

## 广义全变差正则化图像去噪模型研究

余瑞艳

(长江大学信息与数学学院, 湖北 荆州 434020)

**摘要:** 本文研究了全变差正则化模型在图像去噪过程中易产生阶梯效应的问题, 依据图像的局部结构特利用联合高斯滤波器和边缘检测算子的方法, 构建了广义全变差正则化图像去噪模型, 获得了在消除噪声的同时能够保留图像边缘细节和纹理信息的结果. 实验结果表明, 广义全变差正则化模型在平滑噪声的同时能够保留图像的边缘轮廓等细节信息, 得到的复原图像在峰值信噪比、平均结构相似度和主观视觉效果方面均有所提高.

**关键词:** 全变差正则化; 图像去噪; 变分方法; 能量泛函

MR(2010) 主题分类号: 68U10; 49N45

中图分类号: O245

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2014)03-0502-07

### 1 引言

图像在获取和传输过程中, 不可避免地受到各种噪声的污染, 导致图像的真实信息被噪声所淹没, 降低图像的可读性与可应用性. 因此我们有必要对含噪图像进行降噪处理, 使得复原图像能够满足图像分割、目标识别和边缘检测等后续工作的需要. 此时, 描述含噪图像  $f$  的数学模型为

$$f = u + n, \quad (1.1)$$

其中  $u$  为清晰图像,  $n$  为方差为  $\delta^2$  的高斯白噪声. 图像去噪已成为数字图像处理领域中一个非常重要的课题, 目前已有领域滤波、频域滤波和小波域滤波等多种去噪方法<sup>[1]</sup>. 在  $L^2$  范数基础上构建的各向同性扩散模型, 由于其在去噪过程中的各项同性扩散特点, 使得复原图像中的边缘轮廓容易被模糊<sup>[1]</sup>. 1992年 Rudin、Osher 和 Fatemi<sup>[2]</sup> 在  $L^1$  范数基础上提出了全变差正则化 (Total variation, TV) 模型, 该模型在消除噪声的同时能够很好地保留图像的边缘轮廓, 但会将连续光滑信号变成分段的等值信号, 从而导致“分片常数”效应<sup>[3,4]</sup>, Song<sup>[5]</sup> 为克服 TV 模型容易产生“分片常数”效应的问题, 提出了广义 TV 模型, 但广义参数  $p$  的客观选取严重影响了含噪图像的复原质量. 鉴于此, 张红英和黎芳等人<sup>[6,7]</sup> 提出了自适应的广义 TV 模型, 该模型根据含噪图像的局部梯度信息自适应地选取广义参数  $p$ , 能够同时兼顾图像的平滑去噪与边缘保留. 但根据局部梯度信息自适应选取的广义参数  $p$  对噪声有着很强的敏感性, 在图像受噪声污染较为严重时不能准确地得到广义参数  $p$ , 降低了图像复原质量<sup>[8]</sup>.

为提高含噪图像的复原质量, 本文先利用高斯滤波器对含噪图像作预处理, 然后构建 8 个边缘检测算子在预处理图像基础上计算广义参数  $p$ , 降低广义参数自适应选取过程中对噪

\*收稿日期: 2012-10-19      接收日期: 2013-06-03

基金项目: 湖北省教育厅科学技术研究项目资助 (D20111305); 湖北省教育厅教学研究项目资助 (2010199).

作者简介: 余瑞艳 (1979-), 女, 湖北枝江, 讲师, 主要研究方向: 计算数学.

声的敏感性, 以构建改进的广义全变差正则化图像去噪模型. 该模型在消除噪声的同时能够保留图像的边缘轮廓等细节信息, 提高图像复原的质量.

### 2 广义全变差正则化图像去噪模型

受上述研究内容的启发, 文章提出如下的广义全变差正则化图像去噪模型 (Generalized total variation, GTV):

$$\min_{u \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)} E(u) = \iint_{\Omega} \frac{1}{p(x, y)} |\nabla u|^{p(x, y)} dx dy + \frac{\lambda}{2} \iint_{\Omega} |u - f|^2 dx dy, \tag{2.1}$$

其中  $\lambda > 0$  为正则化参数, 广义参数  $p(x, y) \in [1, 2]$  随图像局部结构信息的变化而变化,  $\Omega$  为图像空间且  $(x, y) \in \Omega$ .

不失一般性, 后文讨论中将  $p(x, y)$  简记为  $p$ . 当  $p = 1$  时, 广义全变差正则化模型 (GTV) 退化成基于  $L^1$  范数的全变差正则化去噪模型. 此时的模型沿图像边缘轮廓方向扩散能力较弱, 能够保留图像的边缘轮廓信息, 但易将噪声当成边缘从而在图像的平滑区产生“分片常数”效应. 当  $p = 2$  时, GTV 等效成基于  $L^2$  范数的各向同性扩散 (调和) 去噪模型, 在平滑区能够有效地去除噪声, 但因该模型朝各个方向的扩散能力相同, 容易模糊图像的边缘轮廓等细节信息. 于是构建广义全变差正则化去噪模型的重点便转化成如何针对图像的局部结构信息自适应地选取广义参数  $p$ , 以达到在平滑噪声的同时能够保留图像的边缘轮廓等细节信息.

为降低广义参数  $p$  对噪声的敏感性, 文章先用一个高斯滤波器  $G_{\sigma}$  对含噪图像作预处理, 消除含噪图像平滑区的部分噪声, 降低将噪声当成图像假边缘的可能性. 然后构建 8 个边缘检测算子  $d_{\theta}$  (大小为  $6 \times 6$ ) 在预处理图像的基础上计算广义参数  $p$ , 其中预处理图像  $\hat{f}$  为

$$\hat{f} = G_{\sigma} \otimes f, \tag{2.2}$$

式中  $\sigma > 0$  为高斯滤波器  $G_{\sigma}$  的标准差,  $\otimes$  为卷积运算符. 此时的边缘检测算子  $d_{\theta}$  是由  $d_0$  经旋转角度  $\theta \in \Theta$  ( $\Theta = \{0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4\}$ ) 后得到的, 其中边缘检测算子  $d_0$  为 (见文献 [9])

$$d_0 = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} O_1 & & & & & & & \\ O_2 & M & O_2 & & & & & \\ & O_1 & & & & & & \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$
$$O_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, O_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

根据对边缘检测算子  $d_{\theta}$  的定义, 广义全变差正则化去噪模型 (2.1) 中的广义参数  $p$  为

$$p = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \times \sqrt{\sum_{\theta \in \Theta} (d_{\theta} \otimes \hat{f})^2}} \in [1, 2], \quad \Theta = \left\{ 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4} \right\}. \tag{2.4}$$

由于边缘检测算子  $d_{\theta}$  有着很强的对称性, 能够同时利用图像在 8 个方向上的灰度信息, 降低噪声对边缘检测结果的影响, 提高广义参数  $p$  计算的鲁棒性. 为验证本文所定义的广义

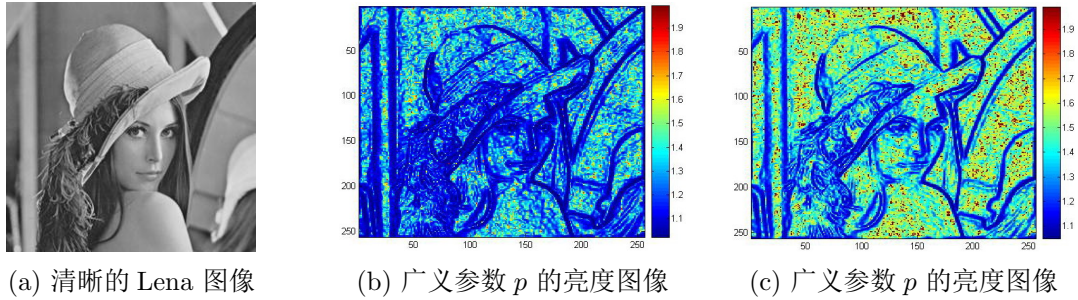


图 1 广义参数  $p$  的亮度图像 (噪声标准差  $\delta = 10$ )

参数  $p$  的有效性, 以受标准差为 10 的高斯白噪声污染的 Lena 图像为例, 与文献 [4, 5] 中对  $p$  的计算结果进行了比较分析, 如图 1 所示

如图 1(a) 所示, 清晰 Lena 图像中的边缘轮廓和光滑区域清晰可见, 文献 [4, 5] 在计算广义参数  $p$  时仅仅利用了预处理图像  $\hat{f}$  的局部梯度信息, 无法克服对噪声的敏感性, 如图 1(b) 中计算的广义参数  $p$  出现了较大的误差. 在图 1(c) 中, 本文采用对称性较强的边缘检测算子  $d_\theta$ , 降低了广义参数  $p$  计算过程中对噪声的敏感性, 提高了广义参数  $p$  的计算精度. 即在图像的平滑区域  $\sum_{\theta \in \Theta} (d_\theta \otimes \hat{f})^2 \rightarrow 0$ , 此时广义参数  $p \rightarrow 2$ , GTV 模型能够有效地平滑噪声; 在图像的边缘轮廓区域  $\sum_{\theta \in \Theta} (d_\theta \otimes \hat{f})^2 \rightarrow \infty$ , 广义参数  $p \rightarrow 1$ , 此时 GTV 模型沿图像边缘轮廓方向扩散能力较弱, 能够保留图像的边缘轮廓信息. 在图像的其他区域, 广义参数  $p$  按照  $\sum_{\theta \in \Theta} (d_\theta \otimes \hat{f})^2 \rightarrow \infty$  的大小自适应地变化, 同时兼顾图像的平滑去噪与边缘轮廓保留, 提高含噪图像的复原质量.

### 3 演化方程与数值实现

为了求出能量泛函 (2.1) 的极小解, 本文先利用变分法推导该能量泛函对应的 Euler-Lagrange 偏微分方程 (Partial differential equations, PDEs), 然后得到该 PDEs 对应的梯度下降流方程, 此时梯度下降流方程的稳定解即为对应能量泛函的极小解.

令  $F(x, y, u, u_x, u_y) = \frac{1}{p} |\nabla u|^p + \frac{\lambda}{2} |u - f|^2$ , 此时对广义全变差正则化模型 (2.1) 的最优解  $u(x, y)$  作一微扰动  $v(x, y)$ , 得  $u(x, y) + v(x, y)$ , 当  $v(x, y)$  和  $v'(x, y)$  足够小时, 由 Taylor 展开得到

$$F(x, y, u + v, u_x + v_x, u_y + v_y) = F(x, y, u, u_x, u_y) + \frac{\partial F}{\partial u} v + \frac{\partial F}{\partial u_x} v_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} v_y + \dots \quad (3.1)$$

联立模型 (2.1) 和公式 (3.1), 得到

$$E(u + v) \cong E(u) + \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial F}{\partial u} v + \frac{\partial F}{\partial u_x} v_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} v_y \right) dx dy. \quad (3.2)$$

根据分部积分法和 Neumann 边界条件, 得到

$$E(u + v) \cong E(u) + \iint_{\Omega} \left\{ v \cdot \left[ \lambda(u - f) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{d}{dy} \left( \frac{\partial F}{\partial u_y} \right) \right] \right\} dx dy. \quad (3.3)$$

当能量泛函  $E(u)$  达到极值, 对  $u(x, y)$  的任一足够小的微小扰动  $v(x, y)$  都应使得  $E(u)$  的极值不变, 则此时可得到能量泛函 (2.1) 的 Euler-Lagrange 偏微分方程<sup>[10]</sup>

$$\lambda(u - f) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{d}{dy} \left( \frac{\partial F}{\partial u_y} \right) = 0. \quad (3.4)$$

又因为  $\partial F / \partial u_x = |\nabla u|^{p-2} u_x$ ,  $\partial F / \partial u_y = |\nabla u|^{p-2} u_y$ , 则得到最终的 Euler-Lagrange 偏微分方程为

$$\lambda(u - f) - \nabla \cdot \frac{\nabla u}{|\nabla u|^{2-p}} = 0. \quad (3.5)$$

此时能量泛函 (2.1) 的极值问题归结为求解相应 Euler-Lagrange 偏微分方程问题, 但该非线性 PDEs 的求解非常困难. 同时, 为抑制方程 (3.5) 在图像平滑区域 ( $\nabla u \approx 0$ ) 不稳定的问题, 引入一较小的常数  $\beta > 0$ , 将方程 (3.5) 改写成如下形式:

$$\lambda(u - f) - \nabla \cdot \frac{\nabla u}{|\nabla u|_{\beta}^{2-p}} = 0, \quad (3.6)$$

其中  $|\nabla u|_{\beta} = \sqrt{|\nabla u|^2 + \beta}$ . 此时在该 PDEs 中引入一个时间辅助变量  $t$ , 将求解静态非线性 PDEs 问题转化为一个动态 PDEs 问题, 当该方程的迭代演化过程达到稳态时, 便可得到 Euler-Lagrange 偏微分方程的解. 而该动态 PDEs 方程即为负梯度下降流方程, 此时图像去噪的迭代演化方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\nabla u}{|\nabla u|_{\beta}^{2-p}} - \lambda(u - f), \\ u|_{t=0} = I, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

其中  $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = 0$  为 Neumann 边界条件,  $n$  为图像  $u$  的区域边界. 然后利用有限差分格式去离散上述的演化方程, 可得到对应的迭代求解格式<sup>[1]</sup>. 利用散度的基本性质有

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \frac{\nabla u}{|\nabla u|_{\beta}^{2-p}} &= (\nabla \cdot \nabla u) \cdot |\nabla u|^{p-2} + \nabla (|\nabla u|^{p-2}) \cdot \nabla u \\ &= |\nabla u|^{p-4} \cdot [(p-1)(u_x^2 u_{xx} + u_y^2 u_{yy}) + 2(p-2)u_x u_y u_{xy} + u_x^2 u_{yy} + u_y^2 u_{xx}]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

令空间步长为  $h = 1$ , 时间步长为  $\Delta t$ , 变量梯度利用中心差分进行计算, 此时迭代演化方程 (3.7) 的离散迭代求解格式为

$$u_{k+1} = u_k + \Delta t \cdot [\Phi(u_k) - \lambda(u_k - f)], \quad (3.9)$$

其中

$$\Phi(u_k) = |\nabla u_k|^{p-4} \cdot [(p-1)(u_{k,x}^2 u_{k,xx} + u_{k,y}^2 u_{k,yy}) + 2(p-2)u_{k,x} u_{k,y} u_{k,xy} + u_{k,x}^2 u_{k,yy} + u_{k,y}^2 u_{k,xx}],$$

迭代初始值取  $u_0 = f$ .

#### 4 实验结果及分析

为验证文中广义全变差正则化图像去噪模型 (GTV) 的有效性, 采用标准的 Lena 和 Toys 图像进行实验, 并与标准全变差正则化模型 (Standard Total Variation, STV) 和自适应全变

差正则化模型 (Adaptive Total Variation, ATV) 的实验结果进行比较分析. 实验仿真中, 输入图像的大小均为  $256 \times 256$ , 灰度级为 256, 加性噪声的标准差分别为 20 和 30. 实验是在 CPU Intel(R) 2.0GHz, 1G 内存, Matlab 7.9.0 的环境下进行, 综合采用传统的量化指标峰值信噪比 (Peak signal-to-noise ratio, PSNR) 和最近受关注的平均结构相似度<sup>[11,12]</sup>(Mean structural similarity, MSSIM) 作为图像去噪质量的评价标准, MSSIM 指标用以衡量复原图像与清晰图像在亮度、对比度和结构三方面的综合相似性, 其中 PSNR 和 MSSIM 的定义分别为

$$\text{PSNR}(u, \bar{u}) = 10 \log_{10} \frac{255^2 \times M \times N}{\|u - \bar{u}\|_2^2} \text{dB}, \quad (4.1)$$

$$\text{MSSIM}(u, \bar{u}) = \frac{1}{\Sigma} \sum_{i=1}^{\Sigma} [l(u_i, \bar{u}_i)]^{\alpha} \cdot [c(u_i, \bar{u}_i)]^{\beta} \cdot [s(u_i, \bar{u}_i)]^{\gamma}, \quad (4.2)$$

其中  $u$  为清晰图像,  $\bar{u}$  为去噪图像,  $M \times N$  为图像大小,  $\Sigma$  为图像分块数目,  $\bar{u}_i$  与  $u_i$  分别为去噪图像块与其对应的清晰图像块. 本文取 MSSIM 指标中调整三个比较函数所占比重的参数  $\alpha, \beta$  与  $\gamma$  均为 1, 广义全变差正则化模型 (GTV) 中的正则化参数为  $\lambda = 0.01$ , 且离散迭代求解格式 (3.8) 中的时间步长为  $\Delta t = 0.2$ , 并满足停机准则  $\|u_k - u_{k-1}\|_2 / \|u_k\|_2 < 5 \times 10^{-4}$ . 此时的实验结果如图 2, 图 3 和表 1 所示.

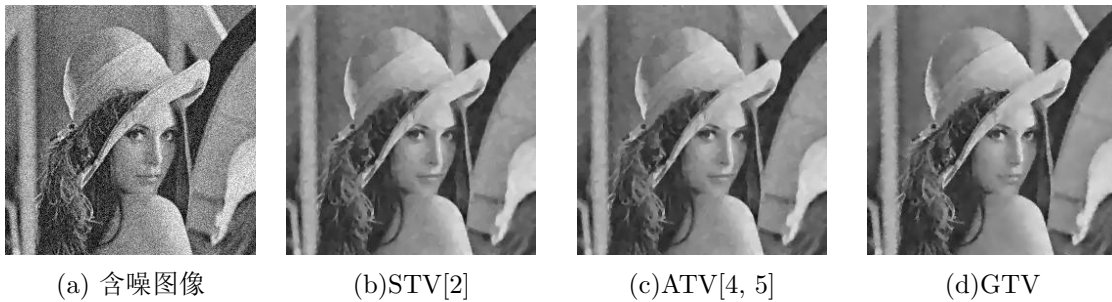


图 2 去噪前后的 Lena 图像 (噪声标准差  $\delta = 20$ )



图 3 去噪前后的 Toys 图像 (噪声标准差  $\delta = 30$ )

图 2 和图 3 分别为去噪前后的 Lena 和 Toys 图像, 表 1 为不同噪声水平 (噪声标准差分别为 20 和 30) 下的复原图像客观评价结果. 由实验数据可知, 本文提出的广义全变差正则化模型 (GTV) 在不同噪声水平下的图像复原效果均优于其它两种方法, 人眼能直观地感受到图像复原质量的提高. 在图 2(b) 和图 3(b) 中, STV 模型虽然在消除噪声的同时能够保留图

像的边缘轮廓信息,但在图像的平滑区有着明显的“分片常数”效应. ATV 模型在一定程度上可以克服 STV 模型极易产生“分片常数”效应的不足,但由于在其对应的广义参数  $p$  对噪声异常敏感,使得在平滑区易将噪声当作边缘轮廓而保留,导致复原图像出现了假边缘. 而本文提出的 GTV 模型中的广义参数  $p$  对噪声有着极强的鲁棒性,在消除图像平滑区噪声的同时,能够很好地保留图像的边缘轮廓等结构信息,提高了含噪图像的复原质量. GTV 涉及 8 个方向检测算子的计算,而 ATV 选取广义参数  $p$  的方式较为简单,因此 GTV 在 CPU 计算时间上比 ATV 略有增加,但较 STV 能够明显地提高图像去噪的计算效率.

表 1 图像去噪方法的实验结果比较

测试图像	评价标准	含噪图像	STV[2]	ATV[4, 5]	GTV
Lena ( $\delta = 20$ )	PSNR	22.1311	28.9672	29.2781	29.4735
	MSSIM	0.4623	0.7619	0.8241	0.8386
	CPU Time	—	9.7528	4.3829	5.0154
Lena ( $\delta = 30$ )	PSNR	18.7344	27.3445	27.5922	27.8520
	MSSIM	0.3435	0.7276	0.7560	0.7900
	CPU Time	—	11.630	5.9285	6.4932
Toys ( $\delta = 20$ )	PSNR	22.2158	31.8784	32.5628	32.9246
	MSSIM	0.2982	0.7615	0.8118	0.8402
	CPU Time	—	8.8538	3.6720	3.9829
Toys ( $\delta = 30$ )	PSNR	18.7874	30.2497	30.9615	31.3083
	MSSIM	0.1952	0.7057	0.7718	0.7980
	CPU Time	—	10.847	5.6297	5.8319

## 5 总结

文章在分析基于  $L^1$  范数的全变差正则化模型和基于  $L^2$  范数的调和模型的优点与不足的基础上,提出了基于  $L^p$  ( $1 \leq p \leq 2$ ) 范数的广义全变差正则化图像去噪模型,并引入边缘检测算子自适应选取广义参数  $p$ ,降低其对噪声的敏感性. 实验结果表明,本文提出的广义全变差正则化模型消噪效果明显,并在消除噪声的同时能够保留图像的边缘轮廓等结构信息,克服了全变差正则化模型中“分片常数”效应和调和模型中模糊边缘轮廓的不足,且人眼能直观地感受到图像复原质量的提高.

## 参 考 文 献

- [1] Aubert G, Kornprobst P. Mathematical problems in image processing: partial differential equations and the calculus of variations[M]. New York: Springer, 2009.
- [2] Rudin L I, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithm[J]. Physica D, 1992, 60: 259-268.
- [3] 刘文, 吴传生, 许田. 自适应全变分图像去噪模型及其快速求解 [J]. 计算机应用研究, 2011, 28(12): 4797-4800.

- [4] Gilboa G, Sochen N, Zeevi Y Y. Variational denoising of partly textured images by spatially varying constraints[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 15(8): 2281–2289.
- [5] Song B. Topical in variation PDE image segmentation, inpainting and denoising[D]. USA: University of California Los Angeles, 2003.
- [6] 张红英, 彭启琮. 全变分自适应图像去噪模型 [J]. 光电工程, 2006, 33(3): 50–53.
- [7] 黎芳, 刘瑞华.  $P(x)$  调和映射在图像恢复中的应用 [J]. 中国图象图形学报, 2008, 13(1): 19–23.
- [8] Wu C S, Liu W, Guo X L. Adaptive total variation model for image denoising based on modified orientation information measure[C]. Proceedings of 3rd International Congress on Image and Signal Processing. Yantai: IEEE Computer Society, 2010: 616–620.
- [9] Almeida M S, Almeida L B. Blind and semi-blind deblurring of natural images[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2010, 19(1): 36–52.
- [10] 陆金甫, 关治. 偏微分方程数值解法 (第 2 版)[M]. 北京: 清华大学出版社, 2007.
- [11] 刘文, 吴传生, 吕琪. 含噪径向模糊图像的复原算法研究 [J]. 武汉理工大学学报, 2011, 33(4): 139–143.
- [12] Zhou W, Alna C B, Hamid R S, et al. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2004, 13(4): 1–14.

## RESEARCH ON GENERALIZED TOTAL VARIATION REGULARIZATION MODEL FOR IMAGE DENOISING

YU Rui-yan

*(School of Information and Mathematics, Yangtze University, Jingzhou 434020, China)*

**Abstract:** To deal with the problem of staircase effects during noise removal, a modified generalized total variation denoising model is proposed in this paper. To guarantee the satisfactory denoising performance, the generalized parameter is calculated adaptively by combining the Gaussian filter and edge detection filters based on local image features. The proposed model could keep a good balance between noise reduction and image details preservation. The experimental results have demonstrated the superior denoising performance of the proposed total variation model in terms of the peak signal to noise ratio, mean structural similarity and subjective visual effect.

**Keywords:** total variation regularization; image denoising; variational method; energy functional.

**2010 MR Subject Classification:** 68U10; 49N45