Vol. 34 (2014)
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

斜诣零 Armendariz 环

张万儒

(河西学院数学与统计学院, 甘肃 张掖 734000)

摘 要: 本文研究了 α - 诣零 Armendariz 环的性质. 利用环 R 上的斜多项式环, 得到了 α - 诣零 Armendariz 环的例子并研究了它的扩张, 推广了文献 [4] 中关于诣零 Armendariz 环的相应的结论.

关键词: α - 诣零 Armendariz 环; 斜多项式环; 幂零元

MR(2010) **主题分类号**: 16S36 **中图分类号**: O153.3

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2014)02-0345-08

1 引言

根据文献 [1], 称环 R 是 Armendariz 环, 是指对任意

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n, g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m\in R[x],$$

如果 $f(x)g(x)=0$, 那么对任意 $0\leq i\leq n$ 和 $0\leq j\leq m$, 有 $a_ib_j=0$ 成立. 由于 Armendariz 首次发现 reduced 环 (没有非零幂零元的环) 满足上面这一特性, 所以人们称这类环为 Armendariz 环. 许多文献对 Armendariz 环进行了深入的研究, 基本的结论参见文献 [1,2,3].

作为 Armendariz 环的推广, Antoine 在文献 [4] 中引入了诣零 Armendariz 环. 称环 R 是诣零 Armendariz 环, 是指对任意

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n, g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m\in R[x],$$

如果 $f(x)g(x)\in nil(R)[x]$, 那么对任意 $0\leq i\leq n$ 和 $0\leq j\leq m$, 有 $a_ib_j\in nil(R)$ 成立, 其中 $nil(R)$ 是 R 中的幂零元做成的集合. 关于诣零 Armendariz 环的相关结论, 参见文献 [4, 5].

设 α 是环 R 的自同态. R 上的斜多项式环 $R[x;\alpha]$ 是对 R 上的多项式环定义新的乘法运算: 对任意 $r\in R$, $xr=\alpha(r)x$. 许多学者在斜多项式环中研究了环的 Armendariz 性质. 对于环 R 的自同态 α, 在文献 [6], 作者引入了 α-Armendariz 环. 称环 R 是 α-Armendariz 环是指对任意 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n, g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m\in R[x;\alpha]$, 如果 $f(x)g(x)=0$, 那么对任意 $0\leq i\leq n$ 和 $0\leq j\leq m$, 有 $a_ib_j=0$ 成立. 关于 α-Armendariz 环的更多结论, 参见文献 [6, 7].

受以上研究成果的启发, 对于环 R 的自同态 α, 我们在本文引入了 α - 诣零 Armendariz 环这一概念. 取代多项式环 $R[x]$, 我们在斜多项式环 $R[x;\alpha]$ 中讨论了环的诣零 Armendariz 性质. α-Armendariz 环是 α - 诣零 Armendariz 环. 但有例子表明反之并不成立. 因此, α -

*收稿日期: 2012-03-20 接收日期: 2012-06-20

基金项目: 河西学院青年教师科研基金项目 (QN2012-14). .

作者简介: 张万儒 (1980–), 男, 甘肃金昌, 讲师, 硕士, 研究方向为环理论.

诣零 Armendariz 环是 α-Armendariz 环的推广. 本文讨论了 α - 诣零 Armendariz 环的基本性质. 同时, 我们还研究了 α - 诣零 Armendariz 环的扩张. 一些已知的关于诣零 Armendariz 环的结论都可作为我们结果的推论.

贯穿全文, 所有的环都是有单位元的结合环. 对于环 R, 我们用 $nil(R)$ 表示 R 中所有幂零元做成的集合, $nil(R)[x;\alpha]$ 表示 $R[x;\alpha]$ 中系数是幂零元的所有多项式做成的集合.

2 α - 诣零 Armendariz 环

定义 2.1 设 α 是环 R 的自同态. 称环 R 是 α - 诣零 Armendariz 环是指对任意

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n, g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m\in R[x;\alpha],$$

如果 $f(x)g(x)\in nil(R)[x;\alpha]$, 那么对任意 $0\le i\le n$ 和 $0\le j\le m$, 有 $a_ib_j\in nil(R)$ 成立.

显然, R 是诣零 Armendariz 环当且仅当 R 是 I_R - 诣零 Armendariz 环, 其中 I_R 是环 R 的恒等自同态. 设 S 是 R 的子环, 且满足条件 $\alpha(S)\subseteq S$. 如果 R 是 α - 诣零 Armendariz 环, 那么 S 也是 α - 诣零 Armendariz 环. 下面的例子说明, 存在诣零 Armendariz 环 R 的一个自同态 α, 使得 R 不是 α - 诣零 Armendariz 环.

例 2.2 设 $R=\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$, 其中 $\mathbb{Z}_2$ 是整数环模 2 的剩余类环, 则 R 是交换的 reduced 环. 由文献 [2, 命题 2.7] 可知, R 是诣零 Armendariz 环. $\alpha:R\to R, \alpha((a,b))=(b,a)$ 是 R 的自同态. 取 $f(x)=(1,0)+(1,0)x, g(x)=(0,1)+(1,0)x\in R[x;\alpha]$. 显然 $f(x)g(x)=0\in nil(R)[x;\alpha]$, 但是 $(1,0)(1,0)\notin nil(R)$. 所以 R 不是 α - 诣零 Armendariz 环.

命题 2.3 设 R 是 α - 诣零 Armendariz 环, $a,b\in R$. 则以下各点成立:

(1) 如果 $ab\in nil(R)$, 那么对任意正整数 n, 有 $a\alpha^n(b), \alpha^n(a)b\in nil(R)$.

(2) 如果存在正整数 n, 使得 $a\alpha^n(b)\in nil(R)$, 那么 $ab\in nil(R)$.

(3) 如果存在正整数 n, 使得 $\alpha^n(a)b\in nil(R)$, 那么 $ab\in nil(R)$.

(4) 对任意中心幂等元 $e\in R$, $\alpha(e)=e$.

证 (1) 假设 $ab\in nil(R)$. 我们只需证 $a\alpha(b), \alpha(a)b\in nil(R)$ 即可. 取 $f(x)=\alpha(a)x, g(x)=bx\in R[x;\alpha]$, 则 $f(x)g(x)=\alpha(a)\alpha(b)x^2=\alpha(ab)x^2\in nil(R)[x;\alpha]$. 由于 R 是 α - 诣零 Armendariz 环, 因此 $\alpha(a)b\in nil(R)$.

因为 $ab\in nil(R)$, 所以 $ba\in nil(R)$. 根据上面的证明, 得到 $\alpha(b)a\in nil(R)$, 从而 $a\alpha(b)\in nil(R)$.

(2) 假设 $a\alpha^n(b)\in nil(R)$. 取 $f(x)=ax^n, g(x)=bx\in R[x;\alpha]$. 显然 $f(x)g(x)=a\alpha^n(b)x^{n+1}\in nil(R)[x;\alpha]$. 由于 R 是 α - 诣零 Armendariz 环, 所以 $ab\in nil(R)$.

(3) 如果 $\alpha^n(a)b\in nil(R)$，那么 $b\alpha^n(a)\in nil(R)$. 根据 (2), 我们得到 $ba\in nil(R)$, 所以 $ab\in nil(R)$.

(4) 设 e 是 R 中的任意中心幂等元. 由于 $e(1-e)=0$, 由 (1) 可知 $\alpha(e)(1-e)\in nil(R)$. 所以存在正整数 n, 使得 $(\alpha(e)(1-e))^n=0$. 由于 e 是中心幂等元, 所以 $\alpha(e)(1-e)=(\alpha(e)(1-e))^n=0$, 从而 $\alpha(e)=\alpha(e)e$. 类似地, 由 $(1-e)e=0$, 我们得到 $e=\alpha(e)e$. 所以 $\alpha(e)=e$.

在文献 [4, 命题 2.7], 作者证明了 Armendariz 环是诣零 Armendariz 环. 我们推广这一结论到 α - 诣零 Armendariz 环上. 我们需要下面的引理.

引理 2.4 (1) 设 R 是 α-Armendariz 环, $n \geq 2$. 如果 $f_1, f_2, \cdots, f_n \in R[x;\alpha]$ 并且 $f_1 f_2 \cdots f_n = 0$, 那么 $a_1 a_2 \cdots a_n = 0$, 其中 a_i 是 f_i 的任意系数, $i = 1, 2, \cdots, n$.

(2) 设 R 是 α-Armendariz 环, $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = 0$. 则对任意正整数 $i_1, i_2, i_3, \cdots, i_{n-1}$, 有 $a_1 \alpha^{i_1}(a_2) \alpha^{i_1+i_2}(a_3) \alpha^{i_1+i_2+i_3}(a_4) \cdots \alpha^{i_1+i_2+i_3+\cdots+i_{n-1}}(a_n) = 0$.

证 (1) 是文献 [6, 引理 3.5] 中的结论.

(2) 由于 R 是 α-Armendariz 环并且 $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = 0$, 根据文献 [6, 命题 1.3], 有 $a_1 \alpha^{i_1}(a_2 a_3 \cdots a_n) = 0$. 由于 $a_1 \alpha^{i_1}(a_2) \alpha^{i_1}(a_3 \cdots a_n) = a_1 \alpha^{i_1}(a_2 a_3 \cdots a_n) = 0$, 所以

$$a_1 \alpha^{i_1}(a_2) \alpha^{i_1+i_2}(a_3) \alpha^{i_1+i_2}(a_4 \cdots a_n) = a_1 \alpha^{i_1}(a_2) \alpha^{i_1+i_2}(a_3 a_4 \cdots a_n) = 0.$$

继续上述过程, 则有

$$a_1 \alpha^{i_1}(a_2) \alpha^{i_1+i_2}(a_3) \alpha^{i_1+i_2+i_3}(a_4) \cdots \alpha^{i_1+i_2+i_3+\cdots+i_{n-1}}(a_n) = 0.$$

引理 2.5 如果 R 是 α-Armendariz 环, 那么 $nil(R)[x;\alpha] \subseteq nil(R[x;\alpha])$.

证 我们采用文献 [4, 命题 2.7] 中类似的方法来证明. 设 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in nil(R)[x;\alpha]$, 则存在正整数 $k > 1$, 使得对任意 $i = 0, 1, \cdots, n$, 都有 $a_i^k = 0$ 成立. 下证 $f(x)^{(n+1)k} = 0$.

$f(x)^{(n+1)k}$ 的系数可以表示成形如下面一些项的和

$$a_{i_1} \alpha^{i_1}(a_{i_2}) \alpha^{i_1+i_2}(a_{i_3}) \cdots \alpha^{i_1+i_2+\cdots+i_{(n+1)k-1}}(a_{i_{(n+1)k}}),$$

其中 $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_{(n+1)k}} \in \{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$. 下证

$$a_{i_1} \alpha^{i_1}(a_{i_2}) \alpha^{i_1+i_2}(a_{i_3}) \cdots \alpha^{i_1+i_2+\cdots+i_{(n+1)k-1}}(a_{i_{(n+1)k}}) = 0.$$

由于 R 是 α-Armendariz 环, 根据引理 2.4, 只需证明 $a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} \cdots a_{i_{(n+1)k}} = 0$ 即可.

在项 $a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} \cdots a_{i_{(n+1)k}}$ 中, 一定有 a_{j_0} 至少出现了 k 次, 其中 $a_{j_0} \in \{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$. 不妨设 $a_{i_{r1}} = a_{i_{r2}} = \cdots = a_{i_{rk}} = a_{j_0}$, 其中 $1 \leq r_1 < r_2 < \cdots < r_k \leq (n+1)k$. 对于 $i_s \neq i_{r_t}$, 取

$$\begin{aligned} f'_{i_s}(x) &= 1 - a_{i_s} x, \\ f''_{i_s}(x) &= 1 + a_{i_s} x + (a_{i_s} x)^2 + \cdots + (a_{i_s} x)^{k-1}. \end{aligned}$$

根据引理 2.4, 容易验证

$$f'_{i_s}(x) f''_{i_s}(x) = 1 - a_{i_s} \alpha(a_{i_s}) \cdots \alpha^{k-1}(a_{i_s}) x^k = 1.$$

现在, 我们把项 $a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} \cdots a_{i_{(n+1)k}}$ 写的具体一些如下

$$a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_{r_1-1}} a_{j_0} a_{i_{r_1+1}} \cdots a_{i_{r_2-1}} a_{j_0} a_{i_{r_2+1}} \cdots a_{i_{r_k-1}} a_{j_0} a_{ir_k+1} \cdots a_{i_{(n+1)k}}.$$

在上面的项中, 把每个 a_{i_s} 用 $f'_{i_s}(x) f''_{i_s}(x)$ 代替, 由于 $a_{j_0}^k = 0$, 得到

$$f'_{i_1}(x) f''_{i_1}(x) \cdots f'_{i_{r_1-1}}(x) f''_{i_{r_1-1}}(x) a_{j_0} f'_{i_{r_1+1}}(x) f''_{i_{r_1+1}}(x) \cdot \cdots \cdot f'_{i_{(n+1)k}}(x) f''_{i_{(n+1)k}}(x) = 0.$$

注意到 a_{i_s} 是 $f'_{i_s}(x)$ 和 $f''_{i_s}(x)$ 两个多项式系数的乘积. 由于 R 是 α-Armendariz 环, 根据引理 2.4, 在上面的等式中, 我们从每个多项式中任取一个系数, 它们的乘积为 0. 从而 $a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}\cdots a_{i_{(n+1)k}}=0$. 所以 $f(x)^{(n+1)k}=0$, 即 $f(x)\in nil(R[x;\alpha])$.

定理 2.6 如果 R 是 α-Armendariz 环, 那么 R 是 α - 诣零 Armendariz 环.

证 假设 $f(x),g(x)\in R[x;\alpha]$, 使得 $f(x)g(x)\in nil(R)[x;\alpha]$. 根据引理 2.5, 得到 $f(x)g(x)\in nil(R[x;\alpha])$. 因此存在正整数 $k\geq 1$, 使得 $(f(x)g(x))^k=0$. 因为 R 是 α-Armendariz 环, 根据引理 2.4, 对 $f(x)$ 的任意系数 a 和 $g(x)$ 的任意系数 b, 有 $abab\cdots ab=(ab)^k=0$, 因此 $ab\in nil(R)$. 所以 R 是 α - 诣零 Armendariz 环.

下面的例子说明定理 2.6 的逆命题不成立.

设 α 是环 R 的自同态. 根据文献 [8], 若对任意 $a\in R$, $a\alpha(a)=0\Leftrightarrow a=0$ 成立, 则称 α 是环 R 的刚性自同态. 如果 α 是 R 的刚性自同态, 那么称 R 是 α - 刚性环.

例 2.7 设 R 是 α - 刚性环.

$$S_4=\left\{\left.\begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ 0 & a & a_{23} & a_{24}\\ 0 & 0 & a & a_{34}\\ 0 & 0 & 0 & a\end{pmatrix}\right| a,a_{ij}\in R\right\}.$$

由文献 [6, 命题 1.7] 可知, R 是 α-Armendariz 环. 根据定理 2.6 和定理 2.11, 我们得到 S_4 是 $\overline{\alpha}$ - 诣零 Armendariz 环. 取 $p=e_{12}+(e_{12}-e_{13})x, q=e_{34}+(e_{24}+e_{34})x\in S_4[x;\overline{\alpha}]$, 其中 e_{ij} 是 S_4 中的矩阵单位. 显然 $pq=0$, 但是 $(e_{12}-e_{13})e_{34}\neq 0$. 所以 S_4 不是 $\overline{\alpha}$-Armendariz 环.

设 α 是环 R 的自同态. 根据文献 [9], 如果对任意 $a,b\in R$, $ab=0\Leftrightarrow a\alpha(b)=0$ 成立, 那么称环 R 是 α - 相容的. 显然, 如果 R 是 α - 相容的, 那么 α 是单同态.

引理 2.8 设 α 是环 R 的自同态. 如果 R 是 α - 相容的, 那么以下两条成立:

(1) 对任意 $a,b\in R$, 如果 $ab\in nil(R)$, 那么对任意正整数 n, 有 $a\alpha^n(b)\in nil(R)$.

(2) 如果存在正整数 n 使得 $a\alpha^n(b)\in nil(R)$, 那么 $ab\in nil(R)$.

证 (1) 设 $ab\in nil(R)$, 我们只需证明 $a\alpha(b)\in nil(R)$ 即可. 设 $(ab)^k=0$, 其中 $k\in\mathbb{N}$. 则 $a\alpha(b)\alpha[(ab)^{k-1}]=a\alpha[b(ab)^{k-1}]=0$. 由于 R 是 α - 相容的, 所以 $a\alpha(b)(ab)^{k-1}=0$. 从而 $a\alpha(b)a\alpha(b)\alpha[(ab)^{k-2}]=a\alpha(b)a\alpha[b(ab)^{k-2}]=0$. 继续上述过程, 我们得到 $[a\alpha(b)]^k=0$, 所以 $a\alpha(b)\in nil(R)$.

(2) 如果 $a\alpha^n(b)\in nil(R)$, 那么 $\alpha^n(b)a\in nil(R)$. 根据 (1), 我们得到 $\alpha^n(ba)=\alpha^n(b)\alpha^n(a)\in nil(R)$. 设 $[\alpha^n(ba)]^k=\alpha^n[(ba)^k]=0$, 由于 α 是单同态, 所以 $(ba)^k=0$. 因此 $ba\in nil(R)$, 所以 $ab\in nil(R)$.

设 I 是环 R 的理想. 如果 $\alpha(I)\subseteq I$, 那么 $\overline{\alpha}:R/I\to R/I,\overline{\alpha}(a+I)=\alpha(a)+I$ 是商环 R/I 的自同态.

命题 2.9 设 α 是环 R 的自同态, I 是 R 的理想且 $\alpha(I)\subseteq I$. 如果 $I\subseteq nil(R)$, 并且 R/I 是 $\overline{\alpha}$ - 诣零 Armendariz 环, 那么 R 是 α - 诣零 Armendariz 环.

证 设

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n, g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m\in R[x;\alpha],$$

满足 $f(x)g(x) \in nil(R)[x;\alpha]$, 则

$$(\sum_{i=0}^{n} \overline{a_i}x^i)(\sum_{j=0}^{m} \overline{b_j}x^j) \in nil(R/I)[x;\overline{\alpha}].$$

由于 R/I 是 $\overline{\alpha}$ - 诣零 Armendariz 环, 因此对任意 $0 \leq i \leq n$ 和 $0 \leq j \leq m$, 存在正整数 n_{ij} 使得 $(\overline{a_i}\overline{b_j})^{n_{ij}} = 0$, 所以 $a_ib_j \in nil(R)$. 所以 R 是 α - 诣零 -Armendariz 环.

设 R 是环. 如果对任意 $a, b \in R$, $ab = 0 \Rightarrow aRb = 0$, 则称 R 是半交换环. 根据文献 [4, 命题 2.1], 半交换环是诣零 Armendariz 环. 对于 α - 诣零 Armendariz 环, 有下面的结论.

命题 2.10 如果 R 是 α - 相容半交换环, 那么 R 是 α - 诣零 Armendariz 环.

证 由文献 [10, 引理 3.1] 可知, $nil(R)$ 是环 R 的理想. 显然, $R/nil(R)$ 是 reduced 环. 由于 R 是 α - 相容的, 由引理 2.8 可知, α 满足条件 $a\alpha(b) \in nil(R) \Leftrightarrow ab \in nil(R)$. 因此在 $R/nil(R)$ 中, $\bar{a}\overline{\alpha}(\bar{a}) = 0 \Leftrightarrow \bar{a} = 0$ 成立. 所以 $R/nil(R)$ 是 $\overline{\alpha}$ - 刚性环. 根据文献 [6, 命题 1.7] 可知, $R/nil(R)$ 是 $\overline{\alpha}$-Armendariz 环. 由定理 2.6, 我们得到 $R/nil(R)$ 是 $\overline{\alpha}$ - 诣零 Armendariz 环. 根据命题 2.9, R 是 α - 诣零 Armendariz 环.

设 $R_i(i \in I)$ 是一族环, α_i 是 R_i 的自同态. 考虑 R_i 的直积 $\prod_{i\in I} R_i$ 和同态 $\overline{\alpha} : \prod_{i\in I} R_i \mapsto \prod_{i\in I} R_i, \overline{\alpha}((a_i)) = (\alpha_i(a_i))$. 显然, 如果指标集 I 是有限集, 那么 $\prod_{i\in I} R_i$ 是 $\overline{\alpha}$ - 诣零 Armendariz 环当且仅当每个 R_i 是 α_i - 诣零 Armendariz 环.

设 α 是环 R 的自同态, $M_n(R)$ 是 R 上的 $n \times n$ 全矩阵环. 显然, 由 α 可以诱导出 $M_n(R)$ 的自同态 $\overline{\alpha} : (a_{ij}) \mapsto (\alpha(a_{ij}))$. 设 $T_n(R)$ 表示 R 上的 $n \times n$ 上三角矩阵环. 同理, 我们有由 α 诱导出的 $T_n(R)$ 的自同态 $\overline{\alpha}$.

设 R 是环. 记

$$S_n = \left\{ \left(\begin{array}{ccccc} a & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{array} \right) \middle| a, a_{ij} \in R \right\},$$

$$R_n = \left\{ \left(\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 \end{array} \right) \middle| a_i \in R(1 \leq i \leq n) \right\}.$$

按照通常的矩阵加法和乘法, S_n 和 R_n 分别构成 $M_n(R)$ 的子环.

定理 2.11 设 α 是环 R 的自同态. 以下各条件等价:

(1) R 是 α - 诣零 Armendariz 环.

(2) $T_n(R)$ 是 $\overline{\alpha}$ - 诣零 Armendariz 环.

(3) S_n 是 $\overline{\alpha}$ - 诣零 Armendariz 环.

(4) R_n 是 $\overline{\alpha}$ - 诣零 Armendariz 环.

证 (1) $\Rightarrow$ (2) 设 $I=\{A\in T_n(R)|\ A$ 的主对角线上元素全为 $0\}$. 显然, I 是 $T_n(R)$ 的理想且 $I\subseteq nil(T_n(R))$. 由于 $T_n(R)/I\cong R^n$, 所以 $T_n(R)/I$ 是 $\overline{\alpha}$ - 诣零 Armendariz 环. 根据命题 2.9, $T_n(R)$ 是 $\overline{\alpha}$ - 诣零 Armendariz 环.

由于 α - 诣零 Armendariz 环的不变子环仍然是 α - 诣零 Armendariz 环, 所以 (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1) 显然.

3 多项式环

设 α 是环 R 的自同态, 定义 $\overline{\alpha}(\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i)=\sum\limits_{i=0}^{n}\alpha(a_i)x^i$, 则 α 被扩张为多项式环 $R[x]$ 的自同态. 具有未知量 x 的洛朗多项式环 $R[x;x^{-1}]$ 是由所有的形式和 $\sum\limits_{i=k}^{n}a_ix^i$ 组成, 其中 $a_i\in R$, k,n 是整数 (可能是负数). 映射

$$\overline{\alpha}:R[x;x^{-1}]\mapsto R[x;x^{-1}],\overline{\alpha}(\sum_{i=k}^{n}a_ix^i)=\sum_{i=k}^{n}\alpha(a_i)x^i$$

也是 $R[x;x^{-1}]$ 的自同态.

命题 3.1 设 α 是环 R 的自同态. 则以下两条件等价:

(1) $R[x]$ 是 $\overline{\alpha}$ - 诣零 Armendariz 环.

(2) $R[x;x^{-1}]$ 是 $\overline{\alpha}$ - 诣零 Armendariz 环.

证 由于 $R[x]$ 是 $R[x;x^{-1}]$ 的 $\overline{\alpha}$ - 不变子环, 所以如果 $R[x;x^{-1}]$ 是 $\overline{\alpha}$ - 诣零 Armendariz 环, 则 $R[x]$ 也是 $\overline{\alpha}$- 诣零 Armendariz 环. 反之, 任取

$$f(y)=f_0+f_1y+\cdots+f_ny^n,g(y)=g_0+g_1y+\cdots+g_my^m\in R[x;x^{-1}][y;\overline{\alpha}]$$

满足 $f(y)g(y)\in nil(R[x;x^{-1}])[y;\overline{\alpha}]$, 其中 $f_i,g_j\in R[x;x^{-1}]$, 则存在正整数 k, 使得 $f_i'=f_ix^k,g_j'=g_jx^k\in R[x]$. 令

$$p(y)=f_0'+f_1'y+\cdots+f_n'y^n,q(y)=g_0'+g_1'y+\cdots+g_m'y^m\in R[x][y;\overline{\alpha}],$$

则 $p(y)q(y)\in nil(R[x])[y;\overline{\alpha}]$. 由于 $R[x]$ 是 $\overline{\alpha}$- 诣零 Armendariz 环, 因此对任意 i 和 j, 有 $f_i'g_j'\in nil(R[x])$, 即 $(f_ix^k)(g_jx^k)=f_ig_jx^{2k}\in nil(R[x])$, 所以 $f_ig_j\in nil(R[x;x^{-1}])$. 所以 $R[x;x^{-1}]$ 是 $\overline{\alpha}$ - 诣零 Armendariz 环.

设 α 是环 R 的自同态. 根据文献 [6, 命题 2.3], 如果存在正整数 t 使得 $\alpha^t=I_R$, 则 $R[x]$ 是 $\overline{\alpha}$-Armendariz 环当且仅当 R 是 α-Armendariz 环. 对于 α - 诣零 Armendariz 环, 我们有与之相似的结论. 我们先证明下面的引理.

引理 3.2 如果 R 是半交换环, 那么有 $nil(R)[x]=nil(R[x])$.

证 由于 R 是半交换环, 所以 R 是诣零 Armendariz 环. 如果

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in nil(R[x]),$$

根据文献 [4, 引理 2.5] 可知, 对任意 $0\le i\le n$, 有 $a_i\in nil(R)$, 所以 $f(x)\in nil(R)[x]$. 反之, 如果对任意 $0\le i\le n$, 有 $a_i\in nil(R)$, 则存在正整数 $k>1$, 使得对任意 $i=0,1,\cdots,n$, 都有 $a_i^k=0$. 下证 $f(x)^{(n+1)k}=0$.

显然, $f(x)^{(n+1)k}$ 的系数可以写成如下形式的一些项的和 $a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}\cdots a_{i_{(n+1)k}}$, 其中 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_{(n+1)k}}\in\{a_0,a_1,\cdots,a_n\}$. 我们证明

$$a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}\cdots a_{i_{(n+1)k}}=0.$$

在 $a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}\cdots a_{i_{(n+1)k}}$ 中, 一定存在 $a_{j_0}\in\{a_0,a_1,\cdots,a_n\}$, 使得 a_{j_0} 在其中出现了至少 k 次. 由于 R 是半交换环且 $a_{j_0}^k=0$, 所以 $a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}\cdots a_{i_{(n+1)k}}=0$. 所以 $f(x)^{(n+1)k}=0$, 即 $f(x)\in nil(R[x])$.

定理 3.3 设 R 是 α - 相容半交换环. 如果存在正整数 t, 使得 $\alpha^t=I_R$, 则 $R[x]$ 是 $\overline{\alpha}$- 诣零 Armendariz 环.

证 假设 $p(y)=f_0+f_1y+\cdots+f_my^m, q(y)=g_0+g_1y+\cdots+g_ny^n\in R[x][y;\overline{\alpha}]$, 使得 $p(y)q(y)\in nil(R[x])[y;\overline{\alpha}]$. 不妨设

$$f_i=a_{i0}+a_{i1}x+\cdots+a_{ik_i}x^{k_i}, g_j=b_{j0}+b_{j1}x+\cdots+b_{jl_j}x^{l_j},$$

其中 $a_{i0},a_{i1},\cdots,a_{ik_i},b_{j0},b_{j1},\cdots,b_{jl_j}\in R, 0\le i\le m, 0\le j\le n$. 下证对任意 $0\le i\le m$ 和 $0\le j\le n$, 有 $f_ig_j\in nil(R[x])$. 任取正整数 k, 使得

$$k>\deg(f_0)+\deg(f_1)+\cdots+\deg(f_m)+\deg(g_0)+\deg(g_1)+\cdots+\deg(g_n).$$

由于 $p(y)q(y)\in nil(R[x])[y;\overline{\alpha}]$, 并且 $nil(R)[x]=nil(R[x])$, 所以

$$\begin{aligned}
&f_0g_0\in nil(R)[x];\\
&f_0g_1+f_1\overline{\alpha}(g_0)\in nil(R)[x];\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&f_m\overline{\alpha}^m(g_n)\in nil(R)[x].
\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
f(x)&=f_0(x^t)+f_1(x^t)x^{tk+1}+\cdots+f_m(x^t)x^{mtk+m},\\
g(x)&=g_0(x^t)+g_1(x^t)x^{tk+1}+\cdots+g_n(x^t)x^{ntk+n}.
\end{aligned}$$

则 $f(x)$ $(g(x))$ 的系数做成的集合和所有 $f_i(x)$ $(g_j(x))$ 的系数做成的集合相等. 由于 $\alpha^t=I_R$, 容易验证

$$\begin{aligned}
f(x)g(x)\ &=\ f_0(x^t)g_0(x^t)+[f_0(x^t)g_1(x^t)+f_1(x^t)\overline{\alpha}(g_0(x^t))]x^{tk+1}\\
&\quad+\cdots+f_m(x^t)\overline{\alpha}^m(g_n(x^t))x^{(tk+1)(m+n)}\in nil(R)[x;\alpha].
\end{aligned}$$

因为 R 是 α - 相容半交换环, 由命题 2.10 可知, R 是 α - 诣零 Armendariz 环. 所以对任意 $0\le i\le m$ 和 $0\le j\le n$, 有 $a_{il}b_{jr}\in nil(R)$. 由于 R 是半交换环, 根据文献 [10, 引理 3.1], $nil(R)$ 是 R 的理想. 所以 $f_ig_j\in nil(R)[x]=nil(R[x])$. 所以 $R[x]$ 是 $\overline{\alpha}$ - 诣零 Armendariz 环.

推论 3.4 如果 R 是半交换环, 那么 $R[x]$ 是诣零 Armendariz 环.

参 考 文 献

[1] Rege M B, Chhawchharia S. Armendariz rings[J]. Proc. Japan Acad. (Ser. A), 1997, 73(1): 14–17.

[2] Anderson D D, Camillo V. Armendariz rings and Gaussian rings[J]. Comm. Algebra, 1998, 26(7): 2265–2272.

[3] Huh C, Lee Y, Smoktunowicz A. Armendariz rings and semicommutative rings[J]. Comm. Algebra, 2002, 30(2): 751–761.

[4] Antoine R. Nilpotent elements and Armendariz rings[J]. J. Algebra, 2008, 319: 3128–3140.

[5] Hizem S. A note on nil power serieswise Armendariz rings[J]. Rend. Circ. Mat. Palermo, 2010, 59(1): 87–99.

[6] Hong C Y, Kwak T K, Rizvi S T. Extensions of generalized Armendariz rings[J]. Algebra. Colloq, 2006, 13(2): 253–266.

[7] Hong C Y, Kim N K, Kwak T K. On skew Armendariz rings[J]. Comm. Algebra, 2003, 31(1): 103–122.

[8] Hong C Y, Kim N K, Kwak T K. Ore extensions of Baer and p.p.-rings[J]. J. Pure Appl. Algebra, 2000, 151(3): 215–226.

[9] Hashemi E, Moussavi A. Polynomial extensions of quasi-Baer rings [J]. Acta. Math. Hungar, 2005, 107(3): 207–224.

[10] Liu Z K, Zhao R Y. On weak Armendariz rings[J]. Comm. Algebra, 2006, 34(7): 2607–2616.

ON SKEW NIL-ARMENDARIZ RINGS

ZHANG Wan-ru

(*College of Mathematics and Statistics, HeXi University, Zhangye 734000, China*)

Abstract: In this paper, we investigate the properties of the α-nil-Armendariz rings. By using the skew polynomial ring over R, the examples of α-nil-Armendariz rings are obtained, and the extensions of α-nil-Armendariz rings are investigated, which generalizes the corresponding results of nil-Armendariz rings in [4].

Keywords: α-nil-Armendariz rings; skew polynomial ring; nilpotent elements

2010 MR Subject Classification: 16S36