

滞后型测度泛函微分方程解的有界性

李宝麟, 杨银杏

(西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要: 本文研究了滞后型测度泛函微分方程解的有界性问题. 通过滞后型测度泛函微分方程在一定条件下与广义常微分方程的等价关系, 利用广义常微分方程解的有界性, 获得了滞后型测度泛函微分方程解的有界性结果.

关键词: 滞后型测度泛函微分方程; 广义常微分方程; 有界性; Kurzweil-Stieltjes 积分

MR(2010) 主题分类号: 34A34; 34C11

中图分类号: O175

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2021)05-0449-09

1 引言

常微分方程解的有界性问题是在研究生物学、生态学、物理学以及神经网络问题中提出的, 是常微分方程研究中一个十分重要的领域. 近年来, 关于常微分方程解的有界性已经引起了许多学者的研究^[1-3]. 文献[4]中, Federson M 等在 Lyapunov 泛函中没有 Lipschitz 条件的情况下, 研究了广义常微分方程解的有界性, 并且利用测度微分方程和广义常微分方程的等价关系建立了测度微分方程解的有界性, 随后又利用测度微分方程和时间尺度上的动力方程的等价关系, 获得了时间尺度上的动力方程解的有界性. 文献[5]建立了滞后型测度泛函微分方程在一定条件下与广义常微分方程的等价关系. 文献[6]研究了滞后型测度泛函微分方程解的存在性、唯一性和对参数的连续依赖性.

本文考虑滞后型测度泛函微分方程

$$Dy = f(y_t, t)Dg \quad (1)$$

解的有界性, 其中 Dy, Dg 分别表示函数 y, g 的分布导数. $f: S \times [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n, g: [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, y: [t_0 - r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n, y_t(\theta) = y(t + \theta), \theta \in [-r, 0], r > 0$, 其中

$$S = \{y_t: y \in G_1, t \in [t_0, +\infty)\} \subset G([-r, 0], \mathbb{R}^n),$$

$$G_1 \subset G([t_0 - r, +\infty), \mathbb{R}^n),$$

上述的 G_1 为开集, $G([t_0 - r, +\infty), \mathbb{R}^n)$ 表示所有正则函数 $y: [t_0 - r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ 构成的空间, 定义范数 $\|y\|_\infty = \sup_{t \in [t_0, +\infty)} \|y(t)\|$, 则 $G([t_0 - r, +\infty), \mathbb{R}^n)$ 为 Banach 空间. 由文献[5]知, 方程(1)等价于积分方程

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(y_s, s)dg(s), \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (2)$$

*收稿日期: 2020-11-10

接收日期: 2021-04-14

基金项目: 国家自然科学基金(11761063).

作者简介: 李宝麟(1963-), 男, 甘肃天水, 教授, 主要研究方向: 常微分方程与动力系统.

方程 (2) 右端的积分是关于不减函数 $g : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 的 Kurzweil-Stieltjes 积分, 而且 f 满足如下条件:

(H₁) 对任意的 $y \in G_1, t \in [t_0, +\infty)$, 使得 $\int_{t_0}^t f(y_s, s)dg(s)$ 存在.

(H₂) 对任意的 $y \in G_1, s_1, s_2 \in [t_0, +\infty)$, 存在常数 $M > 0$, 使得

$$\left\| \int_{s_1}^{s_2} f(y_s, s)dg(s) \right\| \leq M[g(s_2) - g(s_1)].$$

(H₃) 对任意的 $y, z \in G_1, s_1, s_2 \in [t_0, +\infty)$, 存在常数 $N > 0$, 使得

$$\left\| \int_{s_1}^{s_2} [f(y_s, s) - f(z_s, s)]dg(s) \right\| \leq N \int_{t_0}^t \|y_s - z_s\|_\infty dg(s).$$

本文利用广义常微分方程解的有界性, 研究滞后型测度泛函微分方程解的有界性.

2 预备知识

本节介绍广义常微分方程与滞后型测度泛函微分方程的概念与结论.

设 X 是 Banach 空间, $O \subset X$ 是开子集.

定义 2.1 ^[4] 函数 $U : [a, b] \times [a, b] \rightarrow X$ 在区间 $[a, b]$ 上称为 Kurzweil 可积的, 如果存在 $I \in X$, 使得对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正值函数 $\delta : [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$, 对 $[a, b]$ 的任何 δ -精细分划 $D : a = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k = b$ 及 $\{\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_k\}$, 有

$$\left\| \sum_{i=1}^k [U(\tau_i, \alpha_i) - U(\tau_i, \alpha_{i-1})] - I \right\| < \varepsilon,$$

其中 $\tau_i \in [\alpha_{i-1}, \alpha_i] \subset [\tau_i - \delta(\tau_i), \tau_i + \delta(\tau_i)]$, $i = 1, 2, \cdots, k$. 则 $I \in X$ 称为 U 在区间 $[a, b]$ 上的 Kurzweil 积分, 记作 $\int_a^b DU(\tau, t) = I$.

特别地, 当 $f : [a, b] \rightarrow X, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, U(\tau, t) = f(\tau)g(t)$ 时, 上面定义的积分称为 Kurzweil-Stieltjes 积分, 记作 $\int_a^b f(s)dg(s)$.

设 $F : \Omega \rightarrow X$, 其中 $\Omega = O \times [t_0, +\infty)$.

定义 2.2 ^[4] 称函数 $x : [\alpha, \beta] \rightarrow X$ 为广义常微分方程

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x, t) \quad (3)$$

在区间 $[\alpha, \beta] \subset [t_0, +\infty)$ 上的一个解, 是指对所有的 $t \in [\alpha, \beta], (x(t), t) \in \Omega$, 且对每个 $s_1, s_2 \in [\alpha, \beta]$, 有

$$x(s_2) - x(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau), t)$$

定义 2.3 ^[4] 设函数 $F : \Omega \rightarrow X$ 属于函数族 $\mathcal{F}(\Omega, h)$, 是指 F 满足以下条件: 对任意的 $(x, s_1), (x, s_2) \in \Omega$, 有

$$\|F(x, s_2) - F(x, s_1)\| \leq |h(s_2) - h(s_1)|, \quad (4)$$

对任意的 $(x, s_1), (x, s_2), (y, s_1), (y, s_2) \in \Omega$, 有

$$\|F(x, s_2) - F(x, s_1) - F(y, s_2) + F(y, s_1)\| \leq \|x - y\| |h(s_2) - h(s_1)|,$$

其中 $h: [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 为不减函数.

定义 2.4 ^[4] 函数 $x: [\alpha, \beta] \rightarrow X$ 是广义常微分方程 (3) 关于初值条件 $x(s_0) = z_0$ 在区间 $[\alpha, \beta] \subset [t_0, +\infty)$ 上的一个解, 是指如果 $s_0 \in [\alpha, \beta]$, $(x(t), t) \in \Omega$ 对每个 $t, s \in [\alpha, \beta]$, 有

$$x(s) - z_0 = \int_{s_0}^s DF(x(\tau), t).$$

引理 2.1 ^[4] 如果 $\Omega = O \times [t_0, +\infty)$, $F \in \mathcal{F}(\Omega, h)$, 其中函数 h 是不减且左连续的. 则对每个 $(z_0, s_0) \in \Omega$, 广义常微分方程 (3) 在 $[s_0, +\infty)$ 上存在饱和解并且 $x(s_0) = z_0$.

注 对每个 $(z_0, s_0) \in \Omega$, 把广义常微分方程的饱和解记为 $x(s, s_0, z_0)$ 且 $x(s_0) = z_0$.

定义 2.5 ^[4] 广义常微分方程 (3) 是

1) 一致有界: 如果对每个 $\alpha > 0$, 存在 $M = M(\alpha) > 0$, 使得对每个 $s_0 \in [t_0, +\infty)$ 及所有的 $z_0 \in X$, $\|z_0\| < \alpha$, 有

$$\|x(s, s_0, z_0)\| < M, \quad s \geq s_0.$$

2) 拟一致最终有界: 如果存在 $B > 0$, 使得对每个 $\alpha > 0$, 存在 $T = T(\alpha) > 0$, 使得对所有的 $s_0 \in [t_0, +\infty)$ 及所有的 $z_0 \in X$, $\|z_0\| < \alpha$, 有

$$\|x(s, s_0, z_0)\| < B, \quad s \geq s_0 + T.$$

3) 一致最终有界: 广义常微分方程是一致有界且拟一致最终有界.

引理 2.2 ^[4] 设函数 $V: [t_0, +\infty) \times X \rightarrow \mathbb{R}$, 使得对每个在 $(\alpha, \beta]$ 上左连续的函数 $z: [\alpha, \beta] \rightarrow X$, $[\alpha, \beta] \subset [t_0, +\infty)$, 函数 $t \mapsto V(t, z(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$ 在区间 $(\alpha, \beta]$ 上是左连续的. 而且, 假设 V 满足下列条件:

(i) 存在两个单调递增的函数 $p, b: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, 使得 $p(0) = b(0) = 0$, $\lim_{s \rightarrow +\infty} b(s) = +\infty$, 且对每一对 $(t, z) \in [t_0, +\infty) \times X$, 有

$$b(\|z\|) \leq V(t, z) \leq p(\|z\|).$$

(ii) 对广义常微分方程 (3) 的每个解 $z: [s_0, +\infty) \rightarrow X$, $s_0 \geq t_0$ 及每个 $s_0 \leq t < s < +\infty$, 有

$$V(s, z(s)) - V(t, z(t)) \leq 0.$$

则广义常微分方程 (3) 是一致有界的.

引理 2.3 ^[4] 设函数 $V: [t_0, +\infty) \times X \rightarrow \mathbb{R}$, 使得对每个在 $(\alpha, \beta]$ 上左连续的函数 $z: [\alpha, \beta] \rightarrow X$, 函数 $t \mapsto V(t, z(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$ 在区间 $(\alpha, \beta]$ 上是左连续的且满足引理 2.2 的条件 (i). 而且, 假设 V 满足下列条件:

(V1) 对每个 $x, y: [\alpha, \beta] \rightarrow X$, $[\alpha, \beta] \subset [t_0, +\infty)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上有界变差, 及每个 $\alpha \leq s < t \leq \beta$, 有

$$|V(t, x(t)) - V(t, y(t)) - V(s, x(s)) + V(s, y(s))| \leq (h_1(t) - h_1(s)) \sup_{\xi \in [\alpha, \beta]} \|x(\xi) - y(\xi)\|$$

成立, 其中 $h_1 : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 为不减和左连续的函数.

(V2) 存在连续函数 $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(0) = 0$ 且 $\Phi(x) > 0$, $x \neq 0$, 使得对广义常微分方程 (3) 的每个解 $z : [s_0, +\infty) \rightarrow X$, $s_0 \geq t_0$ 及每个 $s_0 \leq t < s < +\infty$, 有

$$V(s, z(s)) - V(t, z(t)) \leq (s - t)(-\Phi(z(t))).$$

则广义常微分方程 (3) 是一致最终有界的.

引理 2.4 ^[5] 如果 $y : [t_0 - r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个正则函数, 则 $s \mapsto \|y_s\|_\infty$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上是正则的.

引理 2.5 ^[5] 设 $f : S \times [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ 满足条件 $(H_1) - (H_3)$, $g : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 是不减函数, 定义 $F : G_1 \times [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ 如下

$$F(x, t)(\vartheta) = \begin{cases} 0, & t_0 - r < \vartheta \leq t_0, \\ \int_{t_0}^{\vartheta} f(x_s, s) dg(s), & t_0 \leq \vartheta \leq t < +\infty, \\ \int_{t_0}^t f(x_s, s) dg(s), & t \leq \vartheta < +\infty, \end{cases} \quad (5)$$

则 $F \in \mathcal{F}(G_1 \times [t_0, +\infty), h)$, 其中 $h : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(t) = (M + N)[g(t) - g(t_0)], \quad t \in [t_0, +\infty),$$

由 h 的定义可知 h 为 $[t_0, +\infty)$ 上不减的左连续函数.

引理 2.6 ^[5] 设 G_1 是 $G([t_0 - r, +\infty), \mathbb{R}^n)$ 的开子集, 且 $t \in [t_0, +\infty)$ 时, 具有延拓性质, $S = \{y_t : y \in G_1, t \in [t_0, +\infty)\}$, $\phi \in S$, $g : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 是不减函数, $f : S \times [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ 满足条件 $(H_1) - (H_3)$.

(i) 如果 $y \in G_1$ 是滞后型测度泛函微分方程

$$\begin{cases} Dy = f(y_t, t)Dg, & t \in [t_0, +\infty), \\ y_{t_0} = \phi \end{cases}$$

的解. 对任意的 $t \in [t_0 - r, +\infty)$, 令

$$x(t)(\vartheta) = \begin{cases} y(\vartheta), & \vartheta \in [t_0 - r, t], \\ y(t), & \vartheta \in [t, +\infty), \end{cases}$$

则函数 $x : [t_0, +\infty) \rightarrow G_1$ 是广义常微分方程

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x, t)$$

在初值条件

$$x(t_0)(\vartheta) = \begin{cases} \phi(\vartheta - t_0), & \vartheta \in [t_0 - r, t_0], \\ x(t_0)(t_0), & \vartheta \in [t_0, +\infty) \end{cases}$$

下的解, 其中 F 由 (5) 式给定.

(ii) 相反地, F 由 (5) 式给定, 如果 $x : [t_0, +\infty) \rightarrow G_1$ 是广义常微分方程

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x, t), \quad t \in [t_0, +\infty)$$

的解, 且满足初值条件

$$x(t_0)(\vartheta) = \begin{cases} \phi(\vartheta - t_0), & \vartheta \in [t_0 - r, t_0], \\ x(t_0)(t_0), & \vartheta \in [t_0, +\infty), \end{cases}$$

定义

$$y(\vartheta) = \begin{cases} x(t_0)(\vartheta), & \vartheta \in [t_0 - r, t_0], \\ x(\vartheta)(\vartheta), & \vartheta \in [t_0, +\infty), \end{cases}$$

则函数 $y \in G_1$ 是滞后型测度泛函微分方程

$$\begin{cases} Dy = f(y_t, t)Dg, & t \in [t_0, +\infty), \\ y_{t_0} = \phi \end{cases}$$

的解.

3 主要结果

本节建立滞后型测度泛函微分方程解的有界性.

定理 3.1 设 $f: S \times [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ 满足条件 $(H_1) - (H_3)$, $g: [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 是不减和左连续函数, 则对每个 $(z_0, s_0) \in S \times [t_0, +\infty)$, 滞后型测度泛函微分方程 (2) 在 $[s_0, +\infty)$ 上存在饱和解并且 $y(s_0) = z_0$.

证 考虑滞后型测度泛函微分方程 (2)

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(y_s, s)dg(s), \quad t \in [t_0, +\infty).$$

根据假设, 函数 $f: S \times [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ 满足条件 $(H_1) - (H_3)$, $g: [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 是不减和左连续函数, 则滞后型测度泛函微分方程 (2) 等价于广义常微分方程

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x, t), \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (6)$$

其中 F 由 (5) 式给出.

根据引理 2.1 得, 对每个 $(z_0, s_0) \in O \times [t_0, +\infty)$, 广义常微分方程 (6) 在 $[s_0, +\infty)$ 上存在饱和解并且 $x(s_0) = z_0$, 而且根据引理 2.6 的 (ii) 有

$$y(\vartheta) = \begin{cases} x(t_0)(\vartheta), & \vartheta \in [t_0 - r, t_0], \\ x(\vartheta)(\vartheta), & \vartheta \in [t_0, +\infty), \end{cases}$$

是滞后型测度泛函微分方程

$$\begin{cases} y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(y_s, s)dg(s), & t \in [t_0, +\infty), \\ y_{t_0} = \phi \end{cases}$$

的解. 因此, 对每个 $(z_0, s_0) \in S \times [t_0, +\infty)$, 滞后型测度泛函微分方程 (2) 在 $[s_0, +\infty)$ 上存在饱和解并且 $y(s_0) = z_0$.

注 同样地, 对每个 $(z_0, s_0) \in S \times [t_0, +\infty)$, 把滞后型测度泛函微分方程 (2) 的饱和解记为 $y(s, s_0, z_0)$ 且 $y(s_0) = z_0$.

定义 3.1 滞后型测度泛函微分方程 (2) 是

1) 一致有界: 如果对每个 $\alpha > 0$, 存在 $M = M(\alpha) > 0$, 使得对每个 $s_0 \in [t_0, +\infty)$ 及所有的 $z_0 \in \mathbb{R}^n$, $\|z_0\| < \alpha$, 有

$$\|y(s, s_0, z_0)\| < M, \quad s \geq s_0.$$

2) 拟一致最终有界: 如果存在 $B > 0$, 使得对每个 $\alpha > 0$, 存在 $T = T(\alpha) > 0$, 使得对所有的 $s_0 \in [t_0, +\infty)$ 及所有的 $z_0 \in \mathbb{R}^n$, $\|z_0\| < \alpha$, 有

$$\|y(s, s_0, z_0)\| < B, \quad s \geq s_0 + T.$$

3) 一致最终有界: 滞后型测度泛函微分方程是一致有界且拟一致最终有界.

定理 3.2 设 $f: S \times [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ 满足条件 $(H_1) - (H_3)$, $g: [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上是不减和左连续的. 设函数 $U: [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 使得对每个在 $(\alpha, \beta]$ 上左连续的函数 $z: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $[\alpha, \beta] \subset [t_0, +\infty)$, 函数 $t \mapsto U(t, z(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$ 在区间 $(\alpha, \beta]$ 上是左连续的. 而且, 假设 U 满足下列条件:

(i) 存在两个单调递增的函数 $p, b: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, 使得 $p(0) = b(0) = 0$,

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} b(s) = +\infty, \quad (7)$$

且对每一对 $(t, z) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, 有

$$b(\|z\|) \leq U(t, z) \leq p(\|z\|). \quad (8)$$

(ii) 对滞后型测度泛函微分方程 (2) 的每个解 $z: [s_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $s_0 \geq t_0$ 及每个 $s_0 \leq t < s < +\infty$, 有

$$U(s, z(s)) - U(t, z(t)) \leq 0.$$

则滞后型测度泛函微分方程 (2) 是一致有界的.

证 令固定的 $\alpha > 0$. 根据条件 (i) 知 $p(\alpha) > 0$, 由 (7) 式, 存在 $M = M(\alpha) > 0$ 使得对所有的 $s \geq M, p(\alpha) < b(s)$. 特别地, 对 $s = M$, 得

$$p(\alpha) < b(M). \quad (9)$$

令 $s_0 \in [t_0, +\infty)$, $z_0 \in \mathbb{R}^n$, 且 $y(\cdot) = y(\cdot, s_0, z_0): [s_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是滞后型测度泛函微分方程 (2) 在初值条件 $y(s_0) = z_0$ 下的解, 其中 $\|z_0\| < \alpha$. 由定义 3.1 中 1) 可知, 需证明:

$$\|y(s)\| < M, \quad s \geq s_0.$$

事实上, 由条件 (ii) 和条件 (8), 对每个 $s \geq s_0$, 有

$$U(s, y(s)) \leq U(s_0, y(s_0)) = U(s_0, z_0) \leq p(\|z_0\|) \leq p(\alpha) < b(M),$$

即对所有的 $s \geq s_0$,

$$U(s, y(s)) < b(M). \quad (10)$$

最后, 对所有的 $s \geq s_0$, 证明 $\|y(s, s_0, z_0)\| = \|y(s)\| < M$. 运用反证法, 即假定存在 $\bar{s} \in [s_0, +\infty)$ 使得 $\|y(\bar{s})\| \geq M$. 则由条件 (8) 和 b 是一个不减函数, 有

$$U(\bar{s}, y(\bar{s})) \geq b(\|y(\bar{s})\|) \geq b(M),$$

与 (10) 式相矛盾. 因此, 对所有的 $s \geq s_0$, $\|y(s)\| < M$, 且由定义 3.1 的 1) 知滞后型测度泛函微分方程 (2) 是一致有界的.

定理 3.3 设 $f: S \times [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ 满足条件 $(H_1) - (H_3)$, $g: [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上是不减和左连续的. 设函数 $U: [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 使得对每个在 $(\alpha, \beta]$ 上左连续的函数 $z: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$, 函数 $t \mapsto U(t, z(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$ 在区间 $(\alpha, \beta]$ 上是左连续的且满足定理 3.2 的条件 (i). 而且, 假设 U 满足下列条件:

(U1) 对每个 $x, y: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 在区间 $[\alpha, \beta] \subset [t_0, +\infty)$ 上有界变差及每个 $\alpha \leq s < t \leq \beta$, 有

$$\|U(t, x(t)) - U(t, y(t)) - U(s, x(s)) + U(s, y(s))\| \leq \left(\int_s^t K(\tau) d\tau \right) \sup_{\xi \in [\alpha, \beta]} \|x(\xi) - y(\xi)\|$$

成立, 其中 $u: [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 是不减和左连续函数, $K: [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 是关于 u 局部 Kurzweil-Stieltjes 可积的函数.

(U2) 存在连续函数 $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(0) = 0$ 且 $\phi(x) > 0$, $x \neq 0$, 使得对滞后型测度泛函微分方程 (2) 的每个解 $z: [s_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $s_0 \geq t_0$ 及每个 $s_0 \leq t < s < +\infty$, 有

$$U(s, z(s)) - U(t, z(t)) \leq (s - t)(-\phi(z(t))).$$

则滞后型测度泛函微分方程 (2) 是一致最终有界的.

证 对所有的 $(x, t) \in G_1 \times [t_0, +\infty)$, 定义函数 $F: G_1 \times [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ 如下

$$F(x, t)(\vartheta) = \begin{cases} 0, & t_0 - r < \vartheta \leq t_0, \\ \int_{t_0}^{\vartheta} f(x_s, s) dg(s), & t_0 \leq \vartheta \leq t < +\infty, \\ \int_{t_0}^t f(x_s, s) dg(s), & t \leq \vartheta < +\infty. \end{cases} \quad (11)$$

根据假设, 函数 $f: S \times [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ 满足条件 $(H_1) - (H_3)$, $g: [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 是不减和左连续的. 由假设存在常数 M, N , 对任意的 $x, z \in G_1$, 由 (11) 式得

$$F(x, s_2)(\vartheta) - F(x, s_1)(\vartheta) = \begin{cases} 0, & t_0 - r < \vartheta \leq s_1, \\ \int_{s_1}^{\vartheta} f(x_s, s) dg(s), & s_1 \leq \vartheta \leq s_2, \\ \int_{s_1}^{s_2} f(x_s, s) dg(s), & s_2 \leq \vartheta < +\infty, \end{cases}$$

则由条件 (H_2) 知

$$\begin{aligned} \|F(x, s_2) - F(x, s_1)\|_{\infty} &= \sup_{t_0 - r \leq \vartheta < +\infty} \|F(x, s_2)(\vartheta) - F(x, s_1)(\vartheta)\| \\ &= \sup_{s_1 \leq \vartheta \leq s_2} \|F(x, s_2)(\vartheta) - F(x, s_1)(\vartheta)\| = \sup_{s_1 \leq \vartheta \leq s_2} \left\| \int_{s_1}^{\vartheta} f(x_s, s) dg(s) \right\| \\ &\leq \int_{s_1}^{s_2} M dg(s) = M[g(s_2) - g(s_1)] \leq h(s_2) - h(s_1), \end{aligned}$$

由条件 (H_3) 知

$$\begin{aligned} & \|F(x, s_2) - F(x, s_1) - F(z, s_2) + F(z, s_1)\|_\infty \\ &= \sup_{s_1 \leq \vartheta \leq s_2} \left\| \int_{s_1}^{\vartheta} [f(x_s, s) - f(z_s, s)] dg(s) \right\| \leq \sup_{s_1 \leq \vartheta \leq s_2} \int_{s_1}^{\vartheta} N \|x_s - z_s\|_\infty dg(s) \\ &\leq \|x - z\|_\infty \int_{s_1}^{s_2} N dg(s) \leq \|x - z\|_\infty [h(s_2) - h(s_1)], \end{aligned}$$

根据引理 2.4, 函数 $s \mapsto \|x_s - z_s\|_\infty$ 是正则的, 则积分 $\int_{s_1}^{\vartheta} N \|x_s - z_s\|_\infty dg(s)$ 存在. 因此 $F \in \mathcal{F}(G_1 \times [t_0, +\infty), h)$, 其中函数 $h: [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 如下

$$h(t) = (M + N)[g(t) - g(t_0)], \quad t \in [t_0, +\infty).$$

因为函数 $t \mapsto U(t, z(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上是左连续的且满足定理 3.2 的条件 (i), 所以由引理 2.6 的 (i) 可知, 函数 $t \mapsto U(t, z(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$ 满足引理 2.2 的条件 (i).

对每个 $t \in [t_0, +\infty)$, 定义函数 $h_1(t): [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 如下

$$h_1(t) = \int_{t_0}^t K(\tau) du(\tau),$$

则函数 h_1 是不减且左连续的. 而且由条件 (U1), 对每个 $\alpha \leq s < t \leq \beta$ 及每个在 $[\alpha, \beta]$ 上有界变差的 $x, y: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $[\alpha, \beta] \subset [t_0, +\infty]$, 函数 U 满足下列条件

$$\begin{aligned} & \|U(t, x(t)) - U(t, y(t)) - U(s, x(s)) + U(s, y(s))\| \leq \left(\int_s^t K(\tau) du(\tau) \right) \sup_{\xi \in [\alpha, \beta]} \|x(\xi) - y(\xi)\| \\ &= \left(\int_{t_0}^t K(\tau) du(\tau) - \int_{t_0}^s K(\tau) du(\tau) \right) \sup_{\xi \in [\alpha, \beta]} \|x(\xi) - y(\xi)\| \\ &= (h_1(t) - h_1(s)) \sup_{\xi \in [\alpha, \beta]} \|x(\xi) - y(\xi)\|, \end{aligned}$$

则函数 $t \mapsto U(t, z(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$ 满足引理 2.3 的条件 (V1).

其次, 由条件 (U2) 知, $z: [s_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $s_0 \geq t_0$ 是滞后型测度泛函微分方程

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(y_s, s) dg(s), \quad t \in [t_0, +\infty)$$

的解. 则由引理 2.6 的 (i) 知,

$$x(t)(\vartheta) = \begin{cases} z(\vartheta), & \vartheta \in (t_0 - r, t], \\ z(t), & \vartheta \in [t, +\infty) \end{cases}$$

是广义常微分方程

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x, t), \quad t \in [t_0, +\infty)$$

的解, 其中函数 F 由 (11) 式给出.

因此, 函数 $t \mapsto U(t, z(t)), t \in [\alpha, \beta]$ 满足引理 2.3 的条件 (V2).

综上可得, 函数 $t \mapsto U(t, z(t)), t \in [\alpha, \beta]$ 满足引理 2.3 的所有条件, 故广义常微分方程

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x, t), \quad t \in [t_0, +\infty)$$

是一致最终有界的, 其中函数 F 由 (11) 式给出.

最后, 根据引理 2.6 的 (ii), 证明了滞后型测度泛函微分方程 (2) 也是一致最终有界的.

参 考 文 献

- [1] Afonso S M, Bonotto E M, Federson M, Gimenes L P. Boundedness of solutions of retarded functional differential equations with variable impulses via generalized ordinary differential equations[J]. *Mathematische Nachrichten*, 2012, 285(5–6): 545–561.
- [2] Peterson A, Tisdell C. Boundedness and uniqueness of solutions to dynamic equations on time scales[J]. *Journal of Difference Equations and Applications*, 2004, 10(13–15): 1295–1306.
- [3] Fan M, Dishen J, Wang K. Stability and boundedness of solutions of neutral functional differential equations with finite delay[J]. *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, 276(2): 545–560.
- [4] Federson M, Grau R, Mesquita J G, Toon E. Boundedness of solutions of measure differential equations and dynamic equations on time scales[J]. *Journal of Differential Equations*, 2017, 263(1): 26–56.
- [5] Mesquita J G. Measure functional differential equations and impulsive functional dynamic equations on time scales[D]. *Universidade de São Paulo*, 2012.
- [6] Federson M, Mesquita J G, Slavík A. Measure functional differential equations and functional dynamic equations on time scales[J]. *Journal of Differential Equations*, 2012, 252(6): 3816–3847.
- [7] Schwabik Š. Generalized ordinary differential equations[M]. Singapore: World Scientific, 1992.

BOUNDEDNESS OF SOLUTIONS FOR RETARDED MEASURE FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

LI Bao-lin, YANG Yin-xing

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, we investigate the boundedness for retarded measure functional differential equations. In order to obtain our results, we use the boundedness of solutions for generalized ODEs, by the correspondence between retarded measure functional differential equations and generalized ODEs, under a certain condition.

Keywords: retarded measure functional differential equations; generalized ordinary differential equations; boundedness; Kurzweil–Stieltjes integral

2010 MR Subject Classification: 34A34; 34C11