{\infty}\Big|\int_{|x-y|\leq t}\frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-1}}(b(x)-b(y))f_j(y)dy\Big|^2\frac{dt}{t^3}\right]^{\frac{q}{2}}\omega_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}$$
$$\triangleq C(A'+B').$$

注意到 $x\in C_k, y\in C_j, j\geq k+2$, 则 $|x-y|\sim|y|$, 且 $\Big|\dfrac{1}{|x-y|^2}-\dfrac{1}{|y|^2}\Big|\leq C\dfrac{|x|}{|x-y|^3}$. 由 $r'<q$, 我们可选取适当的 $\beta: -n-\frac{1}{r}<\beta<-n$, 使得 $\alpha>-\frac{\beta}{\delta}-\frac{n}{q}-\frac{n}{\delta r}>n(\frac{1}{\delta r'}-\frac{1}{q})$, 类似于 A 与 B 的估计方法, 由引理 2.3 及 Minkowski 不等式得

$$A'\leq C(j-k)2^{(k-j)(\beta+\frac{1}{2}+\frac{n}{r}+\delta\frac{n}{q})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|b\|_{BMO}\|f_j\|_{L^q(\omega_2)},$$
$$B'\leq C(j-k)2^{(k-j)(\beta+\frac{n}{r}+\delta\frac{n}{q})}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|b\|_{BMO}\|f_j\|_{L^q(\omega_2)}.$$

故由引理 2.1(ii), 可得

$$\begin{aligned}U_3\leq& C\|\Omega\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|b\|^p_{BMO}\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}\left\{\sum_{j=k+2}^{\infty}(j-k)2^{(k-j)(\beta+\frac{1}{2}+\frac{n}{r}+\delta\frac{n}{q})}\|f_j\|_{L^q(\omega_2)}\right\}^p\\
&+C\|\Omega\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|b\|^p_{BMO}\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}\left\{\sum_{j=k+2}^{\infty}(j-k)2^{(k-j)(\beta+\frac{n}{r}+\delta\frac{n}{q})}\|f_j\|_{L^q(\omega_2)}\right\}^p\\
\leq& C\|b\|^p_{\mathrm{BMO}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{j=k+2}^{\infty}(j-k)2^{(k-j)(\beta+\frac{n}{r}+\delta\frac{n}{q})}\left[\frac{\omega_1(B_k)}{\omega_1(B_j)}\right]^{\frac{\alpha}{n}}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha}{n}}\|f_j\|_{L^q(\omega_2)}\right\}^p\\
\leq& C\|b\|^p_{\mathrm{BMO}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{j=k+2}^{\infty}(j-k)2^{(k-j)(\delta\alpha+\beta+\frac{n}{r}+\delta\frac{n}{q})}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha}{n}}\|f_j\|_{L^q(\omega_2)}\right\}^p.\end{aligned}$$

当 $0<p\leq1$ 时, 利用 $(\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}|a_j|)^p\leq\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}|a_j|^p$, 可得

$$\begin{aligned}U_3\leq& C\|b\|^p_{\mathrm{BMO}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{j=k+2}^{\infty}(j-k)^p2^{p(k-j)(\delta\alpha+\beta+\frac{n}{r}+\delta\frac{n}{q})}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f_j\|^p_{L^q(\omega_2)}\right\}\\
\leq& C\|b\|^p_{\mathrm{BMO}}\sum_{j=-\infty}^{\infty}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f_j\|^p_{L^q(\omega_2)}\left\{\sum_{k=-\infty}^{j-2}(j-k)^p2^{p(k-j)(\delta\alpha+\beta+\frac{n}{r}+\delta\frac{n}{q})}\right\}\\
\leq& C\|b\|^p_{\mathrm{BMO}}\|f\|^p_{K_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)}.\end{aligned}$$

当 $1<p<\infty$ 时, 利用 Hölder 不等式, 可得

$$\begin{aligned}U_3\leq& C\|b\|^p_{\mathrm{BMO}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{j=k+2}^{\infty}(j-k)^p2^{p(k-j)(\delta\alpha+\beta+\frac{n}{r}+\delta\frac{n}{q})/2}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f_j\|^p_{L^q(\omega_2)}\right\}\\
&\times\left\{\sum_{j=k+2}^{\infty}2^{p'(k-j)(\delta\alpha+\beta+\frac{n}{r}+\delta\frac{n}{q})/2}\right\}^{\frac{p}{p'}}\leq C\|b\|^p_{\mathrm{BMO}}\|f\|^p_{K_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)}.\end{aligned}$$

从而完成了定理的证明.

参 考 文 献

[1] Torchinsky A, Wang Shilin. A note on the Marcinkiewicz integral [J]. Coll. Math., 1990, 62(1): 235–243.

[2] Chen Jiecheng, Ding Yong, Fan Dashan. A class of integral operators with variable kernels on Hardy spaces [J]. Chinese Annals of Math., 2002, 23A(2): 289–296.

[3] Ding Yong, Fan Dashan, Pan Yiabiao. L^p-boundedness of Marcinkiewicz integrals with Hardy space kernel [J]. Acta Math. Sinica (English Ser.), 2000, 16: 593–600.

[4] Ding Yong, Fan Dashan, Pan Yiabiao. Weighted boundedness for a class of rough Marcinkiewicz integrals [J]. Indiana Univ. Math. J., 1999, 48: 1037–1055.

[5] Chen Dongxiang, Chen Jiecheng. Boundedness of Marcinkiewicz integrals with rough kernel on Herz spaces [J]. Advances in Math., 2005, 34(5): 591–599.

[6] 陶双平, 邵旭馗. 带变量核的 Marcinkiewicz 积分算子在齐次 Morrey-Herz 空间上的有界性 [J]. 兰州大学学报 (自然科学版), 2010, 46(3): 102–106.

[7] 肖强, 司颖华. 带粗糙核的 Marcinkiewicz 积分算子在加权 Morrey-Herz 空间上的有界性 [J]. 徐州师范大学学报 (自然科学版), 2010, 28(3): 17–20.

[8] Lu Shanzhen, Yang Dachun. The decomposition of weighted Herz space on R and its applications [J]. Science in China, 1995, 38A(2): 147–158.

[9] Grafakos L. Classical and modern Fourier analysis [J]. Mechanical Industry Press, 2006.

[10] Muckenhoupt B, Wheeden R L. Weighted norm inequalities for singular fractional integral [J]. Tranc. Amer. Math. Soc., 1971, 161: 249–258.

[11] 姚红超, 朱月萍. 带变量核的 Marcinkiewicz 算子及其交换子在加权 Morrey-Herz 空间上的有界性 [J]. 南通大学学报 (自然科学版), 2012, 11(3): 43–54.

BOUNDEDNESS OF COMMUTATORS OF MARCINKIEWICZ INTEGRALS WITH VARIABLE KERNEL ON WEIGHTED HERZ SPACES

YAN Jian , SHU Li-sheng

(*College of Mathematics and Computer Science, Anhui Normal University, Wuhu 241003, China*)

Abstract: In this paper, the problem of the boundedness of the commutators of Marcinkiewicz integrals with variable kernel is studied. Using the method of their boundedness on weighted L^p spaces, we obtain the result of their boundedness on weighted Herz spaces.

Keywords: variable kernel; Marcinkiewicz integral; commutator; weighted Herz space

2010 MR Subject Classification: 42B20; 42B25