Vol. 44 (2024)
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

空间形式中具有三个不同主曲率的极小 $Willmore$ 超曲面

陈瑞丰

(云南师范大学数学学院, 云南 昆明 650500)

摘 要: 本文研究了空间形式中关于 Willmore 超曲面. 从 2− 型旋转超曲面出发, 通过计算 2− 型旋转超曲面的第一基本形式和第二基本形式, 运用活动标架的方法, 获得了超曲面是极小 Willmore 超曲面的等价条件, 构造了空间形式中一类具有三个不同主曲率的极小 Willmore 旋转超曲面的新的例子.

关 键 词: Willmore 超曲面; Willmore 泛函; 旋转超曲面

MR(2010) **主题分类号**: 53C42; 53B25; 53A30 **中 图 分 类 号**: O186.12

文 献 标 识 码: A **文 章 编 号**: 0255-7797(2024)03-0157-08

1 引言

Willmore 超曲面的研究一直是微分几何的一个重要课题.

设 $x: M^n \hookrightarrow R^{n+1}$ 为 n 维黎曼流形 M^n 到 $n+1$ 维黎曼流形 N^{n+1} 的等距浸入超曲面,g_{ij} 是由浸入 x 诱导的黎曼度量,h_{ij} 是 M^n 的第二基本形式. 特征方程 $det(h_{ij}-\lambda g_{ij})=0$ 的根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 称为 M^n 在点 x 的主曲率,M^n 在点 x 的第 r 个平均曲率 σ_r 定义为:

$$\sigma_r=\frac{1}{C_n^r}\sum_{i_1<\cdots<i_r}\lambda_1\cdots\lambda_r, r=1,\cdots,n \tag{1.1}$$

其中 C_n^r 是二项式系数. 规定 $\sigma_0=1$.

1923 年 G.Thomsen 发现 R^3 中的紧定向曲面 M 的泛函 $W(M)=\int_M\sigma_1^2dM$ 是共形不变的 (W.Blaschke 也研究过这一问题).1965 年,T.J.Willmore 研究了上述泛函, 他提出了著名的 Willmore 猜想 [1]. 由于 Willmore 的巨大贡献, 后来称 W 为 Willmore 泛函, 称上述泛函的极值曲面为 Willmore 曲面. 对一般维数 n,1974 年 Chen. B.Y. 在文献 [2] 中证明了泛函：

$$W(M)=\int_M(\sigma_1^2-\sigma_2)^{\frac{n}{2}}dM$$

是共形不变的，也称为 Willmore 泛函.

后来, 郭震教授对 Willmore 问题做了进一步的研究, 在文献 [3] 中证明了: 若 M^n 为黎曼流形 N^{n+1} 中的等距浸入超曲面, 那么对任何整数 $r, 2\le r\le n$, 泛函:

*收稿日期: 2022-11-28 接收日期: 2023-02-06

基金项目: 国家自然科学基金资助 (12161092).

作者简介: 陈瑞丰 (1998–), 男, 河南洛阳, 研究生, 主要研究方向: 微分几何.

E-mail: gchenruifeng@163.com

$$\begin{cases} W_r(M)=\int_M Q_r^{\frac{n}{r}}dM, r<n\text{且 r 为奇数;} \\ W_r(M)=\int_M |Q_r|^{\frac{n}{r}}dM, r<n\text{且 r 为偶数;} \\ W_r(M)=\int_M Q_r dM, r=n \end{cases} \tag{1.2}$$

是 M^n 在 N^{n+1} 中的共形不变量. 其中 $Q_r=\sum_{k=0}^{r}(-1)^{k+1}C_r^k\sigma_1^{r-k}\sigma_k$. 并且称上述泛函 $W_r(M)$ 为广义 Willmore 型泛函. 郭震对 (1.1) 式在 Q_r 半定时的泛函 $W_r(M)$ 变分后，得到了该泛函极值的 Euler-Lagrange 方程 [3]. 特别的,$r=2$ 时, 便是 Pedit 和 Willmore[4] 的结果:

$$2(n-1)\Delta(\rho^{n-2}\sigma_1)-2T_{1ij}\rho^{n-2}_{,ij}+(n-1)\rho^{n-2}[2n(n-1)\sigma_1^3-n(3n-4)\sigma_1\sigma_2+n(n-2)\sigma_3]=0 \tag{1.3}$$

2008 年, 郭震和林丽妙在文献 [5] 中用旋转群轨道的观点解释了空间形式中的旋转子流形; 同年, 郭震教授在文献 [6] 中找到了 R^4 中三类 3 阶 Willmore 超曲面, 并且提出了一个重要猜想:4 维欧氏空间中的 3 阶 Willmore 超曲面必定共形等价于 S^3,P^3 或 T^3. 后来李建祥分别在文献 [7] 和 [8] 中找到了 R^{n+1} 中的 n 阶 Willmore 超曲面以及 R^5 中的 4 阶 Willmore 超曲面.

本文运用上述思想, 首先在第二部分给出空间形式中的 2- 型旋转超曲面的一些基本量; 第三部分是本文的主要结果, 在这部分构造了空间形式中具有三个不同主曲率的极小 Willmore 的旋转超曲面 (定理 3.5), 并用共形几何的观点说明本文构造的空间形式中的三类极小 Willmore 旋转超曲面是共形等价的 (推论 3.6).

2 空间形式中的 2- 型旋转超曲面

郭震和林丽妙在文献 [5] 中建立了由空间形式的子流形生成的旋转浸入的概念, 并给出了浸入的表达式。结果表明. 旋转子流形有多种类型, 它们取决于轮廓子流形的维数和空间形式等距群的子群的作用.

定义 2.1 [5] 令 $\Phi=(\phi^1,\cdots,\phi^p):M^k\to R^p$ 是一个等距浸入, 且 $\xi_i:S^{m_i}\to R^{m_i+1}$ 是标准嵌入, 这里 $m>p, m_i\geq 0$ 且 $\sum_i m_i=m-p$. 以下定义的映射 x 称为 Φ 生成的旋转浸入 R^m:

(i) 如果 $m_i>0$ 且 $\phi_i>0(1\leq i\leq p)$, 则

$$x=(\phi^1\xi_1,\cdots,\phi^p\xi_p):M^k\times S^{m_1}\times\cdots\times S^{m_p}\to R^m \tag{2.1}$$

(ii) 如果 $m_{r+1}=\cdots=m_p=0, m_\lambda>0$ 且 $\phi^\lambda>0(1\leq\lambda\leq r<p)$, 则

$$x=(\phi^1\xi_1,\cdots,\phi^r\xi_r,\phi^{r+1},\cdots,\phi^p):M^k\times S^{m_1}\times\cdots\times S^{m_r}\to R^m \tag{2.2}$$

基于定义 2.1, 郭震和林丽妙考虑了球空间中的旋转浸入.

定义 2.2[5] 在定义 2.1 中, 如果 $\sum_i(\phi_i^2)=1$, 则 $\Phi:M^k\to S^{p-1}$ 是等距浸入 (这里 $k<p-1$).

(i) 如果 $m_i > 0, \sum_i m_i = m - p$ 且 $\phi^i > 0 (1 \le i \le p)$, 则

$$x = (\phi^1 \xi_1, \cdots, \phi^p \xi_p) : M^k \times S^{m_1} \times \cdots \times S^{m_p} \to S^{m-1} \subset R^m; \tag{2.3}$$

(ii) 如果 $m_{r+1} = \cdots = m_p = 0, m_\lambda > 0, \sum_\lambda m_\lambda = m - p$ 且 $\phi^\lambda > 0 (1 \le \lambda \le r < p)$, 则

$$x = (\phi^1 \xi_1, \cdots, \phi^r \xi_r, \phi^{r+1}, \cdots, \phi^p) : M^k \times S^{m_1} \times \cdots \times S^{m_r} \to S^{m-1} \subset R^m \tag{2.4}$$

称为 Φ 生成的旋转浸入 S^{m-1} 的子流形.

注 2.3[5] 通过 (2.2)(或 (2.4)) 定义的旋转浸入称为通过 Φ 诱导的到 R^m(或 S^{m-1}) 的 $r-$ 型旋转浸入. 特别的, 我们将 (2.1)(或 (2.3)) 定义的浸入称为等距 Φ 生成的 $p-$ 型旋转浸入. 此外, 一个等距浸入 $\Phi : M^k \to H^p(-1)(p < m)$ 可以用同样的方式定义一个到 $H^p(-1)$ 的旋转浸入. 在这种情况下, 我们可以用 $Lorentz$ 群 $SO(1, m+1)$ 去描述旋转的几何意义.

下面我们在空间形式中去详细计算 2$-$ 型旋转超曲面的基本量.

定理 2.4 假设

(1) $\gamma = (f(s), g(s), h(s)) : I \to S^2$ 中一条光滑曲线, 其中 s 为曲线的弧长参数;ξ_1, ξ_2 是 S^k 和 S^l 在 R^{k+1} 和 R^{l+1} 中的位置向量, 则 $x(s, \xi_1, \xi_2) = (f\xi_1, g\xi_2, h) : R^1 \times S^k \times S^l \to s^{k+l+2}$ 的旋转超曲面.

(2) $\gamma = (h(s), f(s), g(s)) : I \to H^2$ 中一条光滑曲线, 其中 s 为曲线的弧长参数;ξ_1, ξ_2 是 S^k 和 S^l 在 R^{k+1} 和 R^{l+1} 中的位置向量, 则 $x(s, \xi_1, \xi_2) = (h, f\xi_1, g\xi_2) : R^1 \times S^k \times S^l \to H^{k+l+2}$ 的旋转超曲面.

(3) $\gamma = (f(s), g(s)) : I \to R^2$ 中一条光滑曲线, 其中 s 为曲线的弧长参数;ξ_1, ξ_2 是 S^k 和 S^l 在 R^{k+1} 和 R^{l+1} 中的位置向量, 则 $x(s, \xi_1, \xi_2) = (f\xi_1, g\xi_2) : R^1 \times S^k \times S^l \to R^{k+l+2}$ 是旋转超曲面.

则对 (1)(2) 有

$$I = ds^2 + f^2 \sum_i \theta_i \otimes \theta_i + g^2 \sum_\alpha \theta_\alpha \otimes \theta_\alpha, \tag{2.5}$$

$$II = \lambda ds^2 + \mu f^2 \sum_i \theta_i \otimes \theta_i + \varepsilon g^2 \sum_\alpha \theta_\alpha \otimes \theta_\alpha. \tag{2.6}$$

对 (3) 有

$$I = ds^2 + f^2 \sum_i \theta_i \otimes \theta_i + g^2 \sum_\alpha \theta_\alpha \otimes \theta_\alpha, \tag{2.7}$$

$$II = \tilde{\lambda} ds^2 + \tilde{\mu} f^2 \sum_i \theta_i \otimes \theta_i + \tilde{\varepsilon} g^2 \sum_\alpha \theta_\alpha \otimes \theta_\alpha. \tag{2.8}$$

其中 $\{\theta_i\}$和 $\{\theta_\alpha\}$分别是 S^k 和 S^l 的标准正交标架.

$$\lambda = \begin{vmatrix} f & g & h \\ \dot{f} & \dot{g} & \dot{h} \\ \ddot{f} & \ddot{g} & \ddot{h} \end{vmatrix}, \mu = \frac{\dot{g}h - g\dot{h}}{f}, \varepsilon = \frac{\dot{h}f - h\dot{f}}{g},$$

$$\tilde{\lambda} = \dot{f}\ddot{g} - \dot{g}\ddot{f}, \tilde{\mu} = \frac{\dot{g}}{f}, \tilde{\varepsilon} = -\frac{\dot{f}}{g}.$$

证 (1) 由于 $\gamma=(f(s),g(s),h(s)):I\to S^2$ 中一条光滑曲线, 所以 $f^2+g^2+h^2=1,\dot{f}^2+\dot{g}^2+\dot{h}^2=1$, 即 $|\dot{\gamma}|=1$

$$\begin{aligned}dx&=(\dot{f}ds\xi_1+fd\xi_1,\dot{g}ds\xi_2+gd\xi_2,\dot{h}ds),\\ I=<dx,dx>&=(\dot{f}^2+\dot{g}^2+\dot{h}^2)ds^2+f^2<d\xi_1,d\xi_1>+g^2<d\xi_2,d\xi_2>\\ &=ds^2+f^2\sum_i\theta_i\otimes\theta_i+g^2\sum_\alpha\theta_\alpha\otimes\theta_\alpha.\end{aligned}$$

取超曲面的单位法向量为 $\vec{n}=((g\dot{h}-\dot{g}h)\xi_1,(h\dot{f}-\dot{h}f)\xi_2,f\dot{g}-\dot{f}g)$

再由 $<\xi_j,\xi_j>=1,<d\xi_j,\xi_j>=0,1\le j\le 2$ 计算得到

$$II=-<dx,d\vec{n}>=\lambda ds^2+\mu f^2<d\xi_1,d\xi_1>+\varepsilon g^2<d\xi_2,d\xi_2>$$

其中 $\lambda=\begin{vmatrix}f&g&h\\ \dot{f}&\dot{g}&\dot{h}\\ \ddot{f}&\ddot{g}&\ddot{h}\end{vmatrix},\mu=\frac{\dot{g}h-g\dot{h}}{f},\varepsilon=\frac{\dot{h}f-h\dot{f}}{g}$.

(2) 取超曲面的单位法向量为 $\vec{n}=(-(f\dot{g}-\dot{f}g),(g\dot{h}-\dot{g}h)\xi_1,(h\dot{f}-\dot{h}f)\xi_2)$, 由 $f^2+g^2-h^2=-1,\dot{f}^2+\dot{g}^2-\dot{h}^2=1$, 仿 (1) 的过程即证.

(3) 取 $\vec{\eta}=(-\dot{g}\xi_1,\dot{f}\xi_2)$ 为超曲面的单位法向量. 用 $\dot{f}^2+\dot{g}^2=1$ 同样仿照 (1) 的过程即证.

如果我们令 $\omega_1=ds,\omega_i=f\theta_i,\omega_\alpha=g\theta_\alpha$, 可以看出 $\{\omega_1,\omega_i,\omega_\alpha,2\le i\le k+1,k+2\le\alpha\le n\}$构成了超曲面 x 的一组标准正交标架. 以后我们默认这些记号以及指标范围.

引理 2.5 对引理 2.4(1), (2) 的假设, 有

$$\lambda=\frac{\ddot{f}+cf}{\sqrt{1-cf^2-\dot{f}^2}}=-\frac{\ddot{g}+cg}{\sqrt{1-cg^2-\dot{g}^2}},\mu=-\frac{\sqrt{1-cf^2-\dot{f}^2}}{f},\varepsilon=\frac{\sqrt{1-cg^2-\dot{g}^2}}{g},$$

其中 c 是外部空间的曲率,c 取 1 或 -1.

证 $c=1$ 时, 做变换

$$\begin{cases}g=\sqrt{1-f^2}\cos\phi(s)\\ h=\sqrt{1-f^2}\sin\phi(s)\end{cases}. \tag{2.9}$$

代入 $\dot{f}^2+\dot{g}^2+\dot{h}^2=1$, 计算得到

$$\phi=\int_0^s\frac{\sqrt{1-f^2-\dot{f}^2}}{1-f^2}ds. \tag{2.10}$$

将 (2.9), (2.10) 式代入 λ 和 μ 的表达式, 有

$$\lambda=\frac{\ddot{f}+f}{\sqrt{1-f^2-\dot{f}^2}},\mu=-\frac{\sqrt{1-f^2-\dot{f}^2}}{f}.$$

同理, 做变换

$$\begin{cases}f=\sqrt{1-g^2}\cos\phi(s)\\ h=\sqrt{1-g^2}\sin\phi(s)\end{cases}. \tag{2.11}$$

解得

$$\lambda = -\frac{\ddot{g}+g}{\sqrt{1-g^2-\dot{g}^2}}, \varepsilon = \frac{\sqrt{1-g^2-\dot{g}^2}}{g}.$$

$c=-1$ 时, 做变换

$$\begin{cases} g = \sqrt{1+f^2}\cosh\phi(s) \\ h = \sqrt{1+f^2}\sinh\phi(s) \end{cases} \tag{2.12}$$

和

$$\begin{cases} f = \sqrt{1+g^2}\cosh\phi(s) \\ h = \sqrt{1+g^2}\sinh\phi(s) \end{cases}. \tag{2.13}$$

仿照上述过程过程, 即证.

3 空间形式中具有三个不同主曲率的极小 Willmore 超曲面的构造

引理 3.1 对定理 (2.4) 中的 (1)(2)(3), 有

$$\omega_{1i} = \frac{\dot{f}}{f}\omega_i, \omega_{i\alpha} = 0, \omega_{ij} = \theta_{ij}; \tag{3.1}$$

$$\omega_{1\alpha} = \frac{\dot{g}}{g}\omega_\alpha, \omega_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta}; \tag{3.2}$$

证 由于对定理 2.4 中的 (1)(2)(3) 来讲, 超曲面的第一基本形式是一样的, 故可以一起讨论.

$$\omega_1 = ds, \omega_i = f\theta_i, \omega_\alpha = g\theta_\alpha, \tag{3.3}$$

外微分 (3.3) 式, 结合 Cartan 结构方程即证.

引理 3.2 假若 $\psi(s)$ 是定义在 $R^1\times S^k\times S^l$ 上的光滑函数, 则有

$$\psi_{1,1} = \ddot{\psi}; \psi_{1,i} = \psi_{1,\alpha} = \psi_{i,\alpha} = 0,$$
$$\psi_{i,i} = \frac{\dot{f}\dot{\psi}}{f}; \psi_{\alpha,\alpha} = \frac{\dot{g}\dot{\psi}}{g}; \triangle\ \psi = \ddot{\psi} + k\frac{\dot{f}\dot{\psi}}{f} + l\frac{\dot{g}\dot{\psi}}{g}.$$

证 由

$$d\psi = \sum_A \psi_A\omega_A, \sum_A \psi_{B,A}\omega_A = d\psi_B + \sum_A \psi_A\omega_{AB}, \Delta\psi = \sum_A \psi_{A,A}, \tag{3.4}$$

结合引理 3.1 即证.

引理 3.3 (i)2− 型旋转超曲面 $x(s,\xi_1,\xi_2) = (f\xi_1, g\xi_2, h) : R^1\times S^k\times S^l \to N^{k+l+1}(c)$ 是极小 Willmore 超曲面, 如果满足 $k=l, f=g$; 其中 c 取 $+1$ 或 -1.

(ii)2− 型旋转超曲面 $x(s,\xi_1,\xi_2) = (f\xi_1, g\xi_2) : R^1\times S^k\times S^l \to R^{k+l+1}$ 是极小 Willmore 超曲面, 如果满足 $k=l, f=g$.

证 (i) 由定理 2.4 看到, 若 $f=g, k=l$, 则有 $\lambda=0, \mu=-\varepsilon$, 所以此时超曲面 x 是极小的. 将 $f=g, k=l, \lambda=0, \mu=-\varepsilon$ 代入 (1.1) 式有

$$\sigma_1=0, \sigma_2=-k^2\mu^2, \sigma_3=0 \tag{3.5}$$

所以 (1.3) 式的第一项和第三项都是 0, 利用引理 3.2 我们有

$$\begin{aligned}-\sum_{A,B} T_{1AB}(\rho^{n-2})_{A,B} &= (\lambda-nH)(\rho^{n-2})_{1,1}+\sum_i k(\mu-nH)(\rho^{n-2})_{i,i}+\sum_\alpha k(\varepsilon-nH)(\rho^{n-2})_{\alpha,\alpha}\\ &= k\mu\frac{\dot f}{f}\frac{d\rho^{n-2}}{ds}+k\varepsilon\frac{\dot g}{g}\frac{d\rho^{n-2}}{ds}=0,\end{aligned}$$

所以可看出,Willmore 方程 (1.3) 成立.

$(ii) f=g, k=l$ 时, 由定理 2.4 可看到,$\tilde\lambda=0, \tilde\mu=-\tilde\varepsilon$ 之后的过程重复 (i) 的证明即可.

推论 3.4 N^4 中具有三个不同主曲率的 2$-$ 型极小旋转超曲面的 Willmore 方程为

$$\begin{aligned}&\lambda[(\dot\lambda^2+\dot\mu^2+\dot\varepsilon^2+\lambda\ddot\lambda+\mu\ddot\mu+\varepsilon\ddot\varepsilon)-\frac{(\lambda\dot\lambda+\mu\dot\mu+\varepsilon\dot\varepsilon)^2}{\lambda^2+\mu^2+\varepsilon^2}]\\ &+(\mu\frac{\dot\mu}{\lambda-\mu}+\varepsilon\frac{\dot\varepsilon}{\lambda-\varepsilon})(\lambda\dot\lambda+\mu\dot\mu+\varepsilon\dot\varepsilon)+3(\lambda^2+\mu^2+\varepsilon^2)\lambda\mu\varepsilon=0,\end{aligned} \tag{3.6}$$

其中 $\lambda, \mu, \varepsilon$ 为超曲面的三个不同主曲率.

证 由于 $\lambda+\mu+\varepsilon=0$, 所以 $\lambda^2+\mu^2+\varepsilon^2=-2(\lambda\mu+\lambda\varepsilon+\mu\varepsilon)$, 于是得

$$\begin{aligned}\rho^2&=-\sigma_2=\frac{1}{6}(\lambda^2+\mu^2+\varepsilon^2),\\ \dot\rho&=\frac{1}{\sqrt6}\frac{\lambda\dot\lambda+\mu\dot\mu+\varepsilon\dot\varepsilon}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\varepsilon^2}}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

$n=3$ 时, 将上述所有关系及 $\sigma_1=0, \sigma_3=\lambda\mu\varepsilon$ 代入 Willmore 方程 (1.3) 有

$$\begin{aligned}&\lambda[(\dot\lambda^2+\dot\mu^2+\dot\varepsilon^2+\lambda\ddot\lambda+\mu\ddot\mu+\varepsilon\ddot\varepsilon)-\frac{(\lambda\dot\lambda+\mu\dot\mu+\varepsilon\dot\varepsilon)^2}{\lambda^2+\mu^2+\varepsilon^2}]\\ &+(\mu\frac{\dot f}{f}+\varepsilon\frac{\dot g}{g})(\lambda\dot\lambda+\mu\dot\mu+\varepsilon\dot\varepsilon)+3(\lambda^2+\mu^2+\varepsilon^2)\lambda\mu\varepsilon=0.\end{aligned} \tag{3.8}$$

无论 $N^4=S^4$(或 H^4, R^4), 直接计算 $\dot\mu$ 和 $\dot\varepsilon$ 可知

$$\begin{cases}\dot\mu &= \frac{\dot f}{f}(\lambda-\mu)\\ \dot\varepsilon &= \frac{\dot g}{g}(\lambda-\varepsilon)\end{cases}. \tag{3.9}$$

将 (3.9) 代入 (3.8) 即证.

定理 3.5 (1) 超曲面 $x(s,\xi_1,\xi_2)=(\frac{1}{\sqrt2}\cos(s)\xi_1, \frac{1}{\sqrt2}\cos(s)\xi_2, \sin(s)) \hookrightarrow S^{2+2k}$ 是极小 Willmore 的, 其中 $k\in N^*, s\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

(2) 超曲面 $x(s,\xi_1,\xi_2)=(\cosh(s), \frac{1}{\sqrt2}\sinh(s)\xi_1, \frac{1}{\sqrt2}\sinh(s)\xi_2) \hookrightarrow H^{2+2k}$ 是极小 Willmore 的, 其中 $k\in N^*, s\in(0,+\infty)$.

(3) 超曲面 $x(s,\xi_1,\xi_2)=(\frac{1}{\sqrt{2}}s\xi_1,\frac{1}{\sqrt{2}}s\xi_2)\hookrightarrow R^{1+2k}$ 是极小 Willmore 的, 其中 $k\in N^*, s\in(0,+\infty)$.

证 (1) 由引理 2.5, 令 $\lambda=\frac{\ddot{f}+f}{\sqrt{1-f^2-\dot{f}^2}}=0$, 解得一特解

$$f=a\cos(s).$$

令 $f=g$, 由引理 2.5 有

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}},h=\sin(s).$$

再由引理 2.5 计算得

$$\lambda=0,\mu=-\frac{1}{\cos(s)},\varepsilon=\frac{1}{\cos(s)}.$$

由引理 3.3, 定理证完.

(2) 由引理 2.5, 令 $\lambda=\frac{\ddot{f}-f}{\sqrt{1+f^2-\dot{f}^2}}=0$, 解得一特解

$$f=a\sinh(s).$$

令 $f=g$, 由引理 2.5 有

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}},h=\cosh(s).$$

再由引理 2.5 计算得

$$\lambda=0,\mu=-\frac{1}{\sinh(s)},\varepsilon=\frac{1}{\sinh(s)}.$$

由引理 3.3, 定理证完.

(3) 令 $f=g=\frac{1}{\sqrt{2}}s$, 此时 $\tilde{\lambda}=0,\tilde{\mu}=\frac{1}{s},\tilde{\varepsilon}=-\frac{1}{s}$.

由引理 3.3, 定理证完.

推论 3.6 定理 3.5 中的极小 Willmore 超曲面是共形等价的.

证 令 $\sigma(u)=(\frac{2u}{1+\|u\|^2},\frac{\|u\|^2-1}{\|u\|^2+1}):R^m\to S^{m+1},u\in R^m$, 令 $\tau(y_0,y_1)=(\frac{1}{y_0},\frac{y_1}{y_0}):H^m\to S^m,y_0\in R,y_1\in R^m$, 其中 $-y_0^2+<y_1,y_1>=-1$ 可以看到,σ 和 τ 是两个经典的球极投影, 我们知道这是两个共形变换.

$$\begin{aligned}\sigma(\frac{1}{\sqrt{2}}s(\xi_1,\xi_2))&=(\frac{2\frac{s}{\sqrt{2}}(\xi_1,\xi_2)}{1+s^2},\frac{s^2-1}{s^2+1})\\&=(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\theta)(\xi_1,\xi_2),-\cos(\theta))\\&=(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\varphi)(\xi_1,\xi_2),\sin(\varphi)),\end{aligned}$$

其中 $\tan(\frac{\theta}{2})=s,\theta=\varphi+\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}\tau(\cosh s,\sinh s(\xi_1,\xi_2))&=\tau(\sec\theta,\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\theta(\xi_1,\xi_2))\\&=(\cos\theta,\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\theta)(\xi_1,\xi_2))\\&=(\sin\varphi,\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi(\xi_1,\xi_2)),\end{aligned}$$

其中 $\cosh(s) = \sec\theta, \theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$. 综上, 定理得证.

参 考 文 献

[1] Willmore T J. Note on embedded surfaces[A]. Cezar Oniciuc. Annals of the "Alexandru Ioan Cuza" University of Iasi (New Series). Mathematics[C]. Romania: The Alexandru Ioan Cuza University Publishing House, 1965: 493–496.

[2] Chen B Y. An invariant of conformal mappings[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1973, 40(2): 563–564.

[3] Guo Zhen. Generalized Willmore functionals and related variational problems[J]. Differential Geometry and its Applications, 2007, 25(5): 543–551.

[4] Pedit F J, Willmore T J. Conformal geometry[J]. Atti. Sem. mat. Fis. Univ. Modena, 1988, 36(2): 237–245.

[5] Guo Zhen, Lin Limiao. Generalized rotation submanifolds in a space form[J]. Results in Mathematics, 2008, 52(3): 289–298.

[6] Guo Zhen. Higher order Willmore hypersurfaces in Euclidean space[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2009, 25(1): 77–84.

[7] 李建祥. 欧氏空间 R^{n+1} 中 n 阶 Willmore 超曲面 [D]. 云南: 云南师范大学, 2008.

[8] 李建祥. R^5 中的 4 阶 Willmore 旋转超曲面 [J]. 首都师范大学学报 (自然科学版),2016, 37(6): 5–9.

[9] 陈省身, 陈维桓. 微分几何讲义 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1983.

[10] Do Carmo M, Dajczer M. Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature[J]. Trans. Amer. Math. Soc, 2012, 277(2): 685–709.

[11] Hsiang W Y, Teng Z H, Yu W C. New examples of constant mean curvature immersions of (2k–1)–spheres into Euclidean 2k–space[J]. Annals of Mathematics, 1983, 117(3): 609–625.

THE MINIMAL WILLMORE HYPERSURFACES WITH THREE DIFFERENT PRINCIPAL CURVATURES IN THE SPACE FORM

CHEN Rui-feng

(*Department of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming 650500, China*)

Abstract: In this paper, we study the Willmore hypersurface in space form. Starting from the 2-type rotational hypersurface, by calculating the first fundamental form and the second fundamental form of the 2-type rotational hypersurface, using the method of moving frame, we obtain the equivalent condition that the hypersurface is a minimal Willmore hypersurface, and construct a new example of a minimal Willmore rotational hypersurface with three different principal curvatures in space form.

Keywords: Willmore hypersurface; Willmore functional; Rotation hypersurface

2010 MR Subject Classification: 53C42; 53B25; 53A30