

各向异性双 3 次 Hermite 元的超收敛性与点态超收敛性

王盘州, 孙会霞, 张 帅

(河南工业大学理学院, 河南 郑州 450001)

摘 要: 本文研究了双三次 Hermite 矩形元的超收敛问题. 利用双线性引理和 Bramble-Hilbert 引理, 在无正则性条件的假设下, 得到了双三次 Hermite 矩形元的自然超收敛性及点态超收敛性结果. 该结论与传统的有限元正则条件下的结论一致; 与传统的超收敛分析方法——积分恒等式法相比, 本文的方法既简单又便于推广.

关键词: 双三次 Hermite 元; 点态超收敛性; 各向异性

MR(2010) 主题分类号: 65N30

中图分类号: O241.82

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2014)02-0387-06

1 引言

有限元方法作为求解偏微分方程的重要数值方法之一, 经过 70 多年的发展已经形成了多个分支和研究方向, 其中, 非协调元的研究、超逼近性和超收敛性分析研究一直是有限元研究的热点问题, 研究成果非常丰富, 其基本理论和方法也都比较完整和成熟^[1-5], 但这些研究成果和理论分析大部分都基于对单元剖分的正则性条件: 即剖分单元的直径与单元内切球的直径之比有界, 也就是说, 在对求解区域进行有限单元剖分时, 不能出现窄边单元, 否则会破坏正则性条件. 但随着有限元分析所涉及研究领域的不断扩大和深入, 以及有限元方法的广泛应用, 这些传统有限元理论分析中的基本条件在很大程度上限制了有限元方法的应用范围, 比如, 有些复杂问题的解可能会在某些区域的拐角处或者边界层呈现出各向异性特征, 即偏微分方程的真解仅沿某一方向剧烈变化; 有些问题本身的求解区域就是窄边情形, 如, 在喷气式飞机的机翼部位进行有限元的收敛性分析时, 需要对该区域网格剖分进行适当的加密处理, 而此时有限元分析中的正则性条件或拟一致条件往往不满足要求; 又如在处理多边形区域上的对流扩散问题和奇异摄动问题时, 或者在边界层或内部层及区域的拐角处求解偏微分方程的解时, 都可能会呈现出各向异性特征, 即不满足正则性条件. 虽然此类问题可以通过在不同方向上用不同尺寸的剖分来解决, 但计算量将会增加很多, 如果在不满足正则性条件的网格单元上, 能得到与正则性条件下类似的收敛性质和结果, 对扩展有限元的应用范围具有重要意义.

最近, 国内外有限元专家对各向异性有限元的研究引起了广泛兴趣, 关于各向异性有限元的研究成为目前有限元的研究热点问题之一. 1992 年, Apel 等人在文献 [6-7] 中主要对各向异性 Lagrange 元进行了研究, 给出了各向异性元的验证条件, 但该条件使用起来非常不方便; 2004 年, 陈绍春教授等人对 Apel 的结果进行了改进^[8], 给出了验证单元具有各向异性特征的更方便易行的方法, 并将研究的范围扩展到 Hermite 单元以及非协调元^[9-12]; 在此基础

*收稿日期: 2013-10-08

接收日期: 2013-12-04

基金项目: 国家自然科学基金项目资助 (11201122).

作者简介: 王盘州 (1963-), 男, 河南新密, 讲师, 主要研究方向: 应用数学.

上, 石东洋教授又开展了各向异性超收敛分析的研究工作, 并且有一系列研究成果. 在石东洋教授关于各向异性有限元超收敛分析的结果^[12]中, 所采取的核心技术是林群院士和严宁宁研究员提出的积分恒等式技巧, 但此方法非常复杂, 没有充分利用单元构造本身的特征, 同时对于双三次 Hermite 元的各向异性点态超收敛分析还未见报道. 基于此, 本文采用一种新的、简便的分析方法 – 双线性引理和 Bramble-Hilbert 引理, 将双线性元、双二次元的各向异性超收敛性和点态超收敛性推广到双三次 Hermite 元.

2 双三次 Hermite 元的超逼近性质

考虑四阶问题:

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{在 } \Omega, \\ u|_{\Gamma} = \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} = 0 & \text{在 } \Gamma = \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $\Omega \subset R^2$ 为有界矩形区域, 则相应变分问题为: 求 $u \in H_0^2(\Omega)$, 使得

$$a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in H_0^2(\Omega), \quad (2.2)$$

其中 $a(u, v) = \int_{\Omega} (u_{xx}v_{xx} + 2u_{xy}v_{xy} + u_{yy}v_{yy})dxdy$, $f(v) = \int_{\Omega} fvdxdy$.

设 J_h 是 Ω 的一族各向异性矩形网格部分, 对 $\forall T \in J_h$ 有 $\text{diam}(T) \leq h$, 其顶点 a_i 的坐标为 (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3, 4$; 中心点坐标为 (x_T, y_T) , 在 X 轴, Y 轴方向边长分别为 $2h_x, 2h_y$, 令 $h_T = \max\{h_x, h_y\}$, $h = \max_{T \in J_h} h_T$, 设 $\hat{T} = [-1, 1] \times [-1, 1]$ 为其参考单元, 顶点为 $\hat{a}_1(-1, -1), \hat{a}_2(1, -1), \hat{a}_3(1, 1), \hat{a}_4(-1, 1)$. 在 $\hat{T}$ 上定义有限元 $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$, 这里

$$\hat{\Sigma} = \{\hat{v}_i, \hat{v}_{i\varepsilon}, \hat{v}_{i\eta}, \hat{v}_{i\varepsilon\eta}, i = 1, 2, 3, 4\}, \hat{P} = \text{span}\{p_1, p_2, \dots, p_{16}\},$$

其中

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{16}(1-\varepsilon)^2(1-\eta)^2(2+\varepsilon)(2+\eta), & p_2 &= \frac{1}{16}(1+\varepsilon)^2(1-\eta)^2(2-\varepsilon)(2+\eta), \\ p_3 &= \frac{1}{16}(1+\varepsilon)^2(1+\eta)^2(2-\varepsilon)(2-\eta), & p_4 &= \frac{1}{16}(1-\varepsilon)^2(1+\eta)^2(2+\varepsilon)(2-\eta), \\ p_5 &= -\frac{1}{16}(1-\varepsilon)(\varepsilon^2-1)(1-\eta)^2(2+\eta), & p_6 &= \frac{1}{16}(1+\varepsilon)(\varepsilon^2-1)(1-\eta)^2(2+\eta), \\ p_7 &= \frac{1}{16}(1+\varepsilon)(\varepsilon^2-1)(1+\eta)^2(2-\eta), & p_8 &= -\frac{1}{16}(1-\varepsilon)(\varepsilon^2-1)(1+\eta)^2(2-\eta), \\ p_9 &= -\frac{1}{16}(1-\eta)(\eta^2-1)(1-\varepsilon)^2(2+\varepsilon), & p_{10} &= -\frac{1}{16}(1-\eta)(\eta^2-1)(1+\varepsilon)^2(2-\varepsilon), \\ p_{11} &= \frac{1}{16}(1+\eta)(\eta^2-1)(1+\varepsilon)^2(2-\varepsilon), & p_{12} &= \frac{1}{16}(1+\eta)(\eta^2-1)(1-\varepsilon)^2(2+\varepsilon), \\ p_{13} &= \frac{1}{16}(1-\varepsilon^2)(1-\eta^2)(1-\varepsilon)(1-\eta), & p_{14} &= -\frac{1}{16}(1-\varepsilon^2)(1-\eta^2)(1+\varepsilon)(1-\eta), \\ p_{15} &= \frac{1}{16}(1-\varepsilon^2)(1-\eta^2)(1+\varepsilon)(1+\eta), & p_{16} &= -\frac{1}{16}(1-\varepsilon^2)(1-\eta^2)(1-\varepsilon)(1+\eta), \end{aligned}$$

则 $\forall \hat{v} \in \hat{P}$, $\prod_{\hat{T}} \hat{v} = \sum_{i=1}^{16} p_i(\varepsilon, \eta) a_i$, 其中 $a_i(\hat{v}) = \hat{v}_i$, $a_{i+4}(\hat{v}) = \hat{v}_{i\varepsilon}$, $a_{i+8}(\hat{v}) = \hat{v}_{i\eta}$, $a_{i+12}(\hat{v}) = \hat{v}_{i\varepsilon\eta}$ ($i = 1, 2, 3, 4$)

设 F_T 为从 $\hat{T} \rightarrow T$ 的仿射变换: $F_T: \begin{cases} x = x_T + h_x \varepsilon, \\ y = y_T + h_y \eta, \end{cases}$ 则有限元空间 V_h 可定义为

$$V_h = \{v_h: \hat{v}_h = v_h|_T \cdot F_T \in \hat{P}, \forall T \in J_h\},$$

$$V_0^h = \{v \in V_h; v_h|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

对于坐标为 (x, y) 的一般矩形单元 T , 插值算子可定义为 $\Pi_T: H^5(T) \rightarrow \hat{P} \cdot F_T^{-1}$, $\Pi_T v: H^5(T) \rightarrow (\hat{\Pi} \hat{v}) \cdot F_T^{-1}$, $\Pi_h: H^5(\Omega) \rightarrow V_h$, $\Pi_h|_T = \Pi_T$, 则问题 (2.2) 的逼近形式为: 求 $u_h \in V_h$, 使得

$$a(u_h, v_h) = f(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.3)$$

容易验证 $\|\cdot\|_h = (a(\cdot, \cdot))^{\frac{1}{2}} = (\sum_{T \in J_h} |\cdot|_{2,T}^2)^{\frac{1}{2}}$ 是 V_h 上的范数.

引理 2.1 假设 $u \in H^5(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ 是问题 (2.1) 的解, $\Pi_h u$ 为 u 的分片双三次插值, 设 $w = u - \Pi_h u$, 则 $\forall v \in V_h$ 有

$$\begin{cases} \int_{\Omega} w_{xx} v_{xx} dx dy \leq ch^3 |u|_{5,\Omega} |v|_{2,\Omega}, \\ \int_{\Omega} w_{yy} v_{yy} dx dy \leq ch^3 |u|_{5,\Omega} |v|_{2,\Omega}, \\ \int_{\Omega} w_{xy} v_{xy} dx dy \leq ch^3 |u|_{5,\Omega} |v|_{2,\Omega}, \end{cases} \quad (2.4)$$

其中 c 与 $\frac{h_T}{\rho_T}, \frac{h}{h_T}$ 无关.

证 设 $Q(\hat{u}, \hat{v}) = \int_{\hat{T}} \frac{\partial^2(\hat{u} - \hat{\Pi}_{\hat{T}} \hat{u})}{\partial \varepsilon^2} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \varepsilon^2} d\varepsilon d\eta$, 则 $Q(\hat{u}, \hat{v})$ 为 $H^5(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$ 上的双线性型. 下面证明 $\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \varepsilon^2} \in P_2(\hat{T})$ 时, 有 $Q(\hat{u}, \hat{v}) = 0$.

事实上, 当 $\hat{u} \in P_3(\hat{T})$, 由插值函数的定义 $\hat{\Pi}_{\hat{T}} \hat{u} = \hat{u}$, 从而 $\int_{\hat{T}} \frac{\partial^2(\hat{u} - \hat{\Pi}_{\hat{T}} \hat{u})}{\partial \varepsilon^2} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \varepsilon^2} d\varepsilon d\eta = 0$, 故只需验证 $\hat{u} = \varepsilon^4, \hat{u} = \eta^4$ 时, $Q(\hat{u}, \hat{v}) = 0$ 即可. 当 $\hat{u} = \varepsilon^4$ 时, 由插值函数知 $\hat{\Pi}_{\hat{T}} \hat{u} = 2\varepsilon^2 - 1$, 由此得到

$$\int_{\hat{T}} \frac{\partial^2(\hat{u} - \hat{\Pi}_{\hat{T}} \hat{u})}{\partial \varepsilon^2} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \varepsilon^2} d\varepsilon d\eta = \int_{\hat{T}} 4(3\varepsilon^2 - 1) \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \varepsilon^2} d\varepsilon d\eta = 0.$$

当 $\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \varepsilon^2} \in P_0(\hat{T})$ 时, 由插值条件和 Green 公式可知

$$\int_{\hat{T}} \frac{\partial^2(\hat{u} - \hat{\Pi}_{\hat{T}} \hat{u})}{\partial \varepsilon^2} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \varepsilon^2} d\varepsilon d\eta = \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \varepsilon^2} \int_{\partial \hat{T}} \frac{\partial(\hat{u} - \hat{\Pi}_{\hat{T}} \hat{u})}{\partial \varepsilon} n_\varepsilon d\varepsilon = 0.$$

故由双线性引理

$$\begin{aligned} |Q(\hat{u}, \hat{v})| &= \left| \int_{\hat{T}} \frac{\partial^2(\hat{u} - \hat{\Pi}_{\hat{T}} \hat{u})}{\partial \varepsilon^2} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \varepsilon^2} d\varepsilon d\eta \right| \\ &\leq c \left(\sum_{|\alpha|=3} \left\| D^\alpha \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \varepsilon^2} \right\|_{0,\hat{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{|\alpha|=1} \left\| D^\alpha \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \varepsilon^2} \right\|_{0,\hat{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

由 (2.5) 式及有限维空间上的模等价性得

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} w_{xx} v_{xx} dx dy \right| &\leq \sum_{T \in J_h} \left| \int_T w_{xx} v_{xx} dx dy \right| = \sum_{\hat{T} \in J_h} h_x^{-3} h_y \left| \int_{\hat{T}} w_{\varepsilon\varepsilon} v_{\varepsilon\varepsilon} d\varepsilon d\eta \right| \\ &\leq \sum_{\hat{T} \in J_h} h_x^{-3} h_y c \left(\sum_{|\alpha|=3} \left\| D^\alpha \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \varepsilon^2} \right\|_{0,\hat{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{|\alpha|=1} \left\| D^\alpha \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \varepsilon^2} \right\|_{0,\hat{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sum_{\hat{T} \in J_h} c \left(\sum_{|\alpha|=3} \left\| D^\alpha \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \varepsilon^2} \right\|_{0,\hat{T}}^2 h_T^{2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{|\alpha|=1} \left\| D^\alpha \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \varepsilon^2} \right\|_{0,\hat{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq ch^3 |u|_{5,\Omega} |v|_{2,\Omega}, \quad \forall v \in V_h. \end{aligned}$$

通过引进双线性型 $Q(\hat{u}, \hat{v}) = \int_{\hat{T}} \frac{\partial^2(\hat{u} - \hat{\Pi}_{\hat{T}} \hat{u})}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \eta^2} d\varepsilon d\eta$ 以及 $Q(\hat{u}, \hat{v}) = \int_{\hat{T}} \frac{\partial^2(\hat{u} - \hat{\Pi}_{\hat{T}} \hat{u})}{\partial \varepsilon \partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \varepsilon \partial \eta} d\varepsilon d\eta$, 同理可证 (2.4) 其它二个不等式.

定理 2.1 设 $u, \hat{u}$ 分别是问题 (2.1) 和 (2.3) 的解, 其中 $u \in H^5(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, V_h 为各向异性矩形网格下的双三次有限元空间, $\Pi_h u \in V_h$ 为 u 的双三次 Hermite 插值, $\Pi_h|_T = \Pi_T$, 则 $\|u_h - \Pi_h u\|_h \leq ch^3 |u|_{5,\Omega}$.

证 由引理 2.1 可知 $\forall v \in V_h$,

$$\begin{aligned} a(u_h - \Pi_h u, v) &= a(u_h - u + u - \Pi_h u, v) = a(u - \Pi_h u, v) \\ &= \sum_{T \in J_h} \int_T (w_{xx} v_{xx} + 2w_{xy} v_{xy} + w_{yy} v_{yy}) dx dy \leq ch^3 |u|_{5,\Omega} |v|_{2,\Omega}. \end{aligned}$$

取 $v = u_h - \Pi_h u$, 得 $\|u_h - \Pi_h u\|_h = (a(u_h - \Pi_h u, u_h - \Pi_h u))^{\frac{1}{2}} \leq ch^3 |u|_{5,\Omega}$.

3 双三次 Hermite 元的点态超收敛分析

定理 3.1 假设 $u \in H^5(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ 是问题 (2.1) 的解, u_h 是 (2.3) 式的解, O_T 是单元 T 内的点, 其在参考单元 $\hat{T}$ 上对应的点 $\hat{O}_{\hat{T}}$ 满足 $3\varepsilon^2 - 1 = 0$ 和 $3\eta^2 - 1 = 0$, 即 O_T 是单元 T 上的高斯点, 则

$$\left(\sum_{T \in J_h} |D^2(u - u_h)(O_T)|^2 h_x^2 h_y^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq ch^4 |u|_{5,\Omega}.$$

证

$$\begin{aligned} \left(\sum_{T \in J_h} |D^2(u - u_h)(O_T)|^2 h_x^2 h_y^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\sum_{T \in J_h} |D^2(u - \Pi_T u)(O_T)|^2 h_x^2 h_y^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \left(\sum_{T \in J_h} |D^2(\Pi_T u - u_h)(O_T)|^2 h_x^2 h_y^2 \right)^{\frac{1}{2}} \triangleq M + N. \end{aligned} \quad (3.1)$$

首先估计 M . 设 $\hat{O}_{\hat{T}}$ 为在参考单元 $\hat{T}$ 上与单元 T 上 O_T 对应的点, 则

$$|D^2(u - \Pi_T u)(O_T)|^2 \leq \left| \frac{\partial^2(u - \Pi_T u)}{\partial x^2}(O_T) \right|^2 + \left| \frac{\partial^2(u - \Pi_T u)}{\partial x \partial y}(O_T) \right|^2 + \left| \frac{\partial^2(u - \Pi_T u)}{\partial y^2}(O_T) \right|^2.$$

令 $\hat{Q}(\hat{u}) = \left| \frac{\partial^2(\hat{u} - \hat{\Pi}_{\hat{T}} \hat{u})}{\partial \varepsilon^2}(\hat{O}_{\hat{T}}) \right|$, 则 $\forall \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \varepsilon^2} \in P_2(\hat{T})$, 当 $3\varepsilon^2 - 1 = 0$ 时, 由引理 2.1 的证明可知 $\hat{Q}(\hat{u}) = 0$, 再由 Bramble-Hilbert 引理可得

$$\left| \frac{\partial^2(u - \Pi_T u)}{\partial x^2}(O_T) \right|^2 = h_x^{-4} |\hat{Q}(\hat{u})|^2 \leq c(h_x h_y)^{-2} h_T^2 \sum_{|\alpha|=3} h_T^{2\alpha} \left\| D^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|_{0,T}^2. \quad (3.2)$$

同理可证

$$\left| \frac{\partial^2(u - \Pi_T u)}{\partial y^2}(O_T) \right|^2 \leq c(h_x h_y)^{-2} h_T^2 \sum_{|\alpha|=3} h_T^{2\alpha} \left\| D^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\|_{0,T}^2. \quad (3.3)$$

令 $\hat{L}(\hat{u}) = \left| \frac{\partial^2(\hat{u} - \hat{\Pi}_{\hat{T}} \hat{u})}{\partial \varepsilon \partial \eta}(\hat{O}_{\hat{T}}) \right|$, 则 $\forall \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \varepsilon \partial \eta} \in P_2(\hat{T})$, 由引理 2.1 的证明过程知 $\hat{L}(\hat{u}) = 0$, 又由 Bramble-Hilbert 引理可得

$$\left| \frac{\partial^2(u - \Pi_T u)}{\partial x \partial y}(O_T) \right|^2 = h_x^{-2} h_y^{-2} |\hat{L}(\hat{u})|^2 \leq c(h_x h_y)^{-2} h_T^2 \sum_{|\alpha|=3} h_T^{2\alpha} \left\| D^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right\|_{0,T}^2. \quad (3.4)$$

将 (3.2)–(3.4) 式代入 M 得 $M \leq ch^4 |u|_{5,\Omega}$.

下面估计 N , 由有限维空间的模等价原理知

$$\begin{aligned} & |D^2(\Pi_T u - u_h)(O_T)|^2 \\ & \leq \left| \frac{\partial^2(\Pi_T u - u_h)}{\partial x^2}(O_T) \right|^2 + \left| \frac{\partial^2(\Pi_T u - u_h)}{\partial x \partial y}(O_T) \right|^2 + \left| \frac{\partial^2(\Pi_T u - u_h)}{\partial y^2}(O_T) \right|^2 \\ & = h_x^{-4} \left| \frac{\partial^2(\hat{\Pi}_{\hat{T}} \hat{u} - \hat{u}_h)}{\partial \varepsilon^2}(\hat{O}_{\hat{T}}) \right|^2 + h_x^{-2} h_y^{-2} \left| \frac{\partial^2(\hat{\Pi}_{\hat{T}} \hat{u} - \hat{u}_h)}{\partial \varepsilon \partial \eta}(\hat{O}_{\hat{T}}) \right|^2 + h_y^{-4} \left| \frac{\partial^2(\hat{\Pi}_{\hat{T}} \hat{u} - \hat{u}_h)}{\partial \eta^2}(\hat{O}_{\hat{T}}) \right|^2 \\ & \leq h_x^{-4} \left\| \frac{\partial^2(\hat{\Pi}_{\hat{T}} \hat{u} - \hat{u}_h)}{\partial \varepsilon^2} \right\|_{0,\hat{T}}^2 + h_x^{-2} h_y^{-2} \left\| \frac{\partial^2(\hat{\Pi}_{\hat{T}} \hat{u} - \hat{u}_h)}{\partial \varepsilon \partial \eta} \right\|_{0,\hat{T}}^2 + h_y^{-4} \left\| \frac{\partial^2(\hat{\Pi}_{\hat{T}} \hat{u} - \hat{u}_h)}{\partial \eta^2} \right\|_{0,\hat{T}}^2 \\ & \leq c(h_x h_y)^{-2} h_T^2 |\Pi_T u - u_h|_{2,\hat{T}}^2. \end{aligned}$$

由定理 2.1 知 $N \leq ch^4 |u|_{5,\Omega}$, 将 M, N 代入 (3.1) 式, 定理得证.

参 考 文 献

- [1] Ciarlet P G. The finite method for elliptic problems [M]. Amsterdam: North-holland, 1978.
- [2] 陈传森. 有限元方法及其提高精度的分析 [M]. 武汉: 湖北科技出版社, 1982.
- [3] 陈传森. 有限元超收敛构造理论 [M]. 湖南: 湖南科学技术出版社, 2002.

- [4] Lin q, Lou p. Superconvergence of bicubic hermite element for biharmonic equation[J]. Beijing Math. Ematics, 1995, 1(2): 52–64.
- [5] 林群, 严宁宁. 高效有限元构造与分析 [M]. 保定: 河北大学出版社, 1996.
- [6] Apel Th, Dobrowolski M. Anisotropic interpolation with applications to the finite element method [J]. Computing, 1992, 47(3): 277–293.
- [7] Apel Th. Anisotropic finite element local estimates and applications [M]. Stuttgart Teubner, 1999.
- [8] Chen S C, Shi D Y, Zhao Y C. Anisotropic interpolation and quasi-Wilson element for narrow quadrilateral meshes [J]. IMA J. Numer. Anal., 2004, 24(1): 77–95.
- [9] 乔中华, 陈绍春. 窄边双三次 Hermite 矩形元 [J]. 郑州大学学报 (理学版), 2003, 35(4): 1–6.
- [10] 孙会霞, 高继梅, 谷存昌. 双线性元的自然超收敛性分析结果 [J]. 信阳师范学院学报, 2006, 19(4): 388–391.
- [11] Li Qingshan, Sun Huixia, Anisotropic Biquadratic Finite Element with Some Natural Superconvergence Results [J]. Chin. Quart. J. of Math., 2007, 22(3): 388–394.
- [12] 石东洋, 谢萍丽, 于志云. 各向异性网格下的双三次元 Hermite 的超逼近分析 [J]. 计算数学, 2008, 30(4): 337–348.

THE SUPERCONVERGENCE AND POINTWISE SUPERCONVERGENCE OF THE ANISOTROPIC BICUBIC HERMITE RECTANGULAR ELEMENT

WANG Pan-zhou , SUN Hui-xia , ZHANG Shuai

(*School of Science, Henan University of Technology, Zhengzhou 450001, China*)

Abstract: In this paper, the superconvergence of the bicubic Hermite rectangular element is researched. By using bilinear lemma and Bramble-Hilbert lemma, the natural superconvergence and pointwise superconvergence of this element are obtained in the absence of regular condition, which are consistent with the traditional conclusion. Compared with the traditional integral identities method, the method in this paper is simple and convenient.

Keywords: bicubic Hermite element; pointwise superconvergence; anisotropic

2010 MR Subject Classification: 65N30