Vol. 44 (2024)
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

Banach 空间中的有界算子 4 子空间系统

陈剑岚, 阙佳华, 张云南
(福建师范大学数学与统计学院, 福建 福州 350117)

摘 要: 本文研究 Banach 空间上有界算子 4 子空间系统 $\mathcal{S}_T$, 说明 $\mathcal{S}_T$ 与 $\mathcal{S}_{T'}$ 同构的充要条件是 T 与 T' 相似, 也说明 $\mathcal{S}_T$ 是不可分解的的充要条件是 T 是强不可约的, 最后说明当 Banach 空间 X 的共轭空间 X^* w^* 可分时, $X\bigoplus X$ 中存在不可数多个两两不同构的不可分解的有界算子 4 子空间系统. 这些结果是 Hilbert 空间上相应结果到 Banach 空间上的推广与补充.

关键词: Banach 空间; 有界算子系统; 4 子空间系统; 强不可约算子
MR(2010) **主题分类号**: 46C07; 47A15 **中图分类号**: O177.2
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2024)03-0182-07

1 引言

在有限维向量空间中, 很多线性代数的问题可以归结为 n 子空间系统的分类. 当 $n=1,2,3$ 时, n 子空间的不可分解系统的分类很简单. 但存在很多种类 4 子空间的不可分解系统. Gelfand 和 Ponomarev 给出 4 子空间的不可分解系统的完全分类 [1]. Gabriel 说明可以用延拓 Dynkin 图表示的分类来描述 4 子空间系统的分类 [2].

在可分无穷维 Hilbert 空间中, 很多学者也研究 n 子空间的相对位置. $n=1,2$ 的情形已有完整的结果 [3−5]. Enomoto 和 Watatani 研究 $n=3,4$ 甚至更一般的 n 子空间相对位置, 得到了丰硕的成果 [6−8]. 特别地, [6] 中引入了有界算子系统的概念, 并研究它们的性质. 本文将 Hilbert 空间中有界算子 4 子空间系统的结果推广到 Banach 空间上去, 得到了类似的结果, 即给出有界算子 4 子空间系统同构的等价刻画, 利用强不可约算子给出有界算子系统不可分解的等价刻画, 并说明存在不可数多个两两不同构的不可分解的有界算子 4 子空间系统.

下面说明一些记号.

设 X,Y 是 Banach 空间, 以 $B(X,Y)$ 表示 X 到 Y 中的所有有界线性算子, 简记 $B(X)=B(X,X)$. 以 I_X 表示 X 上的恒等算子, 也简记为 I. 设 $T\in B(X)$, $T'\in B(Y)$, 若存在可逆算子 $A\in B(Y,X)$, 使得 $T'=A^{-1}TA$, 则称 T 与 T' 相似.

2 有界算子系统

本节给出有界算子系统的定义, 及其上的同态集、自同态集与幂等自同态集的等价刻画.

*收稿日期: 2023-11-08 接收日期: 2023-11-21
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11971108).
作者简介: 陈剑岚 (1973–), 女, 福建宁德, 副教授, 主要研究方向: 泛函分析,
E-mail:chenjianlan@fjnu.edu.cn

设 X 是 Banach 空间, $E_1,\cdots,E_n$ 是 X 的 n 个子空间, 称 $\mathcal{S}=(X;E_1,\cdots,E_n)$ 是 X 中的 n 子空间系统. 若 $X\neq 0$, 则称 $\mathcal{S}$ 是非零 n 子空间系统. 设 $\mathcal{T}=(Y;F_1,\cdots,F_n)$ 是 Banach 空间 Y 中的 n 子空间系统. 记 $\mathcal{S}$ 与 $\mathcal{T}$ 的直和为

$$\mathcal{S}\bigoplus\mathcal{T}=(X\bigoplus Y;E_1\bigoplus F_1,\cdots,E_n\bigoplus F_n),$$

它是 Banach 空间 $X\bigoplus Y$ 中的 n 子空间系统. 若 $A\in B(X,Y)$ 满足 $A(E_i)\subseteq F_i$, $i=1,\cdots,n$, 则称 A 是 $\mathcal{S}$ 到 $\mathcal{T}$ 中的同态, 也记为 $A:\mathcal{S}\to\mathcal{T}$. 记同态集、自同态集与幂等自同态集为:

$$Hom(\mathcal{S},\mathcal{T})=\{A:A \text{ 是 } \mathcal{S} \text{ 到 } \mathcal{T} \text{ 中的同态 }\},$$

$$End(\mathcal{S})=Hom(\mathcal{S},\mathcal{S}),\qquad Idem(\mathcal{S})=\{A\in End(\mathcal{S}):A^2=A\}.$$

若 $A\in B(X,Y)$ 是可逆的, 且满足 $A(E_i)=F_i$, $i=1,\cdots,n$, 则称 A 是 $\mathcal{S}$ 到 $\mathcal{T}$ 上的同构. 若存在同构 $A:\mathcal{S}\to\mathcal{T}$, 则称 $\mathcal{S}$ 与 $\mathcal{T}$ 同构. 若 Banach 空间 X 中的 n 子空间系统 $\mathcal{S}=(X;E_1,\cdots,E_n)$ 与两个非零 n 子空间系统的直和同构, 则称 $\mathcal{S}$ 是可分解的, 否则称 $\mathcal{S}$ 是不可分解的. 记摄动映射

$$\pi_{i,j}:(X;E_1,\cdots,E_i,\cdots,E_j,\cdots E_n)\mapsto(X;E_1,\cdots,E_j,\cdots,E_i,\cdots E_n),\ 1\leq i<j\leq n.$$

定义 1 设 $\mathcal{S}=(X;E_1,E_2,E_3,E_4)$ 是 Banach 空间 X 中的 4 子空间系统, 如果存在 X 的闭子空间 X_1 与 X_2, 以及 $T\in B(X_1,X_2)$, $S\in B(X_2,X_1)$ 使得 $X=X_1\bigoplus X_2$, 且

$$E_1=X_1\bigoplus 0,\ E_2=0\bigoplus X_2,\ E_3=\{(x,Tx):x\in X_1\},\ E_4=\{(Sy,y):y\in X_2\},$$

则称 $\mathcal{S}$ 是个有界算子系统, 记为 $\mathcal{S}_{T,S}$.

特别地, 如果上述中的 S 取为 I, 即存在 X 的闭子空间 X_1, 以及 $T\in B(X_1)$ 使得 $X=X_1\bigoplus X_1$, 且

$$E_1=X_1\bigoplus 0,\ E_2=0\bigoplus X_1,\ E_3=\{(x,Tx):x\in X_1\},\ E_4=\{(y,y):y\in X_1\},$$

则记 $\mathcal{S}_{T,I}=\mathcal{S}_T$.

下面给出有界算子系统的同态集、自同态集与幂等自同态集的等价刻画.

命题 2 $\mathcal{S}_{T,S}=(X;E_1,E_2,E_3,E_4)$, $\mathcal{S}_{T',S'}=(Y;F_1,F_2,F_3,F_4)$ 分别是 Banach 空间 X,Y 中的有界算子系统, 其中 $X=X_1\bigoplus X_2$, $T\in B(X_1,X_2)$, $S\in B(X_2,X_1)$, $Y=Y_1\bigoplus Y_2$, $T'\in B(Y_1,Y_2)$, $S'\in B(Y_2,Y_1)$, 则

(1) $$Hom(\mathcal{S}_{T,S},\mathcal{S}_{T',S'})=\{A_1\bigoplus A_2\in B(X,Y):A_1\in B(X_1,Y_1),A_2\in B(X_2,Y_2),\ A_1S=S'A_2,\ A_2T=T'A_1\}.$$

(2) $$End(\mathcal{S}_{T,S})=\{A_1\bigoplus A_2\in B(X):A_1\in B(X_1),A_2\in B(X_2),\ A_1S=SA_2,A_2T=TA_1\}.$$

(3) $$Idem(\mathcal{S}_{T,S})=\{A_1\bigoplus A_2\in B(X):A_1\in B(X_1),A_2\in B(X_2),\ A_1S=SA_2,A_2T=TA_1,A_1^2=A_1,A_2^2=A_2\}.$$

证 设 $A=A_1\bigoplus A_2\in B(X,Y)$ 满足 $A_1\in B(X_1,Y_1)$, $A_2\in B(X_2,Y_2)$, $A_1S=S'A_2$, $A_2T=T'A_1$. 显然 $A(E_i)\subseteq F_i$, $i=1,2$. 对任意 $(x,Tx)\in E_3$, 有

$$A((x,Tx))=(A_1x,A_2Tx)=(A_1x,T'A_1x)\in F_3,$$

即 $A(E_3)\subseteq F_3$. 对任意 $(Sy,y)\in E_4$, 有

$$A((Sy,y))=(A_1Sy,A_2y)=(S'A_2y,A_2y)\in F_4,$$

即 $A(E_4)\subseteq F_4$. 故 $A\in Hom(\mathcal{S}_{T,S},\mathcal{S}_{T',S'})$.

设 $A\in Hom(\mathcal{S}_{T,S},\mathcal{S}_{T',S'})$. 由于 $A(E_i)\subseteq F_i$, $i=1,2$, 则 $A=A_1\bigoplus A_2$, 其中 $A_1\in B(X_1,Y_1)$, $A_2\in B(X_2,Y_2)$. 对任意 $y\in X_2$, 则 $(Sy,y)\in E_4$. 由于 $A(E_4)\subseteq F_4$, 则

$$A((Sy,y))=(A_1Sy,A_2y)\in F_4,$$

故 $A_1Sy=S'A_2y$, 即 $A_1S=S'A_2$. 对任意 $x\in X_1$, 则 $(x,Tx)\in E_3$. 由于 $A(E_3)\subseteq F_3$, 则

$$A((x,Tx))=(A_1x,A_2Tx)\in F_3,$$

故 $A_2Tx=T'A_1x$, 即 $A_2T=T'A_1$.

综上, (1) 成立. (2) 由 (1) 可得. (3) 由 (2) 可得.

推论 3 设 $\mathcal{S}_T=(X;E_1,E_2,E_3,E_4)$, $\mathcal{S}_{T'}=(Y;F_1,F_2,F_3,F_4)$ 分别是 Banach 空间 X,Y 中的有界算子系统, 其中 $X=X_1\bigoplus X_1$, $T\in B(X_1)$, $Y=Y_1\bigoplus Y_1$, $T'\in B(Y_1)$, 则

(1) $Hom(\mathcal{S}_T,\mathcal{S}_{T'})=\{B\bigoplus B\in B(X,Y):B\in B(X_1,Y_1),\ BT=T'B\}$.

(2) $End(\mathcal{S}_T)=\{B\bigoplus B\in B(X):B\in B(X_1),BT=TB\}$.

(3) $Idem(\mathcal{S}_T)=\{B\bigoplus B\in B(X):B\in B(X_1),BT=TB,B^2=B\}$.

3 有界算子系统的同构性质

本节讨论有界算子系统的同构性质, 首先给出有界算子系统同构的等价刻画.

命题 4 设 $\mathcal{S}_{T,S}=(X;E_1,E_2,E_3,E_4)$, $\mathcal{S}_{T',S'}=(Y;F_1,F_2,F_3,F_4)$ 分别是 Banach 空间 X,Y 中的有界算子系统, 其中 $X=X_1\bigoplus X_2$, $T\in B(X_1,X_2)$, $S\in B(X_2,X_1)$, $Y=Y_1\bigoplus Y_2$, $T'\in B(Y_1,Y_2)$, $S'\in B(Y_2,Y_1)$, 则 $\mathcal{S}_{T,S}$ 与 $\mathcal{S}_{T',S'}$ 同构 $\Leftrightarrow$ 存在可逆算子 $A_1\in B(X_1,Y_1)$ 与 $A_2\in B(X_2,Y_2)$ 使得 $A_1S=S'A_2$, $A_2T=T'A_1$.

证 "$\Rightarrow$" 由于 $\mathcal{S}_{T,S}$ 与 $\mathcal{S}_{T',S'}$ 同构, 则存在可逆算子 $A\in Hom(\mathcal{S}_{T,S},\mathcal{S}_{T',S'})$ 使得 $A(E_i)=F_i$, $i=1,2,3,4$. 由命题 2 可得, $A=A_1\bigoplus A_2$, 其中 $A_1\in B(X_1,Y_1)$, $A_2\in B(X_2,Y_2)$, $A_1S=S'A_2$, $A_2T=T'A_1$. 由于 A 可逆, 则 A_1,A_2 可逆.

"$\Leftarrow$" 令 $A=A_1\bigoplus A_2$, 由命题 2, $A\in Hom(\mathcal{S}_{T,S},\mathcal{S}_{T',S'})$, 则 $A(E_i)\subseteq F_i$, $i=1,2,3,4$. 由于 A_1,A_2 可逆, 则 A 可逆. 显然 $A(E_i)=F_i$, $i=1,2$. 对任意 $(x',T'x')\in F_3$, 其中 $x'\in Y_1$, 则存在 $x\in X_1$, 使得 $A_1x=x'$. 由于 $(x,Tx)\in E_3$, 且

$$A((x,Tx))=(A_1x,A_2Tx)=(A_1x,T'A_1x)=(x',T'x'),$$

即 $F_3\subseteq A(E_3)$. 所以 $A(E_3)=F_3$. 对任意 $(S'y',y')\in F_4$, 其中 $y'\in Y_2$, 则存在 $y\in X_2$, 使得 $A_2y=y'$. 由于 $(Sy,y)\in E_4$, 且

$$A((Sy,y))=(A_1Sy,A_2y)=(S'A_2y,A_2y)=(S'y',y'),$$

即 $F_4\subseteq A(E_4)$. 所以 $A(E_4)=F_4$. 综上可得 $A:\mathcal{S}_{T,S}\to\mathcal{S}_{T',S'}$ 是同构, 故 $\mathcal{S}_{T,S}$ 与 $\mathcal{S}_{T',S'}$ 同构.

在命题 4 中取 $S=I$, $S'=I$, 可得

定理 5 设 $\mathcal{S}_T=(X;E_1,E_2,E_3,E_4)$, $\mathcal{S}_{T'}=(Y;F_1,F_2,F_3,F_4)$ 分别是 Banach 空间 X,Y 中的有界算子系统, 其中 $X=X_1\bigoplus X_1$, $T\in B(X_1)$, $Y=Y_1\bigoplus Y_1$, $T'\in B(Y_1)$, 则 $\mathcal{S}_T$ 与 $\mathcal{S}_{T'}$ 同构 $\Leftrightarrow T$ 与 T' 相似.

注 定理 5 说明有界线性算子的相似分类可归结为相应有界算子 4 子空间系统的同构分类.

设 $\mathcal{S}=(X;E_1,E_2,E_3,E_4)$ 是 Banach 空间 X 中的 4 子空间系统, 记 $\mathcal{S}^*=(X^*;E_1^{\perp},E_2^{\perp},E_3^{\perp},E_4^{\perp})$, 其中 X^* 是 X 的共轭空间, $E_i^{\perp}=\{f\in X^*:f(x)=0,x\in E_i\}$ 表示闭子空间 E_i 的上零化子, $i=1,2,3,4$, 则 $\mathcal{S}^*$ 是 X^* 中的 4 子空间系统.

命题 6 设 $\mathcal{S}_{T,S}=(X;E_1,E_2,E_3,E_4)$ 是 Banach 空间 X 中的有界算子系统, 其中 $X=X_1\bigoplus X_2$, $T\in B(X_1,X_2)$, $S\in B(X_2,X_1)$, 则 $\mathcal{S}^*_{T,S}$ 与 $\pi_{1,2}\pi_{3,4}\mathcal{S}_{-S^*,-T^*}$ 同构, 其中

S^*, T^* 分别表示 S, T 的共轭算子.

证 由于 $-S^* \in B(X_1^*, X_2^*)$, $-T^* \in B(X_2^*, X_1^*)$, 则 $\mathcal{S}_{-S^*,-T^*} = (Y; F_1, F_2, F_3, F_4)$ 是 Banach 空间 Y 中的有界算子系统, 其中 $Y = X_1^* \bigoplus X_2^*$. 此时

$$\pi_{1,2}\pi_{3,4}\mathcal{S}_{-S^*,-T^*} = (Y; F_2, F_1, F_4, F_3).$$

由于 $X = X_1 \bigoplus X_2$, 令

$$A : X^* \to X_1^* \bigoplus X_2^* = Y : A(f) = (f|_{X_1}, f|_{X_2}),\ f \in X^*,$$

其中 $f|_{X_i}$ 表示 $f \in X^*$ 在 X 的闭子空间 X_i 上的限制, $i = 1, 2$. 易得 $A \in B(X^*, Y)$ 是同构, 且对任意 $(x, y) \in X$, $x \in X_1$, $y \in X_2$, 及任意 $f \in X^*$, 有

$$((x, y), f) = f|_{X_1}(x) + f|_{X_2}(y).$$

显然 $A(E_1^\perp) = 0 \bigoplus X_2^* = F_2$, $A(E_2^\perp) = X_1^* \bigoplus 0 = F_1$.

对任意 $f \in E_3^\perp \subseteq X^*$, 记 $g = f|_{X_2} \in X_2^*$. 对任意 $x \in X_1$, 则 $(x, Tx) \in E_3$, 故

$$0 = ((x, Tx), f) = f|_{X_1}(x) + f|_{X_2}(Tx) = f|_{X_1}(x) + g(Tx) = f|_{X_1}(x) + (T^*g)(x).$$

因此 $f|_{X_1} = -T^*g$. 所以 $A(f) = (f|_{X_1}, f|_{X_2}) = (-T^*g, g) \in F_4$. 即 $A(E_3^\perp) \subseteq F_4$. 反之, 对任意 $(-T^*g, g) \in F_4$, $g \in X_2^*$, 则 $-T^*g \in X_1^*$. 令 $f = A^{-1}(-T^*g, g) \in X^*$, 即 $f|_{X_1} = -T^*g$, $f|_{X_2} = g$. 对任意 $(x, Tx) \in E_3$, $x \in X_1$, 有

$$((x, Tx), f) = f|_{X_1}(x) + f|_{X_2}(Tx) = (-T^*g)(x) + g(Tx) = -g(Tx) + g(Tx) = 0.$$

即 $f \in E_3^\perp$, 且 $A(f) = (-T^*g, g)$. 即 $F_4 \subseteq A(E_3^\perp)$. 因此 $A(E_3^\perp) = F_4$.

对任意 $f \in E_4^\perp \subseteq X^*$, 记 $g = f|_{X_1} \in X_1^*$. 对任意 $y \in X_2$, 则 $(Sy, y) \in E_4$, 故

$$0 = ((Sy, y), f) = f|_{X_1}(Sy) + f|_{X_2}(y) = g(Sy) + f|_{X_2}(y) = (S^*g)(y) + f|_{X_2}(y).$$

因此 $f|_{X_2} = -S^*g$. 所以 $A(f) = (f|_{X_1}, f|_{X_2}) = (g, -S^*g) \in F_3$. 即 $A(E_4^\perp) \subseteq F_3$. 反之, 对任意 $(g, -S^*g) \in F_3$, $g \in X_1^*$, 则 $-S^*g \in X_2^*$. 令 $f = A^{-1}(g, -S^*g) \in X^*$, 即 $f|_{X_1} = g$, $f|_{X_2} = -S^*g$. 对任意 $(Sy, y) \in E_4$, $y \in X_2$, 有

$$((Sy, y), f) = f|_{X_1}(Sy) + f|_{X_2}(y) = g(Sy) + (-S^*g)(y) = g(Sy) - g(Sy) = 0.$$

即 $f \in E_4^\perp$, 且 $A(f) = (g, -S^*g)$. 即 $F_3 \subseteq A(E_4^\perp)$. 因此 $A(E_4^\perp) = F_3$.

综上可得 A 是 $\mathcal{S}_{T,S}^*$ 到 $\pi_{1,2}\pi_{3,4}\mathcal{S}_{-S^*,-T^*}$ 上的同构, 即 $\mathcal{S}_{T,S}^*$ 与 $\pi_{1,2}\pi_{3,4}\mathcal{S}_{-S^*,-T^*}$ 同构.

命题 7 设 $\mathcal{S}_{T,S} = (X; E_1, E_2, E_3, E_4)$ 是 Banach 空间 X 中的有界算子系统, 其中 $X = X_1 \bigoplus X_2$, $T \in B(X_1, X_2)$, $S \in B(X_2, X_1)$.

(1) 若 T 可逆, 则 $\mathcal{S}_{T,S}$ 与 $\mathcal{S}_{I,TS}$ 同构.

(2) 若 S 可逆, 则 $\mathcal{S}_{T,S}$ 与 $\mathcal{S}_{ST,I}$ 同构.

证 (1) 由于 $TS \in B(X_2)$, 则 $\mathcal{S}_{I,TS} = (Y; F_1, F_2, F_3, F_4)$ 是 Banach 空间 Y 中的有界算子系统, 其中 $Y = X_2 \bigoplus X_2$. 令

$$A : X = X_1 \bigoplus X_2 \to Y = X_2 \bigoplus X_2 : A((x, y)) = (Tx, y), \quad x \in X_1, y \in X_2.$$

则 $A \in B(X, Y)$. 由于 T 可逆, 则 A 可逆. 首先

$$A(E_1) = A(X_1 \bigoplus 0) = T(X_1) \bigoplus 0 = X_2 \bigoplus 0 = F_1,$$

$$A(E_2) = A(0 \bigoplus X_2) = 0 \bigoplus X_2 = F_2.$$

对任意 $(x, Tx) \in E_3$, $x \in X_1$, 有 $A((x, Tx)) = (Tx, Tx)$, 则

$$A(E_3) = \{(Tx, Tx) : x \in X_1\} = \{(y, y) : y \in X_2\} = F_3.$$

对任意 $(Sy,y)\in E_4$, $y\in X_2$, 有 $A((Sy,y))=(TSy,y)$, 则

$$A(E_4)=\{(TSy,y):y\in X_2\}=F_4.$$

综上可得 A 是 $\mathcal{S}_{T,S}$ 到 $\mathcal{S}_{I,TS}$ 上的同构, 即 $\mathcal{S}_{T,S}$ 与 $\mathcal{S}_{I,TS}$ 同构.

(2) 由于 $ST\in B(X_1)$, 则 $\mathcal{S}_{ST,I}=(Y;F_1,F_2,F_3,F_4)$ 是 Banach 空间 Y 中的有界算子系统, 其中 $Y=X_1\bigoplus X_1$. 令

$$A:X=X_1\bigoplus X_2\to Y=X_1\bigoplus X_1:A((x,y))=(x,Sy),\ x\in X_1,y\in X_2.$$

则 $A\in B(X,Y)$. 由于 S 可逆, 则 A 可逆. 首先

$$A(E_1)=A(X_1\bigoplus 0)=X_1\bigoplus 0=F_1,$$

$$A(E_2)=A(0\bigoplus X_2)=0\bigoplus S(X_2)=0\bigoplus X_1=F_2.$$

对任意 $(x,Tx)\in E_3$, $x\in X_1$, 有 $A((x,Tx))=(x,STx)$, 则

$$A(E_3)=\{(x,STx):x\in X_1\}=F_3.$$

对任意 $(Sy,y)\in E_4$, $y\in X_2$, 有 $A((Sy,y))=(Sy,Sy)$, 则

$$A(E_4)=\{(Sy,Sy):y\in X_2\}=\{(x,x):x\in X_1\}=F_4.$$

综上可得 A 是 $\mathcal{S}_{T,S}$ 到 $\mathcal{S}_{ST,I}$ 上的同构, 即 $\mathcal{S}_{T,S}$ 与 $\mathcal{S}_{ST,I}$ 同构.

4 不可分解的有界算子系统

下面讨论有界算子 4 子空间系统不可分解的充要条件. 首先给出 n 子空间系统不可分解的等价刻画.

命题 8 设 $\mathcal{S}=(X;E_1,\cdots,E_n)$ 是 Banach 空间 X 中的 n 子空间系统, 则 $\mathcal{S}$ 是不可分解的 $\Leftrightarrow Idem(\mathcal{S})=\{0,I\}$.

证 "$\Rightarrow$" 若不然, 存在 $P\in Idem(\mathcal{S})$, 使得 $P\neq 0$ 且 $P\neq I$. 记 $X_1=P(X)\neq 0$, $X_2=(I-P)(X)\neq 0$, $E_i'=P(E_i)$, $E_i''=(I-P)(E_i)$, $i=1,2,\cdots,n$. 由于 P 是幂等算子, 则 $X=X_1\bigoplus X_2$, $E_i=E_i'\bigoplus E_i''$, $i=1,2,\cdots,n$. 记 $\mathcal{S}'=(X_1;E_1',\cdots,E_n')$, $\mathcal{S}''=(X_2;E_1'',\cdots,E_n'')$, 则 $\mathcal{S}',\mathcal{S}''$ 分别是 Banach 空间 X_1,X_2 中的非零 n 子空间系统, 且 $\mathcal{S}=\mathcal{S}'\bigoplus\mathcal{S}''$. 这与 $\mathcal{S}$ 是不可分解的矛盾, 故 $Idem(\mathcal{S})=\{0,I\}$.

"$\Leftarrow$" 若 $\mathcal{S}$ 是可分解的, 即存在非零 n 子空间系统 $\mathcal{S}'=(X_1;E_1',\cdots,E_n')$ 与 $\mathcal{S}''=(X_2;E_1'',\cdots,E_n'')$, 使得 $\mathcal{S}$ 与 $\mathcal{S}'\bigoplus\mathcal{S}''=(X_1\bigoplus X_2;E_1'\bigoplus E_1'',\cdots,E_n'\bigoplus E_n'')$ 同构. 故存在可逆算子 $A\in B(X,X_1\bigoplus X_2)$ 使得 $A(E_i)=E_i'\bigoplus E_i''$, $i=1,2,\cdots,n$. 令 $Q\in B(X_1\bigoplus X_2)$ 满足 $Q(x_1,x_2)=(x_1,0)$, $x_1\in X_1,x_2\in X_2$, 则 $Q(E_i'\bigoplus E_i'')=E_i'\bigoplus 0$, $i=1,2,\cdots,n$. 令 $P=A^{-1}QA\in B(X)$, 则 $P\neq 0$ 且 $P\neq I$. 由于

$$P(E_i)=A^{-1}QA(E_i)=A^{-1}Q(E_i'\bigoplus E_i'')=A^{-1}(E_i'\bigoplus 0)\subseteq E_i,\ i=1,2,\cdots,n.$$

则 $P\in End(\mathcal{S})$. 又

$$P^2=A^{-1}QAA^{-1}QA=A^{-1}Q^2A=A^{-1}QA=P,$$

则 $P\in Idem(\mathcal{S})$. 这与 $Idem(\mathcal{S})=\{0,I\}$ 矛盾. 所以 $\mathcal{S}$ 是不可分解的.

下面用强不可约算子来刻画有界算子 4 子空间系统的不可分解性.

定义 9 [9] 设 X 是 Banach 空间, $T \in B(X)$. 如果不存在 X 的非平凡闭子空间 M 与 N, 使得 $X = M \bigoplus N$, 且 $TM \subseteq M$, $TN \subseteq N$, 则称 T 是强不可约的.

注 设 X 是 Banach 空间, 则 $T \in B(X)$ 是强不可约的 $\Leftrightarrow$ 若 $P \in B(X)$ 满足 $P^2 = P$ 且 $PT = TP$, 则必有 $P = 0$ 或 $P = I$.

定义 10 设 X, Y 是 Banach 空间, $T \in B(X,Y)$, $S \in B(Y,X)$. 称 (T,S) 是强不可约算子对, 若 $P \in B(X)$, $Q \in B(Y)$ 满足 $PS = SQ$, $QT = TP$, $P^2 = P$, $Q^2 = Q$, 则必有 $(P = 0, Q = 0)$ 或 $(P = I, Q = I)$.

设 X 是 Banach 空间, $M \subseteq B(X)$, 记 $M' = \{T \in B(X) : TS = ST, S \in M\}$ 为 M 的换位子.

命题 11 设 X 是 Banach 空间, $T \in B(X)$, $S \in \{T\}''$. 若 (T,S) 是强不可约算子对, 则 T 是强不可约的.

证 若 $P \in B(X)$ 满足 $P^2 = P$ 且 $PT = TP$, 即 $P \in \{T\}'$. 由于 $S \in \{T\}''$, 则 $PS = SP$. 由于 (T,S) 是强不可约算子对, 则 $P = 0$ 或 $P = I$, 即 T 是强不可约的.

由于对任意 $T \in B(X)$, 有 $I \in \{T\}''$. 根据定义 9 后的注与命题 11 可得

命题 12 设 X 是 Banach 空间, $T \in B(X)$, 则 (T,I) 是强不可约算子对 $\Leftrightarrow T$ 是强不可约的.

由命题 2, 命题 8 和定义 10 可得

命题 13 设 $\mathcal{S}_{T,S} = (X; E_1, E_2, E_3, E_4)$ 是 Banach 空间 X 中的有界算子系统, 其中 $X = X_1 \bigoplus X_2$, $T \in B(X_1, X_2)$, $S \in B(X_2, X_1)$, 则 $\mathcal{S}_{T,S}$ 是不可分解的 $\Leftrightarrow (T,S)$ 是强不可约算子对.

在命题 13 中取 $S = I$, 结合命题 12 可得

定理 14 设 $\mathcal{S}_T = (X; E_1, E_2, E_3, E_4)$ 是 Banach 空间 X 中的有界算子系统, 其中 $X = X_1 \bigoplus X_1$, $T \in B(X_1)$, 则 $\mathcal{S}_T$ 是不可分解的 $\Leftrightarrow T$ 是强不可约的.

最后给出本文的主要结果.

定理 15 设 X 是 Banach 空间, X^* w^* 可分, 则 $X \bigoplus X$ 中存在不可数多个两两不同构的不可分解的有界算子 4 子空间系统.

证 由 [10] 的定理 2.1 可知, X 上存在强不可约算子 $T \in B(X)$. 对任意 $\alpha \in \mathbf{C}$, 令 $T_\alpha = T + \alpha I \in B(X)$, 显然 T_α 也是强不可约的. 令 $\mathcal{S}_{T_\alpha} = (X \bigoplus X; E_{1,\alpha}, E_{2,\alpha}, E_{3,\alpha}, E_{4,\alpha})$ 是 Banach 空间 $X \bigoplus X$ 中相应于 T_α 的有界算子系统. 由定理 14 可知 $\mathcal{S}_{T_\alpha}$ 是不可分解的. 当 $\alpha \neq \beta$ 时, 显然 T_α 与 T_β 有不相同的谱集, 故 T_α 与 T_β 不相似. 由定理 5, $\mathcal{S}_{T_\alpha}$ 与 $\mathcal{S}_{T_\beta}$ 不同构. 因此 $\{\mathcal{S}_{T_\alpha} : \alpha \in \mathbf{C}\}$ 是不可数多个两两不同构的不可分解的有界算子 4 子空间系统.

参 考 文 献

[1] Gelfand I M, Ponomarev V A. Problems of linear algebra and classification of quadruples of subspaces in a finite-dimensional vector space[A]. Sz-Nagy B, Hilbert space operators and operator algebras(Proc. Internat. Conf., Tihany, 1970), Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, 5[C]. Amsterdam-London: North-Holland, 1972: 163–237

[2] Gabriel P. Unzerlegbare darstellungen I[J]. Manuscripta Math., 1972, 6(1): 71–103.

[3] Araki H. A lattice of von Neumann algebras associated with the quantum theory of a free Bose field[J]. J. Math. Phys., 1963, 4(11): 1343–1362.

[4] Dixmier J. Position relative de deux varietes lineaires fermees dans un espace de Hilbert[J]. Revue Sci., 1948, 86: 387–399.

[5] Halmos P R. Two subspaces[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1969, 144: 381–389.

[6] Enomoto M, Watatani Y. Relative position of four subspaces in a Hilbert space[J]. Adv. Math., 2006, 201(2): 263–317.

[7] Enomoto M, Watatani Y. Exotic indecomposable systems of four subspaces in a Hilbert space[J]. Integral Equations Operator Theory, 2007, 59(2): 149–164.

[8] Enomoto M, Watatani Y. Relative position of three subspaces in a Hilbert space[J]. Acta Sci. Math. (Szeged), 2019, 85(3-4): 519–537.

[9] Jiang C L, Wang Z Y. Strongly irreducibility operators on hilbert space[M]. Harlow: Longman, 1998.

[10] Zhang Y N, Zhong H J. Strongly irreducible operators on Banach spaces[J]. Acta Math. Sinica, 2012, 28(4): 727–740.

BOUNDED OPERATOR FOUR SUBSPACE SYSTEMS IN BANACH SPACES

CHEN Jian-lan, QUE Jia-hua, ZHANG Yun-nan

(*School of Mathematics and Statistics, Fujian Normal University, Fuzhou 350117, China*)

Abstract: This paper studies the bounded operator four subspaces systems $\mathcal{S}_T$ in Banach spaces. It shows that $\mathcal{S}_T$ and $\mathcal{S}_{T'}$ are isomorphic if and only if T and T' are similar. It also shows that $\mathcal{S}_T$ is indecomposable if and only if T is strongly irreducible. Finally, it shows that when the conjugate space X^* of Banach space X is w^* separable, there is an uncountable family of indecomposable bounded operator four subspace systems in $X \bigoplus X$ which are not isomorphic each other. These results are the generalizations and supplements of the corresponding results on Hilbert spaces to Banach spaces.

Keywords: Banach spaces; bounded operator systems; four subspace systems; strongly irreducible operators

2010 MR Subject Classification: 46C07; 47A15