Vol. 44 (2024)
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

b- 距离空间中有限个等式约束下的耦合不动点问题

贺丹妮, 贺　飞
(内蒙古大学数学科学学院, 内蒙古 呼和浩特 010021)

摘 要: 本文研究了 b- 距离空间中有限个等式约束下的耦合不动点问题. 利用数学归纳法, 获得了 b- 距离空间中一类有限个等式约束下的非线性压缩耦合不动点结果, 将已有的 Banach 空间中的结果推广到 b- 距离空间中. 特别地, 我们结果中的压缩条件与空间系数无关. 作为应用, 得到了对称等式约束下的不动点定理, 公共耦合不动点定理以及 b- 距离空间中非线性压缩不动点定理. 这些结果可以推出许多已有结果, 甚至将一些结果中的部分条件完全去掉.

关键词: b- 距离空间; 耦合不动点; 等式约束; 非线性压缩
MR(2010) **主题分类号**: 47H10; 54H25　　**中图分类号**: O177.91
文献标识码: A　　**文章编号**: 0255-7797(2024)03-0169-13

1 引言

距离型空间的概念最初是由 Bakhtin[1] 提出的, 后来又被 Czerwick[2] 命名为 b- 距离空间. b- 距离空间是比距离空间更一般的空间框架, 在 b- 距离空间中建立的结果明显比距离空间中的结果具有更广泛的应用, 例如见 [3–8].

另一方面, 耦合不动点理论是非线性泛函分析中求解非线性方程最有用的工具之一. 其主要思想是将方程解的存在唯一性, 转化为算子（公共）耦合不动点的存在唯一性. 1975 年, Opoitsev[9, 10] 提出了耦合不动点的概念. 1987 年, Guo 和 Lakshmikantham[11] 结合常微分方程初值问题的耦合准解引入了耦合不动点的概念. 之后, 许多学者通过 Lipschitz 条件, 半序方法, 序列逼近等不同方法, 给出了不同类型算子的耦合不动点的各种存在性结果, 例如见 [12–22]. 最近, Jleli 等人 [12] 给出了 Banach 空间中有限个等式约束下的非线性压缩耦合不动点定理, 其中的非线性函数是强比较函数.

本文在 b- 距离空间中建立了有限个等式约束下的非线性压缩耦合不动点定理, 将 Jleli 等人 [12] 的结果推广到 b- 距离空间, 非线性函数弱化为比较函数且压缩条件与空间系数无关. 作为推论, 得到了对称等式约束下的不动点定理, 公共耦合不动点定理以及 b- 距离空间中非线性压缩不动点定理.

下面先回顾一些基本概念.

定义 1.1 [1,2]　设 X 是非空集合且 $s \geq 1$. 如果映射 $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ 满足对于所有的 $x, y, z \in X$,

*收稿日期: 2022-12-22　　接收日期: 2023-08-22
基金项目: 国家自然科学基金资助 (12061050); 内蒙古自然科学基金资助 (2020MS01004).
作者简介: 贺丹妮 (1999–), 女, 内蒙古巴彦淖尔, 研究生, 主要研究方向: 泛函分析.
E-mail: 1123482400@qq.com.
通讯作者: 贺飞 (1979–), 男, 内蒙古巴彦淖尔, 教授, 主要研究方向: 泛函分析.
E-mail: hefei611@163.com.

(1) $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(2) $d(x,y)=d(y,x)$;

(3) $d(x,y)\leq s[d(x,z)+d(z,y)]$.

则称 (X,d) 是系数为 s 的 b- 距离空间.

定义 1.2 [1,2] 设 (X,d) 是 b- 距离空间, $\{x_n\}\subseteq X$ 且 $x\in X$.

(1) 如果 $n\to\infty$ 时, $d(x_n,x)\to 0$, 则称序列 $\{x_n\}\subseteq X$ 是收敛于 x, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$;

(2) 如果 $n,m\to\infty$ 时, $d(x_n,x_m)\to 0$, 则称 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列;

(3) 如果 X 中每个 Cauchy 列是收敛的, 则称 (X,d) 是完备的.

定义 1.3 [13] 设 X 是非空集合, $F:X\times X\to X$ 是给定映射. 如果存在 $(x,y)\in X\times X$, 使得

$$F(x,y)=x,\ F(y,x)=y,$$

则称 (x,y) 是 F 的耦合不动点.

定义 1.4 [12] 设 $(X,\preceq)$ 是偏序集, $\varphi:X\times X\to X$ 是一个给定映射. 如果对于所有的 $e\in X$, 集合

$$\mathrm{lev}\varphi_{\preceq}(e):=\{(x,y)\in X\times X:\varphi(x,y)\preceq e\}$$

是闭集, 则称 φ 是从右侧水平闭的.

定义 1.5 [12] 设 $(X,\preceq)$ 是偏序集, $\varphi:X\times X\to X$ 是一个给定映射. 如果对于所有的 $e\in X$, 集合

$$\mathrm{lev}\varphi_{\succeq}(e):=\{(x,y)\in X\times X:e\preceq\varphi(x,y)\}$$

是闭集, 则称 φ 是从左侧水平闭的.

如果函数 $\psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 满足

(Ψ_1) ψ 是非减函数;

(Ψ_2) $\lim\limits_{n\to\infty}\psi^n(t)=0$ $(\forall t>0)$.

则称 ψ 是比较函数. 记此类 ψ 函数的全体为 Ψ .

评注 1.1 如果将 (Ψ_2) 换为 $\sum_{n=0}^{\infty}\psi^n(t)<\infty$ $(\forall t>0)$, 则称 ψ 是强比较函数. 显然, 强比较函数是强于比较函数的. 本文将 Jleli 等人 [12] 结果中的强比较函数弱化为比较函数.

引理 1.1 [23] 设 $\psi\in\Psi$, 则

(1) $\psi(t)<t,\ t>0$;

(2) $\psi(0)=0$;

(3) ψ 在 $t=0$ 处连续.

2 主要结果

2.1 一个等式约束下的耦合不动点问题

考虑以下方程组解的存在唯一性,

$$\begin{cases}F(x,y)=x,\\ F(y,x)=y,\\ \varphi(x,y)=0.\end{cases}\tag{2.1}$$

其中 F, $\varphi: X\times X\to X$ 是两个给定映射.

定理 2.1 设 $(X,\preceq)$ 是一个偏序集且 (X,d) 是完备的 b- 距离空间 (系数 $s\geq 1$). 设 F, $\varphi: X\times X\to X$ 是两个给定映射, 满足

(1) φ 是从右侧水平闭的;

(2) 存在 $(x_0,y_0)\in X\times X$, 使得 $\varphi(x_0,y_0)\preceq 0$;

(3) 对于所有的 $(x,y)\in X\times X$, 有

$$\varphi(x,y)\preceq 0\Rightarrow 0\preceq \varphi(F(x,y),F(y,x));$$

(4) 对于所有的 $(x,y)\in X\times X$, 有

$$0\preceq\varphi(x,y)\Rightarrow \varphi(F(x,y),F(y,x))\preceq 0;$$

(5) 存在 $\psi\in\Psi$, 使得

$$d(F(x,y),F(u,v))+d(F(y,x),F(v,u))\leq\psi(d(x,u)+d(y,v)),$$

其中 $(x,y),(u,v)\in X\times X$, $\varphi(x,y)\preceq 0$, $0\preceq\varphi(u,v)$.

则 (2.1) 存在唯一解.

证 第 1 步, 构造 $\{x_m\}$, $\{y_m\}$ 满足 $\lim\limits_{m\to\infty}(d(x_{m+1},x_m)+d(y_{m+1},y_m))=0$.

由条件 (2) 知, 存在 $(x_0,y_0)\in X\times X$, 使得 $\varphi(x_0,y_0)\preceq 0$, 从而

$$\begin{aligned}0\preceq\varphi(F(x_0,y_0),F(y_0,x_0))&\Rightarrow\varphi(F^2(x_0,y_0),F^2(y_0,x_0))\preceq 0\\&\Rightarrow 0\preceq\varphi(F^3(x_0,y_0),F^3(y_0,x_0)).\end{aligned}$$

继续下去, 归纳得

$$\varphi(F^{2n}(x_0,y_0),F^{2n}(y_0,x_0))\preceq 0,\ 0\preceq\varphi(F^{2n+1}(x_0,y_0),F^{2n+1}(y_0,x_0)),\quad n=0,1,2\dots$$

对于 $\epsilon=1$, 存在奇数 $n_0\in\mathbb{N}$, 使得

$$\varphi^{n_0}(1)<\frac{1}{2s}.$$

令 $x_{m+1}=g(x_m,y_m)=F^{n_0}(x_m,y_m)$, $y_{m+1}=g(y_m,x_m)=F^{n_0}(y_m,x_m)$, $\quad m=0,1,2\dots$ 由 n_0 为奇数可得

$$\begin{aligned}0\preceq\varphi(x_1,y_1)=\varphi(g(x_0,y_0),g(y_0,x_0))&\Rightarrow\varphi(x_2,y_2)=\varphi(g^2(x_0,y_0),g^2(y_0,x_0))\preceq 0\\&\Rightarrow 0\preceq\varphi(x_3,y_3)=\varphi(g^3(x_0,y_0),g^3(y_0,x_0)).\end{aligned}$$

归纳得

$$\varphi(x_{2m},y_{2m})\preceq 0,\ 0\preceq\varphi(x_{2m+1},y_{2m+1}),\quad m=0,1,2\dots\tag{2.2}$$

由压缩条件可得

$$\begin{aligned}&d(x_{m+1},x_m)+d(y_{m+1},y_m)\\=&d(g^m(g(x_0,y_0),g(y_0,x_0)),g^m(x_0,y_0))+d(g^m(g(y_0,x_0),g(x_0,y_0)),g^m(y_0,x_0))\\\leq&\psi^{n_0m}(d(g(x_0,y_0),x_0)+d(g(y_0,x_0),y_0)).\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{m\to\infty}(d(x_{m+1},x_m)+d(y_{m+1},y_m))=0$.

第 2 步, 证明 $\{x_m\}$, $\{y_m\}$ 是 Cauchy 列.

取 $m_0\in\mathbb{N}$, 使得 $d(x_{m_0},x_{m_0+1})+d(y_{m_0},y_{m_0+1})<\dfrac{1}{2s}<1$, 从而

$$\begin{aligned}
&d(x_{m_0},x_{m_0+2})+d(y_{m_0},y_{m_0+2})\\
\leq&s[d(x_{m_0},x_{m_0+1})+d(x_{m_0+1},x_{m_0+2})+d(y_{m_0},y_{m_0+1})+d(y_{m_0+1},y_{m_0+2})]\\
\leq&s[d(x_{m_0},x_{m_0+1})+d(y_{m_0},y_{m_0+1})+\psi^{n_0}(d(x_{m_0},x_{m_0+1})+d(y_{m_0},y_{m_0+1}))]\\
<&s[\frac{1}{2s}+\psi^{n_0}(1)]\\
<&s[\frac{1}{2s}+\frac{1}{2s}]=1.
\end{aligned}$$

假设 $d(x_{m_0},x_{m_0+k-1})+d(y_{m_0},y_{m_0+k-1})<1$ 成立, 则

$$\begin{aligned}
&d(x_{m_0},x_{m_0+k})+d(y_{m_0},y_{m_0+k})\\
\leq&s[d(x_{m_0},x_{m_0+1})+d(x_{m_0+1},x_{m_0+k})+d(y_{m_0},y_{m_0+1})+d(y_{m_0+1},y_{m_0+k})]\\
\leq&s[d(x_{m_0},x_{m_0+1})+d(y_{m_0},y_{m_0+1})+\psi^{n_0}(d(x_{m_0},x_{m_0+k-1})+d(y_{m_0},y_{m_0+k-1}))]\\
<&s[\frac{1}{2s}+\psi^{n_0}(1)]\\
<&s[\frac{1}{2s}+\frac{1}{2s}]=1.
\end{aligned}$$

归纳得

$$d(x_{m_0},x_{m_0+k})+d(y_{m_0},y_{m_0+k})<1,\ \forall k\in\mathbb{N}.$$

再由压缩条件可得, 对于任意的 $m\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&d(x_m,x_{m+k})+d(y_m,y_{m+k})\\
=&d(g^{m-m_0}(x_{m_0},y_{m_0}),g^{m-m_0}(x_{m_0+k},y_{m_0+k}))+d(g^{m-m_0}(y_{m_0},x_{m_0}),g^{m-m_0}(y_{m_0+k},x_{m_0+k}))\\
\leq&\psi^{(m-m_0)n_0}(d(x_{m_0},x_{m_0+k})+d(y_{m_0},y_{m_0+k}))\\
<&\psi^{(m-m_0)n_0}(1)\to 0\ \ (m\to\infty).
\end{aligned}$$

因此 $\{x_m\}$, $\{y_m\}$ 是 Cauchy 列.

第 3 步, 证明 g 存在唯一的耦合不动点.

由 (X,d) 是完备的 b- 距离空间可知, 存在 $(x^*,y^*)\in X\times X$, 使得

$$\lim_{m\to\infty}x_m=x^*,\ \lim_{m\to\infty}y_m=y^*. \tag{2.3}$$

由 ψ 的性质 $\lim\limits_{t\to 0^+}\psi(t)=0$ 可得, F 是连续的, 进而 g 是连续的, 则

$$x^*=\lim_{m\to\infty}x_m=\lim_{m\to\infty}x_{m+1}=\lim_{m\to\infty}g(x_m,y_m)=g(x^*,y^*),$$

$$y^*=\lim_{m\to\infty}y_m=\lim_{m\to\infty}y_{m+1}=\lim_{m\to\infty}g(y_m,x_m)=g(y^*,x^*).$$

因此 (x^*,y^*) 是 g 的一个耦合不动点. 由 (2.2) 可得 $(x_{2m},y_{2m})\in \mathrm{lev}\varphi_{\preceq}(0),\quad m=0,1,2\ldots$ 对上式令 $m\to\infty$ 取极限, 由 φ 是从右侧水平闭的以及 (2.3) 可得 $(x^*,y^*)\in \mathrm{lev}\varphi_{\preceq}(0)$, 即 $\varphi(x^*,y^*)\preceq 0$. 再由条件 (3) 可得

$$
\begin{aligned}
\varphi(x^*,y^*)\preceq 0 &\Rightarrow 0\preceq \varphi(F(x^*,y^*),F(y^*,x^*))\\
&\Rightarrow \varphi(F^2(x^*,y^*),F^2(y^*,x^*))\preceq 0\\
&\Rightarrow 0\preceq \varphi(F^3(x^*,y^*),F^3(y^*,x^*)),
\end{aligned}
$$

结合 n_0 为奇数, 归纳得

$$
0\preceq \varphi(F^{n_0}(x^*,y^*),F^{n_0}(y^*,x^*))=\varphi(g(x^*,y^*),g(y^*,x^*))=\varphi(x^*,y^*),
$$

因此

$$
\varphi(x^*,y^*)=0. \tag{2.4}
$$

假设 $(u^*,v^*)\in X\times X$ 是 g 的另一个耦合不动点. 由 (2.4) 可知, (x^*,y^*) 和任意的 $(u,v)\in X\times X$ 满足压缩条件,

$$
\begin{aligned}
d(x^*,u^*)+d(y^*,v^*)&=d(g(x^*,y^*),g(u^*,v^*))+d(g(y^*,x^*),g(v^*,u^*))\\
&\le \psi^{n_0}(d(x^*,u^*)+d(y^*,v^*))\\
&< d(x^*,u^*)+d(y^*,v^*).
\end{aligned}
$$

从而矛盾, 因此 (x^*,y^*) 是 g 的唯一的耦合不动点.

第 4 步, 证明 (2.1) 存在唯一解.

由 g 的定义可得

$$
\begin{aligned}
g(F(x^*,y^*),F(y^*,x^*))&=F^{n_0+1}(x^*,y^*)\\
&=F(g(x^*,y^*),g(y^*,x^*))\\
&=F(x^*,y^*).\\
g(F(y^*,x^*),F(x^*,y^*))&=F^{n_0+1}(y^*,x^*)\\
&=F(g(y^*,x^*),g(x^*,y^*))\\
&=F(y^*,x^*).
\end{aligned}
$$

从而 $(F(x^*,y^*),\ F(y^*,x^*))$ 是 g 的一个耦合不动点. 由 g 的耦合不动点的唯一性得

$$
F(x^*,y^*)=x^*,\ F(y^*,x^*)=y^*.
$$

再由 (2.4) 可知, (x^*,y^*) 是 (2.1) 的一个解. 假设 $(u',v')\in X\times X$ 是 (2.1) 的另一个解, 则

$$
\begin{aligned}
d(x^*,u')+d(y^*,v')&=d(F(x^*,y^*),F(u',v'))+d(F(y^*,x^*),F(v',u'))\\
&\le \psi(d(x^*,u')+d(y^*,v'))\\
&< d(x^*,u')+d(y^*,v').
\end{aligned}
$$

从而矛盾, 因此 (x^*,y^*) 是 (2.1) 唯一的解.

评注 2.1 如果将定理 2.1 中的条件 (1) 换为 φ 是从左侧水平闭的, 结论仍然成立.

评注 2.2 文献 [12] 中 Jleli 等人给出了 Banach 空间锥序下的一个等式约束下的耦合不动点定理. 当定理 2.1 中的 b- 距离取为范数生成的距离且 $\preceq$ 取为锥序时, 就可以得到 [12] 中的定理 2.1. 因此我们的结果是 Jleli 等人结果在 b- 距离空间的推广形式.

评注 2.3 如果将定理 2.1 中压缩条件换为

$$\max(d(F(x,y),F(u,v)),d(F(y,x),F(v,u)))\le\psi(\max(d(x,u),d(y,v))),$$

其中 $(x,y),(u,v)\in X\times X$, $\varphi(x,y)\preceq 0$, $0\preceq\varphi(u,v)$, 结论仍然成立.

2.2 r 个等式约束下的耦合不动点问题

考虑以下方程组解的存在唯一性,

$$\begin{cases} F(x,y)=x,\\ F(y,x)=y,\\ \varphi_i(x,y)=0,\ i=1,2,\ldots,r \end{cases} \tag{2.5}$$

其中 F, $\varphi_i:X\times X\to X$ $(i=1,2,\ldots,r)$ 是 $r+1$ 个给定映射.

定理 2.2 设 $(X,\preceq)$ 是一个偏序集且 (X,d) 是完备的 b- 距离空间 (系数 $s\ge 1$). 设 F, $\varphi_i:X\times X\to X$ $(i=1,2,\ldots,r)$ 是 $r+1$ 个给定映射, 满足

(1) $\varphi_i(i=1,2,\ldots,r)$ 是从右侧水平闭的;

(2) 存在 $(x_0,y_0)\in X\times X$, 使得 $\varphi_i(x_0,y_0)\preceq 0$ $(i=1,2,\ldots,r)$;

(3) 对于所有的 $(x,y)\in X\times X$, 有

$$\varphi_i(x,y)\preceq 0,\ i=1,2,\ldots,r\Rightarrow 0\preceq\varphi_i(F(x,y),F(y,x)),\ i=1,2,\ldots,r;$$

(4) 对于所有的 $(x,y)\in X\times X$, 有

$$0\preceq\varphi_i(x,y),\ i=1,2,\ldots,r\Rightarrow\varphi_i(F(x,y),F(y,x))\preceq 0,\ i=1,2,\ldots,r;$$

(5) 存在 $\psi\in\Psi$, 使得 $d(F(x,y),F(u,v))+d(F(y,x),F(v,u))\le\psi(d(x,u)+d(y,v))$, 其中 $(x,y),(u,v)\in X\times X$, $\varphi_i(x,y)\preceq 0$, $0\preceq\varphi_i(u,v)$, $i=1,2,\ldots,r$.

则 (2.5) 存在唯一解.

证 第 1 步, 构造 $\{x_m\}$, $\{y_m\}$ 满足 $\lim\limits_{m\to\infty}(d(x_{m+1},x_m)+d(y_{m+1},y_m))=0$.

由条件 (2) 知, 存在 $(x_0,y_0)\in X\times X$, 使得对于 $i=1,2,\ldots,r$, $\varphi_i(x_0,y_0)\preceq 0$, 从而

$$\begin{aligned}0\preceq\varphi_i(F(x_0,y_0),F(y_0,x_0))&\Rightarrow\varphi_i(F^2(x_0,y_0),F^2(y_0,x_0))\preceq 0\\&\Rightarrow 0\preceq\varphi_i(F^3(x_0,y_0),F^3(y_0,x_0)).\end{aligned}$$

继续下去, 归纳得, 对于 $i=1,2,\ldots,r$,

$$\varphi_i(F^{2n}(x_0,y_0),F^{2n}(y_0,x_0))\preceq 0, 0\preceq\varphi_i(F^{2n+1}(x_0,y_0),F^{2n+1}(y_0,x_0))$$

对于 $\epsilon=1$, 存在奇数 $n_0\in\mathbb{N}$, 使得

$$\varphi_i{}^{n_0}(1)<\frac{1}{2s}\ (i=1,2,\ldots,r).$$

令 $x_{m+1}=g(x_m,y_m)=F^{n_0}(x_m,y_m)$, $y_{m+1}=g(y_m,x_m)=F^{n_0}(y_m,x_m), m=0,1,2\ldots$ 由 n_0 为奇数可得, 对于 $i=1,2,\ldots,r$,

$$\begin{aligned}0\preceq\varphi_i(x_1,y_1)=\varphi_i(g(x_0,y_0),g(y_0,x_0))\Rightarrow\varphi_i(x_2,y_2)=\varphi_i(g^2(x_0,y_0),g^2(y_0,x_0))\preceq 0\\ \Rightarrow 0\preceq\varphi_i(x_3,y_3)=\varphi_i(g^3(x_0,y_0),g^3(y_0,x_0)).\end{aligned}$$

归纳得, 对于 $i=1,2,\ldots,r$,

$$\varphi_i(x_{2m},y_{2m})\preceq 0,\ 0\preceq\varphi_i(x_{2m+1},y_{2m+1}),\ m=0,1,2\ldots \tag{2.6}$$

由压缩条件可得

$$\begin{aligned}&d(x_{m+1},x_m)+d(y_{m+1},y_m)\\=&d(g^m(g(x_0,y_0),g(y_0,x_0)),g^m(x_0,y_0))+d(g^m(g(y_0,x_0),g(x_0,y_0)),g^m(y_0,x_0))\\\leq&\psi^{n_0m}(d(g(x_0,y_0),x_0)+d(g(y_0,x_0),y_0)).\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{m\to\infty}(d(x_{m+1},x_m)+d(y_{m+1},y_m))=0$.

第 2 步, 由定理 2.1 中 Cauchy 列的证明, 类似可得 $\{x_m\}$, $\{y_m\}$ 是 Cauchy 列.

第 3 步, 证明 g 存在唯一的耦合不动点.

由 (X,d) 是完备的 b- 距离空间可知, 存在 $(x^*,y^*)\in X\times X$, 使得

$$\lim_{m\to\infty}x_m=x^*,\ \lim_{m\to\infty}y_m=y^*. \tag{2.7}$$

由 ψ 的性质 $\lim\limits_{t\to0^+}\psi(t)=0$ 可得, F 是连续的, 进而 g 是连续的, 则

$$x^*=\lim_{m\to\infty}x_m=\lim_{m\to\infty}x_{m+1}=\lim_{m\to\infty}g(x_m,y_m)=g(x^*,y^*),$$

$$y^*=\lim_{m\to\infty}y_m=\lim_{m\to\infty}y_{m+1}=\lim_{m\to\infty}g(y_m,x_m)=g(y^*,x^*).$$

因此 (x^*,y^*) 是 g 的一个耦合不动点. 由 (2.6) 可得, 对于 $i=1,2,\ldots,r$,

$$(x_{2m},y_{2m})\in\mathrm{lev}\varphi_{i_\preceq}(0),\qquad m=0,1,2\ldots$$

对上式令 $m\to\infty$ 取极限, 由 $\varphi_i(i=1,2,\ldots,r)$ 是从右侧水平闭的以及 (2.7) 可得

$$(x^*,y^*)\in\mathrm{lev}\varphi_{i_\preceq}(0),\ i=1,2,\ldots,r$$

即

$$\varphi_i(x^*,y^*)\preceq 0,\ i=1,2,\ldots,r.$$

再由条件 (3) 可得, 对于 $i=1,2,\ldots,r$,

$$\begin{aligned}\varphi_i(x^*,y^*)\preceq 0 &\Rightarrow 0\preceq \varphi_i(F(x^*,y^*),F(y^*,x^*))\\ &\Rightarrow \varphi_i(F^2(x^*,y^*),F^2(y^*,x^*))\preceq 0\\ &\Rightarrow 0\preceq \varphi_i(F^3(x^*,y^*),F^3(y^*,x^*)).\end{aligned}$$

结合 n_0 为奇数, 归纳得, 对于 $i=1,2,\ldots,r$,

$$\begin{aligned}0\preceq \varphi_i(F^{n_0}(x^*,y^*),F^{n_0}(y^*,x^*)) &= \varphi_i(g(x^*,y^*),g(y^*,x^*))\\ &= \varphi_i(x^*,y^*).\end{aligned}$$

因此, 对于 $i=1,2,\ldots,r$,

$$\varphi_i(x^*,y^*)=0. \tag{2.8}$$

假设 $(u^*,v^*)\in X\times X$ 是 g 的另一个耦合不动点. 由 (2.8) 可知, (x^*,y^*) 和任意的 $(u,v)\in X\times X$ 满足压缩条件,

$$\begin{aligned}d(x^*,u^*)+d(y^*,v^*) &= d(g(x^*,y^*),g(u^*,v^*))+d(g(y^*,x^*),g(v^*,u^*))\\ &\le \psi^{n_0}(d(x^*,u^*)+d(y^*,v^*))\\ &< d(x^*,u^*)+d(y^*,v^*).\end{aligned}$$

从而矛盾, 因此 (x^*,y^*) 是 g 的唯一的耦合不动点.

第 4 步, 由定理 2.1 证明类似可得 (x^*,y^*) 是 (2.5) 唯一的解.

评注 2.4 类似评注 2.2 , 我们可以看到, 定理 2.2 是 [12] 中定理 2.6 在 b- 距离空间的推广形式.

评注 2.5 类似评注 2.3 , 将定理 2.2 中压缩条件换为

$$\max(d(F(x,y),F(u,v)),d(F(y,x),F(v,u)))\le\psi(\max(d(x,u),d(y,v))),$$

其中 $(x,y),(u,v)\in X\times X$, $\varphi_i(x,y)\preceq 0$, $0\preceq\varphi_i(u,v)$, $i=1,2,\ldots,r$, 结论仍然成立.

定理 2.2 中 $r=2$ 时可以得到以下方程组解的存在唯一性,

$$\begin{cases}F(x,y)=x,\\ F(y,x)=y,\\ \varphi_1(x,y)=0,\\ \varphi_2(x,y)=0.\end{cases} \tag{2.9}$$

其中 F, φ_1, $\varphi_2: X\times X\to X$ 是三个给定映射.

推论 2.1 设 $(X,\preceq)$ 是一个偏序集且 (X,d) 是完备的 b- 距离空间 (系数 $s\ge 1$). 设 F, $\varphi_1,\varphi_2: X\times X\to X$ 是三个给定映射, 满足

(1) $\varphi_i(i=1,2)$ 是从右侧水平闭的;

(2) 存在 $(x_0,y_0)\in X\times X$, 使得 $\varphi_i(x_0,y_0)\preceq 0\ (i=1,2)$;

(3) 对于所有的 $(x,y)\in X\times X$, 有

$$\varphi_i(x,y)\preceq 0,\ i=1,2\Rightarrow 0\preceq\varphi_i(F(x,y),F(y,x)),\ i=1,2;$$

(4) 对于所有的 $(x,y)\in X\times X$, 有

$$0\preceq\varphi_i(x,y),\ i=1,2\Rightarrow\varphi_i(F(x,y),F(y,x))\preceq 0,\ i=1,2;$$

(5) 存在 $\psi\in\Psi$, 使得 $d(F(x,y),F(u,v))+d(F(y,x),F(v,u))\leq\psi(d(x,u)+d(y,v))$, 其中 $(x,y),(u,v)\in X\times X$, $\varphi_i(x,y)\preceq 0$, $0\preceq\varphi_i(u,v)$, $i=1,2$.
则 (2.9) 存在唯一解.

将推论 2.1 中的 φ_2 换为 $-\varphi_2$, 得到以下结论.

推论 2.2 设 $(X,\preceq)$ 是一个偏序集且 (X,d) 是完备的 b- 距离空间 (系数 $s\geq 1$). 设 F, $\varphi_1,\varphi_2: X\times X\to X$ 是三个给定映射, 满足

(1) φ_1 是从右侧水平闭的, φ_2 是从左侧水平闭的;

(2) 存在 $(x_0,y_0)\in X\times X$, 使得 $\varphi_1(x_0,y_0)\preceq 0$ 且 $0\preceq\varphi_2(x_0,y_0)$;

(3) 对于所有的 $(x,y)\in X\times X$, 有

$$\varphi_1(x,y)\preceq 0,\ 0\preceq\varphi_2(x,y)\Rightarrow 0\preceq\varphi_1(F(x,y),F(y,x)),\ \varphi_2(F(x,y),F(y,x))\preceq 0;$$

(4) 对于所有的 $(x,y)\in X\times X$, 有

$$0\preceq\varphi_1(x,y),\ \varphi_2(x,y)\preceq 0\Rightarrow\varphi_1(F(x,y),F(y,x))\preceq 0,\ 0\preceq\varphi_2(F(x,y),F(y,x));$$

(5) 存在 $\psi\in\Psi$, 使得

$$d(F(x,y),F(u,v))+d(F(y,x),F(v,u))\leq\psi(d(x,u)+d(y,v)),$$

其中 $(x,y),(u,v)\in X\times X$, $\varphi_1(x,y)\preceq 0$, $0\preceq\varphi_2(x,y)$, $0\preceq\varphi_1(u,v)$, $\varphi_2(u,v)\preceq 0$,
则 (2.9) 存在唯一解.

将推论 2.2 中的 φ_1 换为 $-\varphi_1$, 得到以下结论.

推论 2.3 设 $(X,\preceq)$ 是一个偏序集且 (X,d) 是完备的 b- 距离空间 (系数 $s\geq 1$). 设 F, $\varphi_1,\varphi_2: X\times X\to X$ 是三个给定映射, 满足

(1) $\varphi_i(i=1,2)$ 是从左侧水平闭的;

(2) 存在 $(x_0,y_0)\in X\times X$, 使得 $0\preceq\varphi_i(x_0,y_0)$, $(i=1,2)$;

(3) 对于所有的 $(x,y)\in X\times X$, 有

$$\varphi_i(x,y)\preceq 0,\ i=1,2\Rightarrow 0\preceq\varphi_i(F(x,y),F(y,x)),\ i=1,2;$$

(4) 对于所有的 $(x,y)\in X\times X$, 有

$$0\preceq\varphi_i(x,y),\ i=1,2\Rightarrow\varphi_i(F(x,y),F(y,x))\preceq 0,\ i=1,2;$$

(5) 存在 $\psi\in\Psi$, 使得

$$d(F(x,y),F(u,v))+d(F(y,x),F(v,u))\leq\psi(d(x,u)+d(y,v)),$$

其中 $(x,y),(u,v)\in X\times X$, $\varphi_i(x,y)\preceq 0$, $0\preceq\varphi_i(u,v)$, $i=1,2$.
则 (2.9) 存在唯一解.

3 应用

3.1 对称等式约束下的不动点定理

考虑以下方程组解的存在唯一性,

$$\begin{cases} F(x,x)=x, \\ \varphi_i(x,x)=0,\ i=1,2,\ldots,r \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 F, $\varphi_i: X\times X\to X$ $(i=1,2,\ldots,r)$ 是 $r+1$ 个给定映射.

推论 3.1 设 $(X,\preceq)$ 是一个偏序集且 (X,d) 是完备的 b- 距离空间 (系数 $s\geq 1$). 设 F, $\varphi: X\times X\to X$ $(i=1,2,\ldots,r)$ 是 $r+1$ 个给定映射, 满足

(1) φ_i $(i=1,2,\ldots,r)$ 是从右侧水平闭的;

(2) φ_i $(i=1,2,\ldots,r)$ 是对称的;

(3) 存在 $(x_0,y_0)\in X\times X$, 使得 $\varphi_i(x_0,y_0)\preceq 0$ $(i=1,2,\ldots,r)$;

(4) 对于所有的 $(x,y)\in X\times X$, 有

$$\varphi_i(x,y)\preceq 0,\ i=1,2,\ldots,r\Rightarrow 0\preceq\varphi_i(F(x,y),F(y,x)),\ i=1,2,\ldots,r;$$

(5) 对于所有的 $(x,y)\in X\times X$, 有

$$0\preceq\varphi_i(x,y),\ i=1,2,\ldots,r\Rightarrow \varphi_i(F(x,y),F(y,x))\preceq 0,\ i=1,2,\ldots,r;$$

(6) 存在 $\psi\in\Psi$, 使得

$$d(F(x,y),F(u,v))+d(F(y,x),F(v,u))\leq\psi(d(x,u)+d(y,v)),$$

其中 $(x,y),(u,v)\in X\times X$, $\varphi_i(x,y)\preceq 0$, $0\preceq\varphi_i(u,v)$, $i=1,2,\ldots,r$.
则 (3.1) 存在唯一解.

证 由定理 2.2 知 (2.5) 有唯一的解 $(x^*,y^*)\in X\times X$. 因为 φ_i $(i=1,2,\ldots,r)$ 是对称的, 所以 (y^*,x^*) 也是 (2.5) 的一个解. 由唯一性得, $x^*=y^*$. 因此 $x^*\in X$ 是 (3.1) 的唯一解.

3.2 公共耦合不动点定理

定义 3.1 [12] 设 X 是非空集合, $F: X\times X\to X$, $g: X\to X$ 是两个给定映射. 如果存在 $(x,y)\in X\times X$, 使得

$$x=gx=F(x,y),\ y=gy=F(y,x),$$

则称 (x,y) 是 F 和 g 的公共耦合不动点.

推论 3.2 设 $(X,\preceq)$ 是一个偏序集且 (X,d) 是完备的 b- 距离空间 (系数 $s\geq 1$). 设 $F: X\times X\to X$, $g: X\to X$ 是两个给定映射, 满足

(1) g 是一个连续映射;
(2) 存在 $(x_0, y_0) \in X \times X$, 使得 $gx_0 \preceq x_0$, 且 $gy_0 \preceq y_0$;
(3) 对于所有的 $(x, y) \in X \times X$, 有

$$gx \preceq x,\ gy \preceq y \Rightarrow F(x,y) \preceq gF(x,y),\ F(y,x) \preceq gF(y,x);$$

(4) 对于所有的 $(x, y) \in X \times X$, 有

$$x \preceq gx,\ y \preceq gy \Rightarrow gF(x,y) \preceq F(x,y),\ gF(y,x) \preceq F(y,x);$$

(5) 存在 $\psi \in \Psi$, 使得

$$d(F(x,y),F(u,v)) + d(F(y,x),F(v,u)) \leq \psi(d(x,u)+d(y,v)),$$

其中 $(x,y),(u,v) \in X \times X$, $gx \preceq x$, $gy \preceq y$, 且 $u \preceq gu$, $v \preceq gv$.
则 F 和 g 存在唯一的公共耦合不动点.

证 令 $\varphi_1,\ \varphi_2 : X \times X \to X$:

$$\varphi_1(x,y) = gx - x,\ \varphi_2(x,y) = gy - y,\ \ (x,y) \in X \times X$$

则 $(x,y) \in X \times X$ 是 F 和 g 的一个公共耦合不动点当且仅当 $(x,y) \in X \times X$ 是 (2.9) 的一个解. 由 g 是连续映射可得 $\varphi_i (i = 1,2)$ 是从右侧水平闭的. 再由推论 2.1 得 F 和 g 存在唯一的公共耦合不动点.

3.3 b- 距离空间中的不动点定理

推论 3.3 设 $T : X \to X$ 是一个给定映射, 如果存在 $\psi \in \Psi$, 使得

$$d(Tx,Tu) \leq \psi(d(x,u)),\ (x,u) \in X \times X \tag{3.2}$$

则 T 存在唯一的不动点.

证 令 $F : X \times X \to X,\ g : X \to X,$

$$F(x,y) = Tx,\ (x,y) \in X \times X;$$

$$gx = x,\ x \in X.$$

由 (3.2) 得, 对于所有的 $(x,y),(u,v) \in X \times X$,

$$d(Tx,Tu) \leq \psi(d(x,u)),\ d(Ty,Tv) \leq \psi(d(y,v)).$$

从而

$$\max(d(Tx,Tu),d(Ty,Tv)) \leq \max(\psi(d(x,u)),\psi(d(y,v))).$$

由 ψ 是非减的可得

$$\max(d(Tx,Tu),d(Ty,Tv)) \leq \psi(\max(d(x,u),d(y,v))),\ \ (x,y),(u,v) \in X \times X.$$

由 F 和 g 的定义得

$$\max(d(F(x,y),F(u,v)),d(F(y,x),F(v,u)))\leq\psi(\max(d(x,u),d(y,v))),$$

其中 $(x,y),(u,v)\in X\times X$, $gx\preceq x$, $gy\preceq y$, 且 $u\preceq gu$, $v\preceq gv$. 由推论 3.2 及评注 2.5 可知, 存在唯一 $(x^*,y^*)\in X\times X$, 使得 $x^*=F(x^*,y^*)=Tx^*$, $y^*=F(y^*,x^*)=Ty^*$. 假设 $x^*\neq y^*$, 由 (3.2) 得 $d(x^*,y^*)=d(Tx^*,Ty^*)\leq\psi(d(x,y))<d(x^*,y^*)$. 从而矛盾. 因此 $x^*\in X$ 是 T 的唯一不动点.

评注 3.1 将推论 3.3 中 ψ 取为 $\psi(t)=kt$, $t\geq 0$ 其中 $k\in(0,1)$, 可以得到 Banach 压缩原理.

评注 3.2 推论 3.3 可以将 [12] 中推论 3.8 的次可加条件去掉.

评注 3.3 定理 2.2 可以推出推论 3.3, 而推论 3.3 就是文献 [24] 中的定理 12.2, 因此定理 2.2 是文献 [24] 中定理 12.2 的推广.

参 考 文 献

[1] Bakhtin I A. The contraction mapping principle in quasi–metric space[J]. Func. Anal. Unianowsk Gos. Ped. Inst., 1989, 30: 26–37.

[2] Czerwik S. Contraction mappings in b–metric spaces[J]. Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis, 1993, 1(1): 5–11.

[3] Aghajani A, Abbas M, Roshan J R. Common fixed point of generalized weak contractive mappings in partially ordered b–metric spaces[J]. Mathematica Slovaca, 2014, 64(4): 941–960.

[4] Ameer E, Arshad M, Shatanawi W. Common fixed point results for generalized–contraction multivalued mappings in b–metric spaces[J]. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 2017, 19(4): 3069–3086.

[5] Amini–Harandi A. Fixed point theory for quasi–contraction maps in b–metric space[J]. Fixed Point Theory, 2014, 15(2): 351–358.

[6] Aydi H, Bota M F, Karapinar E, et al. A fixed point theorem for set–valued quasi–contractions in b–metric spaces[J]. Fixed Point Theory and Applications, 2012, 2012(88): 1–8.

[7] Aydi H, Bota M F, Karapinar E, et al. A common fixed point for weak ϕ–contractions on b–metric spaces[J]. Fixed Point Theory, 2012, 13(2): 337–346.

[8] Joseph T, Kayode O. On some well known fixed point theorems in b–metric spaces[J]. Turkish Journal of Analysis and Number Theory, 2013, 1(1): 13–16.

[9] Opoitsev V I. Heterogenic and combined–concave operators(in Russian)[J]. Siberian Mathematical Journal, 1975, 16(4): 597–605.

[10] Opoitsev V I. Dynamics of collective behavior. III. Heterogenic systems[J]. Avtomatika i Telemekhanika, 1975, 36(1): 124–138.

[11] Guo Dajun, Lakshmikantham V. Coupled fixed points of nonlinear operators with applications[J]. Nonlinear Analysis, 1987, 11(5), 623–632.

[12] Jleli M, Samet B. A Coupled fixed point problem under a finite number of equality constraints in a Banach space partially ordered by a cone[J]. Fixed Point Theory, 2018, 19(2): 611–624.

[13] Gnana Bhaskar T, Lakshmikantham V. Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications[J]. Nonlinear Analysis, 2006, 65(7): 1379–1393.

[14] Guo Dajun. Fixed points of mixed monotone operators with applications[J]. Applicable Analysis, 1988, 31(3): 215–224.

[15] Guo Dajun, Cho Y J, Zhu Jiang. Partial ordering methods in nonlinear problems[M]. Hauppauge, NY: Nova Science Publishers, Inc., 2004.

[16] Karapinar E, Kaymakcalan B, Tas K. On coupled fixed point theorems on partially ordered G–metric spaces[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2012, 2012(200): 1–13.

[17] Karapinar E, Roldan A, Martinez–Moreno J, Roldan C. Meir–Keeler type multidimensional fixed point theorems in partially ordered metric spaces[J]. Abstract and Applied Analysis, 2013, 2013: Article ID 406026.

[18] Karapinar E, Sintunavarat W, Kumam P. Coupled fixed point theorems in cone metric spaces with a c–distance and applications[J]. Fixed Point Theory and Applications, 2012, 2012(1): 194.

[19] Lakshmikantham V, Ciric L. Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces[J]. Nonlinear Analysis, 2009, 70(12): 4341–4349.

[20] 李斌, 薛西峰. Lipschitz 条件下混合单调算子对的不动点及其应用 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2012, 28(6): 803–808.

[21] 宋际平, 刘云. 锥 b– 度量空间上映射的公共不动点定理（英文）[J]. 数学杂志, 2015, 35(5): 1053–1067.

[22] Samet B. Coupled fixed point theorems for a generalized Meir–Keeler contraction in partially ordered metric spaces[J]. Nonlinear Analysis, 2012, 72(12): 4508–4517.

[23] Pacurar M, Rus I A. Fixed point theory for cyclic Φ –contractions[J]. Nonlinear Analysis, 2009, 72(3–4): 1181–1187.

[24] Kirk W, Shahzad N. Fixed point theory in distance spaces[M]. Springer International Publishing Switzerland: Springer, Cham, 2014.

A COUPLED FIXED POINT PROBLEM UNDER A FINITE NUMBER OF EQUALITY CONSTRAINTS IN b-METRIC SPACES

HE Dan-ni, HE Fei

(*School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China*)

Abstract: The coupled fixed point problem under a finite number of equality constraints in b-metric space is studied in this article. A class of nonlinear compressible coupled fixed point results under a finite number of equality constraints are obtained in b-metric space by the method of mathematical induction. Our results generalize the theorems from metric spaces to b-metric spaces. In particular, the contractive conditions in our results are independent of the contractive constant. As applications of our results, fixed point theorems under symmetric equality constraints, common coupled fixed point theorems and nonlinear contractive fixed point theorems in b-metric spaces are obtained. These results can deduce many existing results and even completely remove some conditions in some results.

Keywords: b-Metric space; Coupled fixed point; Equality constraints; Nonlinear contraction

2010 MR Subject Classification: 47H10; 54H25