Vol. 34 (2014)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

两个幂等矩阵的组合的群逆

左可正, 谢 涛
(湖北师范学院数学与统计学院, 湖北 黄石 435002)

摘 要: 本文研究了当 P 与 Q 是两个复数域上的 n 阶幂等矩阵且满足 $PQP=PQ$ 时, 组合 $aP+bQ+cPQ+dQP+eQPQ$ 的群逆问题, 利用矩阵的分块及群逆的性质, 证明了它是群逆阵, 并且给出了其群逆的表达式, 其中 $ab\neq 0$, a,b,c,d,e 为复数.

关键词: 群逆阵; 幂等矩阵; 组合
MR(2010) **主题分类号**: 15A09 **中图分类号**: O151.21
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2014)03-0497-05

1 引言及预备引理

幂等矩阵及幂等算子在线性代数与算子代数中是很重要的研究对象. 1990 年, 武培元证明了每个复数域上的无限维希尔伯特空间上的有界线性算子是不超过五个幂等算子的线性组合 [1]. 2004 年, Rabanovic 证明了特征为零的域上任意一个矩阵都可以表示成三个幂等矩阵的线性组合 [2]. 可见幂等矩阵及幂等算子对于其它矩阵及其它算子的研究起着重要的作用.

近年来, 中外学者对各种特殊矩阵的线性组合及组合的相关性质进行了广泛和深入的研究. 在文 [4] 中, Baksalary J.K. 和 Baksalary O.M. 给出了两个幂等矩阵的线性组合仍是幂等矩阵的完全分类. 随后, 在文 [3] 中, Baksalary J.K. 和 Baksalary O.M. 又给出了两个幂等矩阵线性组合的可逆性与系数的关系. 在文 [5] 中, 杜鸿科等讨论了希尔伯特空间上两个幂等算子线性组合的可逆性与组合系数的关系. 在文 [6] 中, Koliha 等给出了两个正交投影算子的和与差的可逆的一些新的充要条件. 随后, 在文 [7] 中, Koliha 深入研究了两个幂等矩阵线性组合的核子空间, 发现核子空间的维数不依赖于组合系数的选取. 在文 [8] 中, 左可正考虑了两个幂等矩阵的一种特殊的组合, 证明了该组合的核子空间的维数与系数的关系, 并讨论了该组合的可逆性及求逆公式, 推广了前人的结果. 在文 [9] 中, 左和谢得到了两个幂等矩阵的一般组合可逆的一些充要条件. 在文 [10] 中, 邓春源研究了 Hilbert 空间上两个幂等算子的和与差的可逆性的充要条件. 2011 年, 在文 [11] 和 [12] 中, 刘晓冀等分别研究了两个幂等矩阵线性组合及一般组合的群逆, 给出了群逆存在的条件及群逆的计算公式.

在本文中, 假设 P 与 Q 是两个复数域上的 n 阶幂等矩阵且满足 $PQP=PQ$ 时, 证明了 P 与 Q 的组合 $aP+bQ+cPQ+dQP+eQPQ$ 是群逆阵, 并且给出了其群逆的表达式, 其中 $ab\neq 0$, a,b,c,d,e 为复数.

在随后的讨论中, 用 $\mathbb{C}^{n\times m}$ 表示复数域 $\mathbb{C}$ 上的所有 $n\times m$ 矩阵构成的集合. 对每个 $A\in\mathbb{C}^{n\times m}$, 用 A^T 表示 A 的转置, 用 A^* 表示 A 的共轭转置, $r(A)$ 表示 A 的秩. 如果对于

*收稿日期: 2012-03-05 接收日期: 2012-10-23
基金项目: 湖北省教育厅重点项目 (D20122202), 湖北省教育厅青年项目 (B20122203).
作者简介: 左可正 (1962–), 男, 湖北大冶, 教授, 主要研究方向: 群论及矩阵分析.

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 存在 $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得

$$AXA = A, \quad XAX = X, \quad AX = XA$$

成立, 则称 A 是一个群逆阵. 如果对于 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 上面的 X 存在, 则易知它是唯一的, 记为 $A^\sharp$, 称为 A 的群逆. 用 $\mathbb{C}_n^{GI}$ 表示 $\mathbb{C}$ 上所有 n 阶群逆阵构成的集合. 若 $A \in \mathbb{C}_n^{GI}$, 则记 $A^\pi = I_n - PP^\sharp$. 一个方阵 A 是群逆阵的充分必要条件是 $r(A^2) = r(A)$ (可参考文献 [14] 第 4 章). 显然, 不是每个矩阵都是群逆阵. 但若 A 是幂等矩阵时, 则 $A^\sharp$ 总是存在的, 且 $A^\sharp = A$. 记 $\mathbb{C}$ 上所有的 n 阶幂等矩阵构成的集合为 $\mathbb{C}_n^P$. 可以证明 A 是群逆阵当且仅当 A^* 是群逆阵, 且此时有 $(A^\sharp)^* = (A^*)^\sharp$. 另外, 对于 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是可逆矩阵, 则 A 是群逆阵的充分必要条件是 SAS^{-1} 是群逆阵, 且此时有 $(SAS^{-1})^\sharp = SA^\sharp S^{-1}$.

若 M 是准对角形矩阵 $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$, 则 M 简记为 $M = A \oplus B$. 关于群逆阵的特征性质及分块矩阵群逆存在的条件和计算公式有如下结论:

引理 1.1 [14] 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则 A 是群逆阵的充要条件是存在可逆矩阵 $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 及可逆阵 $C \in \mathbb{C}^{r\times r}$ 使得 $A = U(C \oplus 0)U^{-1}$, 其中 r 是矩阵 A 的秩. 在此情形下, $A^\sharp = U(C^{-1} \oplus 0)U^{-1}$.

引理 1.2 [13] 设 $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}, A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, 则

(i) $M^\sharp$ 存在当且仅当 $A^\sharp$ 和 $C^\sharp$ 存在且 $C^\pi BA^\pi = 0$;

(ii) 若 $M^\sharp$ 存在, 则 $M^\sharp = \begin{bmatrix} A^\sharp & 0 \\ X & C^\sharp \end{bmatrix}$, 其中 $X = C^\pi B(A^\sharp)^2 + (C^\sharp)^2 BA^\pi - C^\sharp BA^\sharp$.

2 主要结果及其证明

定理 2.1 设 $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ 且满足 $PQP = PQ$. $a, b, c, d, e \in \mathbb{C}, ab \neq 0, a+b+c+d+e \neq 0$, 则 $aP + bQ + cPQ + dQP + eQPQ \in \mathbb{C}_n^{GI}$, 且此时有

$$(aP + bQ + cPQ + dQP + eQPQ)^\sharp = \frac{1}{a}P + \frac{1}{b}Q + (\frac{d}{ab} + \frac{a+c}{(a+b+c+d+e)^2})PQ$$
$$-\frac{a+b+d}{ab}QP + (\frac{b+d+e}{(a+b+c+d+e)^2} + \frac{b+d}{ab})QPQ.$$

证 设 $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ 且满足 $PQP = PQ$. 因为 $P \in \mathbb{C}_n^P$, 那么存在可逆阵 $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 使得

$$P = U(I_r \oplus 0)U^{-1}, \tag{1}$$

其中 $r = r(P)$. 令 $Q = U \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{bmatrix} U^{-1}$, 其中 $Q_1 \in \mathbb{C}^{r\times r}$. 由 $PQP = PQ$ 可得出 $Q_2 = 0$. 又因为 $Q = U \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ Q_3 & Q_4 \end{bmatrix} U^{-1}$ 是幂等的, 所以可得

$$Q_1^2 = Q_1,\ \ Q_4^2 = Q_4,\ \ Q_3Q_1 + Q_4Q_3 = Q_3. \tag{2}$$

因为 $Q_1 \in \mathbb{C}_r^P, Q_4 \in \mathbb{C}_{n-r}^P$, 所以存在 r 阶可逆阵 W 和 $n-r$ 阶可逆阵 V 使得

$$Q_1 = W(I_k \oplus 0)W^{-1},\ \ Q_4 = V(I_t \oplus 0)V^{-1}, \tag{3}$$

其中 $k=r(Q_1), t=r(Q_4)$. 令 $V^{-1}Q_3W=\begin{bmatrix} X_1 & K \\ L & X_4 \end{bmatrix}$, 其中 $X_1\in\mathbb{C}^{t\times k}$. 则由 (2) 式中的第 3 个等式可得出 $X_1=0, X_4=0$. 从而

$$V^{-1}Q_3W=\begin{bmatrix} 0 & K \\ L & 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

又令 $Z=U(W\oplus V)$, 则由 (1), (3) 和 (4) 式可得出

$$P=Z\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}Z^{-1},\quad Q=Z\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K & I & 0 \\ L & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}Z^{-1}. \tag{5}$$

由 (5) 式经过计算可得

$$\begin{aligned} &aP+bQ+cPQ+dQP+eQPQ \\ =&Z\begin{bmatrix} (a+b+c+d+e)I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & aI & 0 & 0 \\ 0 & (b+d)K & bI & 0 \\ (b+d+e)L & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}Z^{-1}. \end{aligned} \tag{6}$$

在 (6) 式中, 令 $A=\begin{bmatrix} (a+b+c+d+e)I & 0 \\ 0 & aI \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & (b+d)K \\ (b+d+e)L & 0 \end{bmatrix}$ 及 $C=\begin{bmatrix} bI & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. 则由引理 1.2 可得

$$\begin{aligned} (aP+bQ+cPQ+dQP+eQPQ)^\sharp =&Z\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ C^\pi BA^{-2}-C^\sharp BA^{-1} & C^\sharp \end{bmatrix}Z^{-1} \\ =&Z\begin{bmatrix} \frac{1}{a+b+c+d+e}I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a}I & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b+d}{ab}K & \frac{1}{b}I & 0 \\ \frac{b+d+e}{(a+b+c+d+e)^2}L & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}Z^{-1}. \end{aligned} \tag{7}$$

由 (5) 式并通过计算可得到

$$PQ=Z\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}Z^{-1}, QP=Z\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 & 0 \\ L & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}Z^{-1}, QPQ=Z\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ L & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}Z^{-1}. \tag{8}$$

那么由 (5) 式、(7) 式和 (8) 式可得出

$$\begin{aligned} &(aP+bQ+cPQ+dQP+eQPQ)^\sharp=\frac{1}{a}P+\frac{1}{b}Q+(\frac{d}{ab}+\frac{a+c}{(a+b+c+d+e)^2})PQ \\ &-\frac{a+b+d}{ab}QP+(\frac{b+d+e}{(a+b+c+d+e)^2}+\frac{b+d}{ab})QPQ. \end{aligned}$$

定理 2.2 设 $P,Q\in\mathbb{C}_n^P$ 满足 $PQP=QP$. $a,b,c,d,e\in\mathbb{C},ab\neq 0,a+b+c+d+e\neq 0$, 则 $aP+bQ+cPQ+dQP+eQPQ\in\mathbb{C}_n^{GI}$, 且此时有

$$\begin{aligned}&(aP+bQ+cPQ+dQP+ePQP)^\sharp\\ =\ &\frac{1}{a}P+\frac{1}{b}Q-\frac{a+b+c}{ab}PQ+(\frac{c}{ab}+\frac{a+d}{(a+b+c+d+e)^2})QP\\ &+(\frac{b+c+e}{(a+b+c+d+e)^2}+\frac{b+c}{ab})QPQ.\end{aligned}$$

证 只需要注意由 $P,Q\in\mathbb{C}_n^P$ 可得 $P^T,Q^T\in\mathbb{C}_n^P$. 又 $A\in\mathbb{C}_n^{GI}\Leftrightarrow A^T\in\mathbb{C}_n^{GI}$, 且此时有 $(A^T)^\sharp=(A^\sharp)^T$. 这样对定理 2.1 中的条件和结论两边转置即可得出定理 2.2.

定理 2.3 设 $P,Q\in\mathbb{C}_n^P$ 且满足 $PQP=PQ$. $a,b,c,d,e\in\mathbb{C},ab\neq 0,a+b+c+d+e=0$, $b+d+e=0$, 则 $aP+bQ+cPQ+dQP+eQPQ\in\mathbb{C}_n^{GI}$, 且此时有

$$(aP+bQ+cPQ+dQP+eQPQ)^\sharp=\frac{1}{a}P+\frac{1}{b}Q-\frac{1}{a}PQ-\frac{a+b+d}{ab}QP+\frac{b+d}{ab}QPQ.$$

证 我们利用定理 2.1 证明中的一些等式. 因为 $a+b+c+d+e=0,b+d+e=0$, 那么 (6) 式就变为

$$aP+bQ+cPQ+dQP+eQPQ=Z\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&aI&0&0\\0&(b+d)K&bI&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}Z^{-1}.\tag{9}$$

由 (9) 式不难计算出

$$(aP+bQ+cPQ+dQP+ePQP)^\sharp=Z\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&\frac{1}{a}I&0&0\\0&-\frac{b+d}{ab}K&\frac{1}{b}I&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}Z^{-1}.\tag{10}$$

注意到 (5) 式、(8) 式和 (10) 式就可得出

$$(aP+bQ+cPQ+dQP+eQPQ)^\sharp\ =\ \frac{1}{a}P+\frac{1}{b}Q-\frac{1}{a}PQ-\frac{a+b+d}{ab}QP+\frac{b+d}{ab}QPQ.$$

我们对定理 2.3 施行转置就得出

定理 2.4 设 $P,Q\in\mathbb{C}_n^P$ 且满足 $PQP=QP$. $a,b,c,d,e\in\mathbb{C},ab\neq 0,a+b+c+d+e=0$, $b+c+e=0$, 则 $aP+bQ+cPQ+dQP+eQPQ\in\mathbb{C}_n^{GI}$, 且此时有

$$(aP+bQ+cPQ+dQP+ePQP)^\sharp=\frac{1}{a}P+\frac{1}{b}Q-\frac{a+b+c}{ab}PQ-\frac{1}{a}QP+\frac{b+c}{ab}QPQ.$$

参 考 文 献

[1] Wu P Y. Sums of idempotent matrices[J]. Linear Algebra Appl., 1990, 142: 43–54.

[2] Rabanovic V. Every matrix is a linear combination of three idempotents[J]. Linear Algebra Appl., 2004, 390: 137–143.

[3] Baksalary J K, Baksalary O M. Nonsingularity of linear combinations of idempotent matrices[J]. Linear Algebra Appl., 2004, 388: 25–29.

[4] Baksalary J K, Baksalary O M. Idempotency of linear combinations of three idempotent matrices, two of which are disjoint[J]. Linear Algebra Appl., 2004, 388: 67–78.

[5] Du H , Yao X, Deng C. Invertibility of linear combinations of two idempotents[J]. Pro. Amer. Math. Soc., 2006, 134: 1451–1457.

[6] Koliha J J, Rakocevic V. Invertibility of the sum of idempotents[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2002, 50: 285–292.

[7] Koliha J J, Rakocevic V, Straskraba I. The nullity and rank of linear combinations of idempotent matrices[J]. Linear Algebra Appl., 2006, 418: 11–14.

[8] Zuo Kezheng. Nosingularity of the difference and the sum of two idempotent matrices[J]. Linear Algebra Applications, 2010, 433: 476–482.

[9] Zuo Kezheng, Xie Tao. Nonsingularity of combinations of idempotent matrices[J]. J. Math.(PRC), 2009, 29: 285–288.

[10] Deng Chunyuan. The Drazin inverses of sum and difference of idempotents[J]. Linear Algebra and its Applications, 2009, 430: 1282–1291.

[11] Liu Xiaoji, Wu Lingling, Benítez Julio. On the group invese of linear combinations of two group invertible matrices[J]. Electronic Journal of Linear Algebra, 2011, 22: 490–503.

[12] Liu Xiaoji, Wu Lingling, Yu Yaoming. The group invese of the combinations of two idempotent matrices[J]. Linear Multilinear Algebra, 2010, 59: 101–115.

[13] Cao C. Some results os group inveses for partitioned matrices over skew fields[J]. J. of Heilongjiang University (Natural Science Edition), 2001, 18:5–7.

[14] Meyer C D. Matrix analysis and applied linear algebra[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) 2000.

ON THE GROUP INVERSE OF COMBINATIONS OF TWO IDEMPOTENT MATRICES

ZUO Ke-zheng, XIE Tao

(*School of Mathematics and Statistics, Hubei Normal University, Huangshi 435002, China*)

Abstract: This paper studies the group inverse problem of the combination $aP + bQ + cPQ + dQP + ePQP$, where P and Q are two idempotent matrices satisfying the condition $PQP = PQ$. By using the block decomposition of matrices and properties of group inverse, the combination is proved to be group invertible and the formulae of its group inverse is also obtained, where a, b, c, d, e are complex numbers with a, b nonzero.

Keywords: group inverse; idempotent matrix; combination

2000 MR Subject Classification: 15A09