Vol. 44 (2024)
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

弱 B 对称流形

黄志明, 甘丽宁, 卢卫君
(广西民族大学数学与物理学院, 广西 南宁 530006)

摘 要: 本文研究了一类特殊的对称流形 (弱 B 对称流形, 简记 $(WBS)_n$) 的几何性质问题. 利用 B 张量的对称性, 获得了 $(WBS)_n$ 是一个 2 阶爱因斯坦流形的充分条件并证明这个流形是拟爱因斯坦流形. 根据指标的轮换, 分别获得了 1- 形式 K 和 ω 是闭形式的充要条件, 继而考虑满足爱因斯坦度量条件的 $(WBS)_n$ $(n>2)$. 最后给出一个 $(WBS)_4$ 的例子.

关键词: 弱 B 对称流形; 2 阶爱因斯坦流形; 拟爱因斯坦流形; 1- 形式
MR(2010) **主题分类号**: 53C25; 53C35 **中图分类号**: O186.12
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2024)03-0141-16

1 引言

众所周知, 对称空间在微分几何研究当中扮演着重要的角色, 其中局部对称流形是常截面曲率流形的推广, 定义如下.

定义 1.1 一个 n 维黎曼流形 (M^n, g) 满足条件

$$\nabla R = 0, \tag{1.1}$$

则称 M 为局部对称流形 [1], 这里的 R 是黎曼曲率张量.

文献 [2] 给出了弱对称流形的概念如下.

定义 1.2 一个 n 维黎曼流形 (M^n, g) 的 $(0,4)$ 型黎曼曲率 R 满足条件

$$\nabla_i R_{jklm} = A_i R_{jklm} + D_j R_{iklm} + E_k R_{jilm} + G_l R_{jkim} + J_m R_{jkli}, \tag{1.2}$$

则称 M 为弱对称流形. A, D, E, G, J 都为非零的 1- 形式, 且这种流形可用符号 $(WS)_n$ 表示.

1993 年, Tamassy[3] 引入弱里奇对称流形的概念.

定义 1.3 如果一个 n 维黎曼流形 (M^n, g) 的里奇曲率满足

$$\nabla_k \mathrm{Ric}_{jl} = A_k \mathrm{Ric}_{jl} + D_j \mathrm{Ric}_{lk} + E_l \mathrm{Ric}_{kj}. \tag{1.3}$$

则称 M 为弱里奇对称流形, 简记为 $(WRS)_n$, 这里的 A, D, E 称为非零相关联的 1 形式. 如果 $A=D=E=0$, 那么这个流形称为里奇对称流形.

*收稿日期: 2022-10-28 接收日期: 2023-02-07
基金项目: 国家自然科学基金资助 (12061014); 广西自然科学基金项目资助 (2019GXNSFAA245043).
作者简介: 黄志明 (1996–), 男, 广东中山, 研究生, 主要研究方向: 现代微分几何.
通讯作者: 卢卫君 (1968–), 男, 广西南宁, 教授, 主要研究方向: 现代微分几何.

如果一个对称的 $(0,2)$ 型张量 Z 满足

$$Z_{ij}=\mathrm{Ric}_{ij}+\phi g_{ij}, \tag{1.4}$$

则称为广义 Z 张量, 这里的 ϕ 是任意的标量函数. 将 g^{ij} 作用 (1.4) 两边, 可以得到标量

$$Z=Z_{ij}g^{ij}=r+n\phi. \tag{1.5}$$

在 2012 年, Mantica 和 Molinari[4] 给出了广义 Z 张量的定义和 n 维弱 Z 对称流形的定义, 可简记为 $(WZS)_n$, 这种流形是弱里奇对称流形的推广. Mallick 和 De[5] 在 $N(k)$ 拟爱因斯坦流形中研究带有 Z 张量的曲率限制条件. De[6] 给出了弱 Z 对称时空的曲率特征. 更多关于广义 Z 张量的研究可查看文献 [7-12].

如果一个对称的 $(0,2)$ 型张量满足

$$B_{ij}=a\mathrm{Ric}_{ij}+brg_{ij}, \tag{1.6}$$

则称为 B 张量, 这里的 a 和 b 都为非零的标量函数, r 是标量曲率. B 张量是广义 Z 张量的推广形式.

在 2017 年, Suh 等学者引入伪 B 对称流形并给出了这种流形的几何性质.

定义 1.4 如果一个 n 维黎曼流形 (M^n,g) 中非零的 $(0,2)$ 型 B 张量满足条件

$$\nabla_k B_{ij}=2A_kB_{ij}+A_iB_{jk}+A_jB_{ki}, \tag{1.7}$$

则称 M 为伪 B 对称流形 [13], 这里的 A 是非零的 1- 形式. 伪 B 对称流形是伪 Z 对称流形 [14] 的推广. 将 g^{ij} 作用到 (1.6) 两边, 可以得到标量

$$B=(a+bn)r. \tag{1.8}$$

2021 年, Mantica 和 De 给出了弱 B 对称流形的定义.

定义 1.5 一个 n 维黎曼流形 (M^n,g) $(n>2)$ 中, $(0,2)$ 型 B 张量满足

$$\nabla_j B_{kl}=A_jB_{kl}+D_kB_{lj}+E_lB_{jk}, \tag{1.9}$$

则 M 称为弱 B 对称流形 [15], 简记为 $(WBS)_n$, 这里的 A, D, E 都为非零的 1- 形式. 根据弱 B 对称流形的定义, Singh 和 Khatri[16] 引入弱循环 B 对称流形, 并给出这种流形在物理中的应用.

如果一个 n 维黎曼流形 (M^n,g) 中非零的对称 $(0,2)$ 型里奇张量 Ric 满足条件

$$\nabla_k\mathrm{Ric}_{ij}+\nabla_i\mathrm{Ric}_{jk}+\nabla_j\mathrm{Ric}_{ki}=0, \tag{1.10}$$

则称里奇张量满足循环平行 [17]. 如果里奇张量 Ric 满足条件

$$\nabla_k\mathrm{Ric}_{ij}=\nabla_i\mathrm{Ric}_{kj}, \tag{1.11}$$

则称里奇张量满足 *Codazzi* 形式 [17].

受到文献 [15] 的启发, 本文对 $(WBS)_n$ 进行进一步的研究. 根据 B 张量的对称性, 通过指标轮换给出 $(WBS)_n$ 的基本性质, 并用分量的形式证明 $(WBS)_n$ 是一个拟爱因斯坦流形. 从 $(WBS)_n$ 的定义和 B 张量的表达式出发, 给出两个 1- 形式是闭的充要条件. 最后考虑满足 $Einstein$ 度量条件的 $(WBS)_n$ 的情形.

论文组织结构如下: 在第二节中, 根据 B 张量的对称性进行指标的轮换, 给出 $(WBS)_n$ 的曲率性质和 B 张量满足 $Codazzi$ 形式的充要条件, 继而证明张量 B 满足循环平行条件当且仅当相关联 1- 形式的和为零, 同时也证明满足条件 $(P\cdot B)_{ijlm}=0$ 的流形是一个射影里奇半对称流形. 接着给出满足条件 $B^2+fB=0$ 的黎曼流形是 2 阶爱因斯坦流形的证明过程. 在第三节中, 给出了 $(WBS)_n$ 在满足条件 $\eta\neq 0$ 下是拟爱因斯坦流形的证明过程, 也证明了共形平坦的 $(WBS)_n$ 是一个拟常曲率流形. 接着在第四节中, 在考虑 B 张量是非奇异的前提下, 给出了 1- 形式 K 和 ω 是闭形式的充要条件. 在第五节中, 我们考虑满足 $Einstein$ 度量条件的 $(WBS)_n$, 证明这是一个 B- 递归 ($recerrent$) 流形, 也是一个广义的里奇递归流形. 最后我们给出一个 $(WBS)_n$ 的例子.

2 $(WBS)_n$ 的基本性质

在这一章中, 我们给出 $(WBS)_n$ 的基本性质, 继而考虑 B 张量满足循环平行的情形以及 $(WBS)_n$ 满足条件 $(P\cdot B)_{ijlm}=0$.

首先交换 (1.9) 中的指标 k 和 l, 可得

$$\nabla_j B_{lk}=A_jB_{lk}+D_lB_{kj}+E_kB_{jl}. \tag{2.1}$$

从弱 B 对称流形的定义及 B 张量的对称性结合 (1.9) 和 (2.1), 可以得到

$$\eta_kB_{jl}=\eta_lB_{jk}, \tag{2.2}$$

这里的 $\eta_k=D_k-E_k$. 根据式 (1.9), 有

$$\nabla_kB_{jl}-\nabla_jB_{kl}=\omega_kB_{jl}-\omega_jB_{kl}, \tag{2.3}$$

这里的 $\omega_k=A_k-D_k$.

命题 2.1 在 $(WBS)_n$ 中, 如果 B 张量是非奇异的, 那么 $\eta_k=0$.

证 B 张量是非奇异的, 即存在一个 $(2,0)$ 型 B^{-1} 张量使得 $(B^{-1})^{kh}B_{kl}=\delta_l^k$. 将 $(B^{-1})^{jh}$ 作用到 (2.2) 两边, 可得

$$\eta_k\delta_l^h=\eta_l\delta_k^h. \tag{2.4}$$

在 (2.4) 中, 令 $h=l$ 并求和, 有

$$(n-2)\eta_k=0,$$

由于 $n>2$, 所以 $\eta_k=0$.

命题 2.2 如果 $(WBS)_n$ 中的非奇异的 B 张量满足 $Codazzi$ 形式, 当且仅当 1- 形式 $A=D=E$.

证 根据命题 2.1, 由 B 张量是非奇异的, 可以得到 1 形式 $D=E$. B 张量是满足 $Codazzi$ 形式的, 即满足条件 $\nabla_kB_{ij}=\nabla_iB_{kj}$ 和 $\nabla_kB_{ij}=\nabla_jB_{ik}$.

首先考虑第一种情况: 条件 $\nabla_k B_{ij} = \nabla_i B_{kj}$ 成立, 那么由 (2.3), 有

$$\omega_k B_{ij} = \omega_i B_{kl}. \tag{2.5}$$

将 $(B^{-1})^{jh}$ 作用到 (2.5) 两边, 得

$$\omega_k \delta_i^h = \omega_i \delta_k^h. \tag{2.6}$$

令 $h = i$ 并求和 $(n-1)\omega_k = 0$, 即 $A_k = D_k$. 最后可以得到 $A = D = E$.

反之, $A = D = E$ 成立. 根据 (1.9), B 张量显然满足 $Codazzi$ 形式.

第二种情况: 条件 $\nabla_k B_{ij} = \nabla_j B_{ik}$ 成立, 那么由 (1.9), 有 $A_k B_{ij} + D_i B_{jk} + E_j B_{ki} = A_j B_{ik} + D_i B_{kj} + E_k B_{ji}$, 即

$$(A_k - E_k) B_{ij} = (A_j - E_j) B_{ik}. \tag{2.7}$$

将 $(B^{-1})^{ih}$ 作用到 (2.5) 两边, 得

$$(A_k - E_k)\delta_j^h = (A_j - E_j)\delta_k^h. \tag{2.8}$$

令 $h = j$ 并求和 $(n-1)(A_k - E_k) = 0$, 可以得到 $A_k = E_k$, 即 $A = D = E$.

反之是显然的.

2.1 B 张量满足循环平行

$Walier's$ **引理** [18] 如果 a_{ij}, b_k 满足

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad a_{ij} b_k + a_{jk} b_i + a_{ki} b_j = 0, \tag{2.9}$$

$i, j, k = 1, 2, \cdots, n$, 那么所有的 $a_{ij} = 0$ 或者所有的 $b_k = 0$.

根据 (1.10), 类似地给出 B 张量满足循环平行的定义.

定义 2.3 如果 n 维黎曼流形 (M^n, g) 非零的对称 (0,2) 型 B 张量满足条件

$$\nabla_k B_{ij} + \nabla_i B_{jk} + \nabla_j B_{ki} = 0, \tag{2.10}$$

则称 B 张量满足循环平行的.

命题 2.4 在 $(WBS)_n$ 中, 如果里奇曲率张量满足循环平行, 且 a, b, r 是常值, 那么 B 张量满足循环平行.

证 如果里奇曲率张量满足循环平行, 即满足等式 (1.10). 根据 (1.6), 有

$$\nabla_k B_{ij} = \nabla_k a \mathrm{Ric}_{ij} + a \nabla_k \mathrm{Ric}_{ij} + \nabla_k (br) g_{ij}. \tag{2.11}$$

对 (2.11) 轮换 k, i, j 三个指标, 并将三式相加, 可以得到

$$\begin{aligned} \nabla_k B_{ij} + \nabla_i B_{jk} + \nabla_j B_{ki} =& \nabla_k a \mathrm{Ric}_{ij} + \nabla_i a \mathrm{Ric}_{jk} + \nabla_j a \mathrm{Ric}_{ki} \\ &+ a(\nabla_k \mathrm{Ric}_{ij} + \nabla_i \mathrm{Ric}_{jk} + \nabla_j \mathrm{Ric}_{ki}) \\ &+ (g_{ij}\nabla_k + g_{jk}\nabla_i + g_{ki}\nabla_j)(br). \end{aligned} \tag{2.12}$$

结合 (1.10), (2.12) 变为

$$\begin{aligned}\nabla_k B_{ij}+\nabla_i B_{jk}+\nabla_j B_{ki}=&\nabla_k a\mathrm{Ric}_{ij}+\nabla_i a\mathrm{Ric}_{jk}+\nabla_j a\mathrm{Ric}_{ki}\\&+(g_{ij}\nabla_k+g_{jk}\nabla_i+g_{ki}\nabla_j)(br).\end{aligned}\tag{2.13}$$

如果 a, b, r 是常值函数, 由 (2.13) 可得 $\nabla_k B_{ij}+\nabla_i B_{jk}+\nabla_j B_{ki}=0$, 即 B 张量满足循环平行.

命题 2.5 在 $(WBS)_n$ 中, B 张量满足循环平行, 当且仅当相关联 1- 形式的和为零.

证 根据 (1.9), 进行指标轮换可得

$$\nabla_k B_{lj}=A_k B_{lj}+D_l B_{jk}+E_j B_{kl},\tag{2.14}$$

$$\nabla_l B_{jk}=A_l B_{jk}+D_j B_{kl}+E_k B_{lj}.\tag{2.15}$$

结合 (1.9), (2.14), (2.15), 三式相加, 可得

$$\nabla_j B_{kl}+\nabla_k B_{lj}+\nabla_l B_{jk}=H_j B_{kl}+H_k B_{lj}+H_l B_{jk},\tag{2.16}$$

这里的 $H_j=A_j+D_j+E_j$. 如果满足 B 张量循环平行, 即满足 (2.10). 那么根据 (2.10) 和 (2.16), 有

$$H_j B_{kl}+H_k B_{lj}+H_l B_{jk}=0.\tag{2.17}$$

根据 $walke's$ 引理, 可以得到 $H_j=0$ 或者 $B_{kl}=0$. 但因为 B 是非零的, 所以 $H_j=0$, 即

$$A_j+D_j+E_j=0.\tag{2.18}$$

反之, 将 (2.18) 代入 (2.16), 结果是显然的.

推论 2.6 在 $(WBS)_n$ 中, 如果里奇曲率张量满足循环平行, 且 a, b, r 是常值, 那么相关联 1- 形式的和为零.

2.2 射影里奇半对称

定义 2.7 一个 n 维黎曼流形 (M^n,g) 如果满足 $R\cdot\mathrm{Ric}=0$, 即

$$(R(X,Y)\mathrm{Ric})(U,V)=0,\tag{2.19}$$

则称 M 为里奇半对称流形.

(2.19) 的局部形式可表示为 $(R\cdot\mathrm{Ric})_{ijlm}=0$, 这里的 $(R\cdot\mathrm{Ric})_{ijlm}=\mathrm{Ric}_{rj}R^r_{ilm}+\mathrm{Ric}_{ri}R^r_{jlm}$. Ric_{ij} 和 R^l_{ijk} 分别是 $(0,2)$ 型里奇曲率 Ricci 和 $(1,3)$ 型黎曼曲率 R 的局部形式. 射影曲率张量 [19] 的局部形式为

$$P_{rilm}=R_{rilm}-\frac{1}{n-1}[\mathrm{Ric}_{il}g_{rm}-\mathrm{Ric}_{rl}g_{im}],\tag{2.20}$$

这里的 $P_{rilm}=g_{rk}P^k_{ilm}$. 根据 (2.20) 可知射影曲率张量满足

$$P_{rilm}=-P_{irlm}.\tag{2.21}$$

接下来考虑 (M^n,g) 满足条件

$$(P\cdot B)_{ijlm}=0. \tag{2.22}$$

即射影 B 半对称.

定理 2.8 黎曼流形 (M^n,g) 满足条件 $(P\cdot B)_{ijlm}=0$ 当且仅当这个流形是射影里奇半对称流形.

证 根据 $(P\cdot B)_{ijlm}=B_{rj}P^r_{ilm}+B_{ri}P^r_{jlm}$, 由 (2.22) 可得

$$B_{rj}P^r_{ilm}+B_{ri}P^r_{jlm}=0. \tag{2.23}$$

再由 (1.6), 有

$$a(\mathrm{Ric}_{rj}P^r_{ilm}+\mathrm{Ric}_{ri}P^r_{jlm})+br(g_{rj}P^r_{ilm}+g_{ri}P^r_{jlm})=0. \tag{2.24}$$

结合 (2.21), 有

$$a(\mathrm{Ric}_{rj}P^r_{ilm}+\mathrm{Ric}_{ri}P^r_{jlm})=0. \tag{2.25}$$

由于 a 是非零的, 所以

$$\mathrm{Ric}_{rj}P^r_{ilm}+\mathrm{Ric}_{ri}P^r_{jlm}=0, \tag{2.26}$$

即 $(P\cdot \mathrm{Ric})_{ijlm}=0$. 所以满足条件 $(P\cdot B)_{ijlm}=0$ 的弱 B 对称流形是射影里奇半对称流形.

反之, 如果 (2.26) 成立, 根据 (2.23), (2.21) 可以得到 (2.22) 成立. 里奇半对称流形满足条件 $(P\cdot B)_{ijlm}=0$.

2.3 2 阶爱因斯坦流形

定义 2.9 一个 n 维非平坦黎曼流形 (M^n,g), $n>2$, 如果满足条件

$$\mathrm{Ric}^2(X,Y)+\alpha\mathrm{Ric}(X,Y)+\beta g(X,Y)=0, \tag{2.27}$$

则 M 称为 2 阶的爱因斯坦流形 [20], 简记 $Ein(2)$, α 和 β 为非零的标量函数.

令 Q 是在切空间每一点处对应于里奇曲率 Ric 的对称自同态, L 是对应于 B 张量的对称自同态, 即满足

$$\mathrm{Ric}(X,Y)=g(QX,Y),B(X,Y)=g(LX,Y). \tag{2.28}$$

令 d^2 为里奇曲率张量长度的平方, t^2 为 B 张量长度的平方, 即

$$d^2=\mathrm{Ric}(Qe_i,e_i),t^2=B(Le_i,e_i), \tag{2.29}$$

这里的 $\{e_i\}$, $(i=1,2,\cdots,n)$ 是每一点处切空间的正交基底.

命题 2.10 在 n 维黎曼流形 (M^n,g) 中, t^2 为 B 张量长度的平方, 那么 $ab<\frac{t^2}{2r^2}$.

证 根据 (1.6) 和 (2.28), 有

$$B(Le_i,e_i)=a^2\mathrm{Ric}(Qe_i,e_i)+2abr\mathrm{Ric}(e_i,e_i)+b^2r^2g(e_i,e_i). \tag{2.30}$$

结合 (2.29), (2.30) 变为

$$t^2=a^2d^2+2abr^2+b^2r^2n. \tag{2.31}$$

即

$$t^2 > 2abr^2. \tag{2.32}$$

所以 $ab < \frac{t^2}{2r^2}$.

定理 2.11 在 n 维黎曼流形 (M^n, g) 中, 如果 B 张量满足 $B^2 + fB = 0$, f 是非零的标量函数, 那么 M 是 2 阶的爱因斯坦流形.

证 根据 (2.28), 可以得到

$$LX = aQX + brX. \tag{2.33}$$

利用 $B^2(X,Y) = B(LX,Y)$, 进一步可以得到

$$B^2_{ij} = a^2\mathrm{Ric}_{ij} + 2abr\mathrm{Ric}_{ij} + b^2r^2g_{ij}. \tag{2.34}$$

假设 B 张量满足

$$B^2 + fB = 0, \tag{2.35}$$

这里的 f 是非零的标量函数. 那么由 (2.35) 可以得到

$$a^2\mathrm{Ric}^2_{ij} + (2abr + fa)\mathrm{Ric}_{ij} + (b^2r^2 + fbr)g_{ij} = 0. \tag{2.36}$$

由于 a 是非零的, 所以

$$\mathrm{Ric}^2 + \lambda_1\mathrm{Ric} + \lambda_2 g = 0, \tag{2.37}$$

这里的 $\lambda_1 = \frac{2br+f}{a}$, $\lambda_2 = \frac{b^2r^2+fbr}{a^2}$.

3 拟爱因斯坦流形的充分条件

定义 3.1 (M^n, g) $(n > 2)$ 是一个非平坦的 n 维黎曼流形, 如果非零的 $(0,2)$ 型里奇曲率张量 Ric 满足以下条件

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \alpha g(X,Y) + \beta\eta(X)\eta(Y), \tag{3.1}$$

η 是非零的 1- 形式且对任意 X 满足

$$\eta(X) = g(X,\xi), \tag{3.2}$$

则称 M 为拟爱因斯坦流形 [21], 简记为 $(QE)_n$. 这里的 ξ 是单位向量场, α 和 β 是非零的标量函数.

共形平坦的黎曼流形 (M^n, g), 如果 $(0,4)$ 型的曲率张量 R 满足条件

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,W) =& p[g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)] \\ &+ q[g(X,W)H(Y)H(Z) + g(Y,Z)H(X)H(W) \\ &- g(X,Z)H(Y)H(W) - g(Y,W)H(X)H(Z)], \end{aligned} \tag{3.3}$$

则称 M 为拟常曲率流形 [22]. 这里 $R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W)$, p 和 q 是标量函数且 $q \neq 0$. H 是非零的 1- 形式满足 $H(X) = g(X,\xi_1)$, 这里 ξ_1 是单位向量场. p 和 q 称为相关联

的标量, H_i 称为相关联的 1- 形式, ξ 称为流形的生成元. 在 1956 年, Chern[23] 研究一种黎曼流形, 它的 $(0,4)$ 型黎曼曲率张量 R 满足

$$R(X,Y,Z,W)=I(Y,Z)I(X,W)-I(X,Z)I(Y,W), \tag{3.4}$$

这里的 I 是对称的 $(0,2)$ 型张量. 这种流形称为带有关联对称张量 I 的特殊流形, 简记为 $\psi(I)_n$.

命题 3.2 满足 $\eta_k\neq 0$ 的 $(WBS)_n$ 是 $(QE)_n$.

证 将 η^l 作用到 (2.2) 两边, 有

$$\eta^l\eta_k B_{jl}=\eta^l\eta_l B_{jk}. \tag{3.5}$$

类似地, 将 g^{jk} 作用到 (2.2) 两边, 可以得到

$$\eta^j B_{jl}=\eta_l B, \tag{3.6}$$

这里的 $B=B_{jk}g^{jk}$. 结合 (3.5) 和 (3.6), 有

$$B_{jk}=B\frac{\eta j\eta k}{\eta^l\eta_l}. \tag{3.7}$$

根据式 (1.6), (3.7), 有

$$\mathrm{Ric}_{jk}=\alpha g_{jk}+\beta T_jT_k, \tag{3.8}$$

这里的 $\alpha=-\frac{br}{a}$, $\beta=\frac{B}{a}$, $T_j=\frac{\eta j}{\|\eta\|}$ 是一个非零的 1- 形式. 存在单位向量场 ρ, 使得 $g(X,\rho)=T(X)$. 这个流形是一个拟爱因斯坦流形.

定理 3.3 满足 $\eta_k\neq 0$ 的共性平坦 $(WBS)_n$ $(n>3)$ 是拟常曲率流形.

证 共性平坦的 n 维黎曼流形中, $(0,4)$ 型的黎曼曲率满足

$$\begin{aligned}R_{ijkl}=&\frac{1}{n-2}[\mathrm{Ric}_{jk}g_{il}-\mathrm{Ric}_{ik}g_{jl}+\mathrm{Ric}_{il}g_{jk}-\mathrm{Ric}_{jl}g_{ik}]\\&-\frac{r}{(n-1)(n-2)}[g_{jk}g_{il}-g_{ik}g_{jl}],\end{aligned} \tag{3.9}$$

这里的 $R_{ijkl}=g_{im}R^m_{jkl}$, r 是标量曲率. 将 (3.8) 代入 (3.9), 可以得到

$$R_{ijkl}=p[g_{jk}g_{jl}-g_{ik}g_{jl}]+q[g_{il}T_jT_k-g_{jl}T_iT_k+g_{jk}T_iT_l-g_{ik}T_jT_l], \tag{3.10}$$

定理 3.4 一个共形平坦 $(WBS)_n$ $(n>3)$ 是一个 $\psi(I)_n$ 特殊流形.

证 假设

$$I_{ij}=\sqrt{p}g_{ij}+\frac{q}{\sqrt{p}}T_iT_j, \tag{3.11}$$

这里的 T_i 是非零的 1- 形式. 显然 I_{ij} 满足 $I_{ij}=I_{ji}$. I 是一个对称的 $(0,2)$ 型张量. 那么根据 (3.9), 有

$$R_{ijkl}=I_{jk}I_{il}-I_{ik}I_{jl}.$$

4 K 和 ω 是闭形式的充要条件

在这一章, 我们给出了 K 和 ω 两个 1- 形式是闭形式的充要条件, 这里的 $K_i = nA_i + D_i + E_i$, $\omega_i = A_i - D_i$.

4.1 K 是闭形式

命题 4.1 在 $(WBS)_n$ 中, B 张量是非奇异的. 那么 K 是闭形式, 当且仅当

$$\nabla_s \nabla_k B_{ij} - \nabla_k \nabla_s B_{ij} = 0.$$

证 由 (1.9), 有

$$\nabla_k B_{ij} = A_k B_{ij} + D_i B_{jk} + E_j B_{ki}. \tag{4.1}$$

对 (4.1) 两边协变微分, 可以得到

$$\begin{aligned}\nabla_s \nabla_k B_{ij} =& \nabla_s A_k B_{ij} + A_k(A_s B_{ij} + D_i B_{js} + E_j B_{si}) \\ &+ \nabla_s D_i B_{kj} + D_i(A_s B_{kj} + D_k B_{js} + E_j B_{sk}) \\ &+ \nabla_s E_j B_{ik} + E_j(A_s B_{ik} + D_i B_{ks} + E_k B_{si}).\end{aligned} \tag{4.2}$$

交换 (4.2) 中的指标 s, k 并两式相减, 得到

$$\begin{aligned}\nabla_s \nabla_k B_{ij} - \nabla_k \nabla_s B_{ij} =& (\nabla_s A_k - \nabla_k A_s) B_{ij} + (\nabla_s D_i - D_i D_s) B_{kj} \\ &+ (\nabla_s E_j - E_s E_j) B_{ik} - (\nabla_k D_i - D_i D_k) B_{sj} \\ &- (\nabla_k E_j - E_j E_k) B_{is}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

如果上式等号左边为零, 根据 B 张量是非奇异的, 将 $(B^{-1})^{ij}$ 作用到 (4.3) 两边, 可以得到

$$\begin{aligned}0 =& (\nabla_s A_k - \nabla_k A_s)\delta_j^j + (\nabla_s D_i - D_i D_s)\delta_k^i \\ &+ (\nabla_s E_j - E_s E_j)\delta_k^j - (\nabla_k D_i - D_i D_k)\delta_s^i - (\nabla_k E_j - E_j E_k)\delta_s^j,\end{aligned} \tag{4.4}$$

对 (4.4) 指标求和, 有

$$n(\nabla_s A_k - \nabla_k A_s) + (\nabla_s D_k - \nabla_k D_s) + (\nabla_s E_k - \nabla_k E_s) = 0. \tag{4.5}$$

令 $K_k = nA_k + D_k + E_k$, 那么 (4.5) 可以表示为

$$\nabla_s K_k - \nabla_k K_s = 0, \tag{4.6}$$

即 K 是闭的 1- 形式.

反之, 将 $(B^{-1})^{ij}$ 作用到 (4.3) 两边并结合 K 是闭的 1- 形式, 那么可以得到

$$(\nabla_s \nabla_k B_{ij} - \nabla_k \nabla_s B_{ij})(B^{-1})^{ij} = 0.$$

由于 B 张量是非奇异的, $(B^{-1})^{ij} \neq 0$, 即 $\nabla_s \nabla_k B_{ij} - \nabla_k \nabla_s B_{ij} = 0$.

4.1 ω 是闭形式

Lovelock's **微分恒等式** [24] 在一个 n 维黎曼流形 (M^n,g) 中, 以下等式是成立的

$$\nabla_i\nabla_m R^m_{jkl}+\nabla_j\nabla_m R^m_{kil}+\nabla_k\nabla_m R^m_{ijl}=-\mathrm{Ric}_{im}R^m_{jkl}-\mathrm{Ric}_{jm}R^m_{kil}-\mathrm{Ric}_{km}R^m_{ijl}. \tag{4.7}$$

定理 4.2 在 $(WBS)_n$ 中, 如果 B 张量是非奇异的, 那么 ω_k 是闭的 1- 形式当且仅当

$$\mathrm{Ric}_{im}R^m_{jkl}+\mathrm{Ric}_{jm}R^m_{kil}+\mathrm{Ric}_{km}R^m_{ijl}=0. \tag{4.8}$$

证 根据 *Bianchi* 第二恒等式, 有

$$\nabla_m R^m_{jkl}=\nabla_k\mathrm{Ric}_{jl}-\nabla_j\mathrm{Ric}_{kl}. \tag{4.9}$$

结合 (2.11) 和 (4.9), 有

$$a\nabla_m R^m_{jkl}=\nabla_k B_{jl}-\nabla_j B_{kl}+\nabla_j(br)g_{kl}-\nabla_k(br)g_{jl}+\nabla_j a\mathrm{Ric}_{kl}-\nabla_k a\mathrm{Ric}_{jl}. \tag{4.10}$$

根据 (2.3), 那么 (4.10) 可以表示为

$$a\nabla_m R^m_{jkl}=\omega_k B_{jl}-\omega_j B_{kl}+\nabla_j(br)g_{kl}-\nabla_k(br)g_{jl}+\nabla_j a\mathrm{Ric}_{kl}-\nabla_k a\mathrm{Ric}_{jl}. \tag{4.11}$$

对 (4.11) 两边协变微分

$$\begin{aligned}\nabla_i a\nabla_m R^m_{jkl}+a\nabla_i\nabla_m R^m_{jkl}=&\nabla_i\omega_k B_{jl}+\omega_k\nabla_i B_{jl}-\nabla_i\omega_j B_{kl}-\omega_j\nabla_i B_{kl}\\&+\nabla_i\nabla_j(br)g_{kl}-\nabla_i\nabla_k(br)g_{jl}+\nabla_i\nabla_j a\mathrm{Ric}_{kl}\\&+\nabla_j a\nabla_i\mathrm{Ric}_{kl}-\nabla_i\nabla_k a\mathrm{Ric}_{jl}-\nabla_k a\nabla_i\mathrm{Ric}_{jl}.\end{aligned} \tag{4.12}$$

根据 (4.12), 对指标 i, j, k 进行轮换, 可得

$$\begin{aligned}\nabla_k a\nabla_m R^m_{ijl}+a\nabla_k\nabla_m R^m_{ijl}=&\nabla_k\omega_j B_{il}+\omega_j\nabla_k B_{il}-\nabla_k\omega_i B_{jl}-\omega_i\nabla_k B_{jl}\\&+\nabla_k\nabla_i(br)g_{jl}-\nabla_k\nabla_j(br)g_{il}+\nabla_k\nabla_i a\mathrm{Ric}_{jl}\\&+\nabla_i a\nabla_k\mathrm{Ric}_{jl}-\nabla_k\nabla_j a\mathrm{Ric}_{il}-\nabla_j a\nabla_k\mathrm{Ric}_{il},\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}\nabla_j a\nabla_m R^m_{kil}+a\nabla_j\nabla_m R^m_{kil}=&\nabla_j\omega_i B_{kl}+\omega_i\nabla_j B_{kl}-\nabla_j\omega_k B_{il}-\omega_k\nabla_j B_{il}\\&+\nabla_j\nabla_k(br)g_{il}-\nabla_j\nabla_i(br)g_{kl}+\nabla_j\nabla_k a\mathrm{Ric}_{il}\\&+\nabla_k a\nabla_j\mathrm{Ric}_{il}-\nabla_j\nabla_i a\mathrm{Ric}_{kl}-\nabla_i a\nabla_j\mathrm{Ric}_{kl}.\end{aligned} \tag{4.14}$$

由 (4.12), (4.13), (4.14) 三式相加, 有

$$\begin{aligned}&\nabla_i a\nabla_m R^m_{jkl}+\nabla_k a\nabla_m R^m_{ijl}+\nabla_j a\nabla_m R^m_{kil}+a[\nabla_i\nabla_m R^m_{jkl}+\nabla_k\nabla_m R^m_{ijl}+\nabla_j\nabla_m R^m_{kil}]\\=&(\nabla_i\omega_k-\nabla_k\omega_i)B_{jl}+(\nabla_j\omega_i-\nabla_i\omega_j)B_{kl}+(\nabla_k\omega_j-\nabla_j\omega_k)B_{il}\\&+\nabla_i a(\nabla_k\mathrm{Ric}_{jl}-\nabla_j\mathrm{Ric}_{kl})+\nabla_k a(\nabla_j\mathrm{Ric}_{il}-\nabla_i\mathrm{Ric}_{jl})+\nabla_j a(\nabla_i\mathrm{Ric}_{kl}-\nabla_k\mathrm{Ric}_{il}).\end{aligned} \tag{4.15}$$

又根据 (4.9), 那么 (4.15) 变为

$$\begin{aligned}&a[\nabla_i\nabla_m R^m_{jkl}+\nabla_k\nabla_m R^m_{ijl}+\nabla_j\nabla_m R^m_{kil}]\\=&(\nabla_i\omega_k-\nabla_k\omega_i)B_{jl}+(\nabla_j\omega_i-\nabla_i\omega_j)B_{kl}+(\nabla_k\omega_j-\nabla_j\omega_k)B_{il}.\end{aligned} \tag{4.16}$$

结合 $Lovelock's$ 微分恒等式,

$$\begin{aligned}&a(-\mathrm{Ric}_{im}R^m_{jkl}-\mathrm{Ric}_{jm}R^m_{kil}-\mathrm{Ric}_{km}R^m_{ijl})\\=&(\nabla_i\omega_k-\nabla_k\omega_i)B_{jl}+(\nabla_j\omega_i-\nabla_i\omega_j)B_{kl}+(\nabla_k\omega_j-\nabla_j\omega_k)B_{il}.\end{aligned}\tag{4.17}$$

如果 ω_k 是闭的 1- 形式, 则满足等式 (4.8).

反之, 假设等式 (4.8) 成立, 那么 (4.17) 变为

$$(\nabla_i\omega_k-\nabla_k\omega_i)B_{jl}+(\nabla_j\omega_i-\nabla_i\omega_j)B_{kl}+(\nabla_k\omega_j-\nabla_j\omega_k)B_{il}=0.\tag{4.18}$$

如果 B 张量是非奇异的, 即存在一个 $(2,0)$ 型 $(B^{-1})^{km}$ 张量, 使得 $(B^{-1})^{km}B_{kl}=\delta^m_l$. 将 $(B^{-1})^{hl}$ 作用到 (4.18) 两边,

$$(\nabla_i\omega_k-\nabla_k\omega_i)\delta^h_j+(\nabla_j\omega_i-\nabla_i\omega_j)\delta^k_h+(\nabla_k\omega_j-\nabla_j\omega_k)\delta^i_h=0.\tag{4.19}$$

令 $h=j$ 并求和, 得到

$$(n-2)(\nabla_i\omega_k-\nabla_k\omega_i)=0.\tag{4.20}$$

由于 $n>2$, 所以 $\nabla_i\omega_k-\nabla_k\omega_i=0$, 即 ω_k 是闭形式.

如果存在一个非零单位向量场 ρ, 对任意的向量场 X 满足 $g(X,\rho)=\omega(X)$. 假设 ω 是闭形式, 那么就有 $d\omega(X,Y)=0$, i.e.,

$$(\nabla_X\omega)(Y)-(\nabla_Y\omega)(X)=0.\tag{4.21}$$

(4.21) 可进一步变为

$$g(Y,\nabla_X\rho)=g(X,\nabla_Y\rho).\tag{4.22}$$

令 $Y=\rho$ 代入 (4.22), 有

$$g(\nabla_X\rho,\rho)=g(\nabla_\rho\rho,X).\tag{4.23}$$

由于 $g(\nabla_X\rho,\rho)=0$, 所以

$$g(\nabla_\rho\rho,X)=0.$$

由 X 的任意性, 得到 $\nabla_\rho\rho=0$, 即向量场 ρ 的积分曲线是测地线.

推论 4.3 在 $(WBS)_n$ 中, 如果 B 张量是非奇异的且存在一个非零单位向量场 ρ, 使得对任意的向量场 X 满足 $g(X,\rho)=\omega(X)$, 那么向量场 ρ 的积分曲线是测地线当且仅当

$$\mathrm{Ric}(X,R(Y,Z)W)+\mathrm{Ric}(Y,R(Z,X)W)+\mathrm{Ric}(Z,R(X,Y)W)=0.$$

5 $(WBS)_n$ 是 $Einstein$ 流形

在这一章中, 我们考虑 $(WBS)_n$ 是 $Einstein$ 流形, 即里奇曲率满足

$$\mathrm{Ric}_{ij}=\frac{r}{n}g_{ij}.\tag{5.1}$$

定理 5.1 如果 n 维黎曼流形 (M^n,g) 是 B- 递归流形, 那么 M 是广义的里奇递归流形.

证 M 是 B- 递归流形, 即 B 张量满足

$$\nabla_k B_{ij} = \lambda_k B_{ij}, \tag{5.2}$$

这里的 λ_k 是非零的 1- 形式. 根据 (1.6), 有

$$\nabla_k B_{ij} = \nabla_k a\mathrm{Ric}_{ij} + a\nabla_k \mathrm{Ric}_{ij} + \nabla_k(br)g_{ij}. \tag{5.3}$$

结合 (1.6), (5.2), (5.3), 可以得到

$$\nabla_k \mathrm{Ric}_{ij} = \mu_1 \mathrm{Ric}_{ij} + \mu_2 g_{ij}, \tag{5.4}$$

即 M 是一个广义里奇递归流形, 这里的 $\mu_1 = \lambda_k - \frac{\nabla_k a}{a}$, $\mu_2 = \frac{br\lambda_k}{a} - \frac{\nabla_k(br)}{a}$.

定理 5.2 满足 $Einstein$ 度量条件的 $(WBS)_n$, 是 B- 递归流形.

证 $(WBS)_n$ 是 $Einstein$ 流形, 所以 B 张量可以表示为

$$B_{ij} = \frac{r}{n}(a+nb)g_{ij}. \tag{5.5}$$

标量函数 r 是常值, 所以

$$\nabla_i r = 0, \nabla_k \mathrm{Ric}_{ij} = 0. \tag{5.6}$$

根据 (1.6), 有

$$\nabla_k B_{ij} = \nabla_k a\mathrm{Ric}_{ij} + a\nabla_k \mathrm{Ric}_{ij} + \nabla_k brg_{ij} + b\nabla_k rg_{ij}. \tag{5.7}$$

结合 (5.6), (5.7) 变为

$$\nabla_k B_{ij} = \nabla_k a\mathrm{Ric}_{ij} + \nabla_k brg_{ij} = \frac{r}{n}g_{ij}\nabla_k(a+nb). \tag{5.8}$$

将 (5.5) 和 (5.8) 代入 (2.1), 有

$$\frac{r}{n}g_{ij}\nabla_k(a+nb) = A_k B_{ij} + D_i B_{jk} + E_j B_{ki} = \frac{r}{n}(a+nb)[A_k g_{ij} + D_i g_{jk} + E_j g_{ki}]. \tag{5.9}$$

由于 r 是非零的, 所以

$$g_{ij}\nabla_k(a+nb) = (a+nb)[A_k g_{ij} + D_i g_{jk} + E_j g_{ki}]. \tag{5.10}$$

将 g^{ij} 作用到 (5.10) 两边, 可以得到

$$n\nabla_k(a+nb) = (a+nb)[nA_k + D_k + E_k]. \tag{5.11}$$

将 g^{kj} 作用到 (5.10) 两边, 可得

$$\nabla_i(a+nb) = (a+nb)[A_i + nD_i + E_i].$$

指标 i 变为 k, 即

$$\nabla_k(a+nb) = (a+nb)[A_k + nD_k + E_k]. \tag{5.12}$$

将 g^{ki} 作用到 (5.10) 两边, 可以得到

$$\nabla_j(a+nb)=(a+nb)[A_j+D_j+nE_j].$$

指标 j 变为 k, 即

$$\nabla_k(a+nb)=(a+nb)[A_k+D_k+nE_k]. \tag{5.13}$$

(5.11), (5.12), (5.13) 三式相加, 可得

$$\nabla_k(a+nb)=(a+nb)[A_k+D_k+E_k]. \tag{5.14}$$

将 (5.14) 代入 (5.10), 由于 a 和 b 是非零的, 所以

$$g_{ij}[A_k+D_k+E_k]=A_kg_{ij}+D_ig_{jk}+E_jg_{ki}. \tag{5.15}$$

将 g^{kj} 作用到 (5.15) 两边, 得

$$D_k\delta_i^k+E_k\delta_i^k=nD_i+E_j\delta_i^j. \tag{5.16}$$

对 (5.16) 令 $k=i$ 并求和, 有

$$(n-1)D_i=0,$$

即 $D_i=0$.

同样地, 将 g^{ki} 作用到 (5.15) 两边, 可以得到 $E_j=0$. 那么 B 张量变为 $\nabla_kB_{ij}=A_kB_{ij}$.

推论 5.3 满足 $Einstein$ 条件的 $(WBS)_n$ 是一个广义的里奇递归流形.

6 例子

考虑一个黎曼流形 (M^4,g), 其中黎曼度量 g 如下

$$ds^2=g_{ij}dx^idx^j=e^{x^4}[(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2]+(dx^4)^2, \tag{6.1}$$

这里的 i, j= $1,2,3,4$.

非零的联络系数分量如下

$$\Gamma_{14}^1=\Gamma_{24}^2=\Gamma_{34}^3=\frac{1}{2},\Gamma_{11}^4=\Gamma_{22}^4=\Gamma_{22}^4=-\frac{e^{x^4}}{2}.$$

非零的黎曼曲率张量分量如下

$$R_{1212}=R_{1313}=R_{2323}=-\frac{(e^{x^4})^2}{4},R_{1414}=R_{2424}=R_{3434}=-\frac{e^{x^4}}{4}.$$

非零的里奇曲率张量分量如下

$$\mathrm{Ric}_{11}=\mathrm{Ric}_{22}=\mathrm{Ric}_{33}=\frac{3e^{x^4}}{4},\mathrm{Ric}_{44}=\frac{3}{4}.$$

根据上述分量, 可以求出非零的标量曲率为 $r=3$.

令非零标量函数 a 和 b 的值如下

$$a = 4(e^{x^4})^2, b = e^{x^4}.$$

那么 B 张量的分量及其协变导数如下

$$B_{11} = B_{22} = B_{33} = 3(e^{x^4})^3 + 3(e^{x^4})^2, B_{44} = 3(e^{x^4})^2 + 3e^{x^4},$$

$$B_{11,4} = B_{22,4} = B_{33,4} = 9(e^{x^4})^3 + 6(e^{x^4})^2, B_{44,4} = 6(e^{x^4})^2 + 3e^{x^4}.$$

令 1- 形式如下

$$A_i(x) = \begin{cases} 2x^4, & for\, i = 1,2 \\ \dfrac{2}{x^4}, & for\, i = 3 \\ \dfrac{3e^{x^4}+2}{e^{x^4}+1}, & for\, i = 4 \end{cases},$$

$$D_i(x) = \begin{cases} x^3x^4, & for\, i = 1,2 \\ \dfrac{x^4}{3}, & for\, i = 3 \\ -\dfrac{e^{x^4}-1}{e^{x^4}-2}, & for\, i = 4 \end{cases},$$

$$E_i(x) = \begin{cases} (x^4)^2, & for\, i = 1,2 \\ x^4, & for\, i = 3 \\ \dfrac{1}{e^{x^4}-2}, & for\, i = 4 \end{cases}.$$

根据上述条件可以得到

$$B_{11,4} = A_4B_{11} + D_1B_{41} + E_1B_{14}, \tag{6.2}$$

$$B_{22,4} = A_4B_{22} + D_2B_{42} + E_2B_{24}, \tag{6.3}$$

$$B_{33,4} = A_4B_{33} + D_3B_{43} + E_3B_{34}, \tag{6.4}$$

$$B_{44,4} = A_4B_{44} + D_4B_{44} + E_4B_{44}, \tag{6.5}$$

通过验证 (6.2), (6.3), (6.4), (6.5) 是成立的. 流形 (M^4, g) 满足 (1.9), 即 M 是一个 $(WBS)_4$.

参 考 文 献

[1] Cartan É. Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann [J]. Bulletin de la Soci é t é math é matique de France, 1926, 54: 214–264.

[2] Tam á ssy L. On weakly symmetric and weakly projective symmetric Riemannian manifolds [J]. Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, 1989, 50: 663–670.

[3] Tam á ssy L. On weak symmetries of Einstein and Sasakian manifolds [J]. Tensor, NS, 1993, 53: 140–148.

[4] Mantica C A, Molinari L G. Weakly Z-symmetric manifolds [J]. Acta Mathematica Hungarica, 2012, 135(1-2): 80–96.

[5] Mallick S, De U C. Z tensor on $N(k)$-Quasi-Einstein manifolds [J]. Kyungpook Mathematical Journal, 2016, 56(3): 979–991.

[6] De U C. On weakly Z symmetric spacetimes [J]. Kyungpook Mathematical Journal, 2018, 58(4): 761–779.

[7] Mantica C A, Suh Y J. Pseudo-Q-symmetric Riemannian manifolds [J]. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 2013, 10(05): 1350013.

[8] Pandey P. On weakly cyclic generalized Z-symmetric manifolds [J]. National Academy Science Letters, 2020, 43(4): 347–350.

[9] Kim J. Notes on weakly cyclic Z-symmetric manifolds [J]. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 2018, 55(1): 227–237.

[10] Mantica C A, Suh Y J. Pseudo Z-symmetric space-times with divergence-free Weyl tensor and pp-waves[J]. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 2016, 13(02): 1650015.

[11] De U C, Mantica C A, Suh Y J. On weakly cyclic Z-symmetric manifolds [J]. Acta Mathematica Hungarica, 2015, 146: 153–167.

[12] De U C, Pal P. On almost pseudo Z-symmetric manifolds [J]. Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica, 2014, 53(1): 25–43.

[13] Suh Y J, Mantica C A, De U C, et al. Pseudo B-symmetric manifolds [J]. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 2017, 14(09): 1750119.

[14] Mantica C A, Suh Y J. Pseudo Z-symmetric Riemannian manifolds with harmonic curvature tensors [J]. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 2012, 9(01): 1250004.

[15] Mantica C A, De U C, Suh Y J. On weakly B-symmetric pseudo Riemannian manifolds and its applications [J]. Filomat, 2021, 35(3): 895–909.

[16] Singh J P, Khatri M. On weakly cyclic B-symmetric spacetime [J]. Balkan Journal of Geometry and Its Applications, 2022, 27(2): 122–138.

[17] Gray A. Einstein-like manifolds which are not Einstein [J]. Geometriae dedicata, 1978, 7(3): 259–280.

[18] Walker A G. On Ruse's spaces of recurrent curvature [J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 1950, 2(1): 36–64.

[19] Mishra R S. Structures on a differentiable manifold and their applications [J]. Chandrama Prakashan, Allahabad, 1984.

[20] Besse A L. Einstein manifolds [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1987.

[21] Chaki M C, Maity R K. On quasi Einstein manifolds [J]. Publicationes Mathematicae, Debrecen, 2000, 57(3): 297–306.

[22] Chen B Y, Yano K. Hypersurfaces of a conformally flat spaces [J]. Tensor, NS, 1972, 26(26): 318–322.

[23] Chern S S V. On Curvature and characteristic classes of a riemann manifold [J]. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitt Hamburg, 1955, 20(1): 117–126.

[24] Mantica C A, Molinari L G. A second-order identity for the Riemann tensor and applications [J]. Colloquium Mathematicum, 2011, 122(1): 69–82.

[25] 陈维桓, 李兴校. 黎曼几何引论上册 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2004.

[26] 徐森林, 薛春华. 微分几何 [M]. 安徽: 中国科学技术大学出版社, 1997.

WEAKLY B SYMMETRIC MANIFOLDS

HUANG Zhi-ming, GAN Li-ning, LU Wei-jun

(*School of Mathematics and Physics, Guangxi Minzu University, Nanning 530006, China*)

Abstract: In this paper, we study some geometric properties of a special symmetric manifolds(weakly B-symmetric manifolds, denoted by $(WBS)_n$). By using the symmetry of B tensor, we obtain a sufficient condition for $(WBS)_n$ to be an Einstein manifold of level 2 and prove that such manifold is a quasi-Einstein manifold. According to the method of index rotation, we obtain a necessary and sufficient condition for 1-forms K and ω is closed, respectively. Then we study Einstein $(WBS)_n$ $(n > 2)$. Finally, we construct an example of $(WBS)_4$ manifold.

Keywords: weakly B symmetric manifolds; Einstein manifolds of level 2; quasi-Einstein manifolds; one-forms

2010 MR Subject Classification: 53C25; 53C35