Vol. 41 (2021)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

非线性二阶离散周期边值问题的 Ambrosetti–Prodi 型结果

赵 娇
(西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州 730070)

摘 要: 本文研究了二阶离散周期边值问题

$$\begin{cases} \Delta^2 u(t-1) + f(t, u(t), \Delta u(t-1)) = s, & t \in [1, T]_{\mathbb{Z}}, \\ u(0) - u(T) = \Delta u(0) - \Delta u(T) = 0 \end{cases}$$

解的个数与参数 s 的关系, 其中 $f(t, u, v) : [1, T]_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 关于 $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ 连续, $s \in \mathbb{R}$. 利用上下解方法和拓扑度理论, 获得了 Ambrosetti–Prodi 型结果, 推广了已有文献的相关结果.

关键词: 二阶周期边值问题; Ambrosetti-Prodi 型结果; 上下解方法; 拓扑度理论
MR(2010) **主题分类号:** 39A12; 39A23 **中图分类号:** O175.8
文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2021)04-0357-08

1 引言

Ambrosetti–Prodi 型结果描述的是形如

$$F(x) = s \tag{1.1}$$

的方程所对应的边值问题解 x 的个数与参数 s 之间的关系, 当参数 s 变化时, 解的个数相应改变. 1972 年, A.Ambrosetti 和 G.Prodi 在文献 [1] 中对二阶椭圆边值问题

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = g, \ \ x \in \Omega \\ u \mid_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

进行了研究, 得到如下定理:

定理 A 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个边界充分光滑的有界子集, $g \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, $\alpha \in (0, 1)$. 令 λ_1, λ_2, λ_3, $\cdots$ 为线性齐次问题

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0, \ \ x \in \Omega \\ u \mid_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

的特征值. 若 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为 C^2 连续的函数, 且满足以下条件:

(A1) $f(0) = 0$;

*收稿日期: 2020-11-23 接收日期: 2021-04-14
基金项目: 国家自然科学基金资助 (12061064), 西北师范大学研究生科研资助 (2020KYZZ001109).
作者简介: 赵娇 (1998–), 女, 甘肃兰州, 硕士研究生, 主要研究方向: 常微分方程边值问题.

(A2) $f''(t)>0$;

(A3) $\lim\limits_{t\to-\infty} f'(t)=h',\ 0<h'<\lambda_1$;

(A4) $\lim\limits_{t\to+\infty} f'(t)=h'',\ \lambda_1<h''<\lambda_2$.

则存在 $M\subset C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, 在 $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})\backslash M$ 中存在两个连通分支 A_1, A_2, 并且有如下结论:

(i) 若 $g\in A_1$, 则问题 (1.2) 没有解;

(ii) 若 $g\in A_2$, 则问题 (1.2) 有两个解;

(iii) 若 $g\in M$, 则问题 (1.2) 有一个解.

1986 年, Fabry, Mawhin 和 Nkashama 在文献 [2] 中运用上下解方法获得二阶周期边值问题

$$\begin{cases} u''+F(t,u,u')=s,\ \ t\in[0,2\pi] \\ u(0)=u(2\pi),\ u'(0)=u'(2\pi) \end{cases} \tag{1.3}$$

解的 Ambrosetti–Prodi 型结果, 其中 $F:[0,2\pi]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 连续且关于 t 是 2π 周期的, 并满足以下条件:

(B1) 存在 $R_1>0$ 及 S_1, 使得对任意 $t\in\mathbb{R}$ 及 $x\leqslant -R_1$, 有 $F(t,x,0)>s_1>F(t,0,0)$ 成立;

(B2) F 满足 Bernstein–Nagumo 条件, 即对任意 $R\in(0,+\infty)$, 存在连续函数 $h_R:(0,+\infty)\to[a_R,+\infty)(h_R>0)$, 使得对所有的 $|x|\leqslant R, t\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}$, 有 $|F(t,x,y)|\leqslant h_R(|y|)$, 及 $\int\limits_{a_R}^{+\infty}\frac{s}{h_R(s)}ds=+\infty$ 成立;

(B3) $\lim\limits_{|u|\to\infty} F(t,u,v)=+\infty$ 对 $(t,v)\in[0,2\pi]\times\mathbb{R}$ 一致成立.

得到如下定理.

定理 B 若函数 F 连续, 关于 t 是 2π 周期的, 满足条件 (B1)–(B3), 则存在常数 $s_0<s_1$, 使得当 $s_0<s_1$, 问题 (1.3) 无 2π– 周期解; 当 $s\in(s_0,s_1]$ 时, 问题 (1.3) 至少有一个 2π– 周期解.

近几年来, 对 Ambrosetti–Prodi 型结果的研究已经拓展到微分方程的多个领域, 然而据了解, 对差分方程 Ambrosetti–Prodi 型结果的研究较少. 在研究二阶周期边值问题的 Ambrosetti–Prodi 型结果时, 解的先验界估计是关键的一部分; 同样的, 对于二阶离散周期边值问题, 研究其 Ambrosetti–Prodi 型结果, 对解的先验界估计是我们所克服的主要困难. Fabry, Mawhin 和 Nkashama 在文献 [2] 中给非线性函数 F 加上了 Bernstein–Nagumo 条件, 一个自然的问题是, 我们在对二阶离散周期边值问题的 Ambrosetti–Prodi 型结果的研究中不加 Bernstein–Nagumo 条件, 能否获得周期解的存在性以及解的个数与参数之间的关系?

基于此, 本文研究二阶离散周期边值问题

$$\begin{cases} \Delta^2u(t-1)+f(t,u(t),\Delta u(t-1))=s, \qquad t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}, \\ u(0)-u(T)=\Delta u(0)-\Delta u(T)=0 \end{cases} \tag{1.4}$$

解的个数与参数 s 的关系, 其中 $T>1$, $[1,T]_{\mathbb{Z}}=\{1,2,\cdots,T\}$, Δ 是前向差分算子, 且满足 $\Delta u(t)=u(t+1)-u(t)$, $\Delta^2u(t)=\Delta(\Delta u(t))$, $f(t,u,v):[1,T]_{\mathbb{Z}}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 关于 $(u,v)\in\mathbb{R}$ 连续, $s\in\mathbb{R}$.

本文总假定:

(H1) $f:[1,T]_{\mathbb{Z}}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 为连续函数, 且 $\lim\limits_{|u|+|v|\to\infty}f(t,u,v)=+\infty$ 对任意 $t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}$ 一致成立.

定理 1.1 假定条件 (H1) 成立, 则存在常数 $s_1\in\mathbb{R}$, 使得

(i) 当 $s<s_1$ 时, 问题 (1.4) 无解;

(ii) 当 $s=s_1$ 时, 问题 (1.4) 至少有一个解;

(iii) 当 $s>s_1$ 时, 问题 (1.4) 至少有两个解.

2 预备知识

设 $X=\{u\mid u:[0,T]_{\mathbb{Z}}\to\mathbb{R},\ u(0)-u(T)=\Delta u(0)-\Delta u(T)=0\}$ 在范数 $\|u\|=\max\limits_{t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}}|u(t)|$ 下构成 banach 空间. 令

$$u^+=\max\{u,0\},\ \ u^-=\max\{-u,0\}.$$

$$u_L=\min_{t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}}u(t),\ \ u_M=\max_{t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}}u(t).$$

定义投影算子 $P,Q:X\to X$, $Pu(t)=u(0)$, $Qu(t)=\frac{1}{T}\sum\limits_{s=1}^{T}u(s)$, $t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}$. 算子 $H:X\to X$ 定义为 $Hu(t)=\sum\limits_{s=1}^{T}u(s),\ \ t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}$. 因为 $f:[1,T]_{\mathbb{Z}}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 连续, 其相应的 Nemytskii 算子可定义为 $N_f:X\to X,\ N_f(u)(t)=f(t,u(t),\Delta u(t-1)),\ \ t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}$. 对任意函数 $h\in X$, 定义 $\alpha:=Q_\phi(h)$ 如下

$$\sum_{t=1}^{T}\phi^{-1}(h(t)-\alpha)=0,$$

进一步, 函数 $Q_\phi:X\to\mathbb{R}$ 连续.

下面给出二阶周期边值问题

$$\begin{cases}\Delta^2u(t-1)=f(t,u(t),\Delta u(t-1)), & t\in[1,T]_{\mathbb{Z}},\\ u(0)-u(T)=\Delta u(0)-\Delta u(T)=0\end{cases}\tag{2.1}$$

上下解的定义.

定义 2.1 函数 $\alpha\in X$ 是问题 (2.1) 的下解, 是指 α 满足

$$\begin{cases}\Delta^2\alpha(t-1)\geqslant f(t,\alpha(t),\Delta\alpha(t-1)), & t\in[1,T]_{\mathbb{Z}},\\ \alpha(0)=\alpha(T),\ \Delta\alpha(0)\geqslant\Delta\alpha(T).\end{cases}$$

函数 $\beta\in X$ 是问题 (2.1) 的上解, 是指 β 满足

$$\begin{cases}\Delta^2\beta(t-1)\leqslant f(t,\beta(t),\Delta\beta(t-1)), & t\in[1,T]_{\mathbb{Z}},\\ \beta(0)=\beta(T),\ \Delta\beta(0)\leqslant\Delta\beta(T).\end{cases}$$

引理 2.2 若问题 (2.1) 有一个下解 $\alpha(t)$ 和一个上解 $\beta(t)$, 使得 $\alpha(t)\leqslant\beta(t)$, 则问题 (2.1) 有一个解 $u(t)$, 使得 $\alpha(t)\leqslant u(t)\leqslant\beta(t)$; 若 α 是严格上解, $\beta(t)$ 是严格下解, 则有 $\alpha(t)<u(t)<\beta(t)$.

证 构造辅助函数

$$\tilde{u}(t)=\begin{cases}\beta(t), & u>\beta(t),\\ u, & \alpha(t)\leqslant u\leqslant\beta(t),\\ \alpha(t), & u<\alpha(t).\end{cases}$$

考虑修正问题

$$\begin{cases}\Delta^2u(t-1)-f(t,\tilde{u}(t),\Delta\tilde{u}(t-1))-(u(t)-\tilde{u}(t))=0, & t\in(1,T)_{\mathbb{Z}},\\ u(0)-u(T)=\Delta u(0)-\Delta u(T)=0.\end{cases}\tag{2.2}$$

当 $\alpha(t)\leqslant u(t)\leqslant\beta(t), t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}$ 时, 问题 (2.2) 和问题 (2.1) 等价, 由 Brouwer 不动点定理可以得到问题 (2.2) 至少有一个解, 要证明 $\alpha(t)\leqslant u(t), t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}$. 反设存在 $l\in[0,T+1]_{\mathbb{Z}}$, 使得 $\alpha(l)-u(l)>0$, $\alpha(t)-u(t)=\max\limits_{\tau\in[0,T+1]_{\mathbb{Z}}}(\alpha(\tau)-u(\tau))>0$, 根据 $\alpha(0)-u(0)=\alpha(T)-u(T)$ 和 $\Delta(\alpha(0)-u(0))=\Delta(\alpha(T)-u(T))$, 可得 $t\in[0,T]_{\mathbb{Z}}$. 因为当 $\alpha(\tau)-u(\tau)<\alpha(0)-u(0)=\alpha(T)-u(T)$ 时, $\tau\in[0,T]_{\mathbb{Z}}$, 有

$$0>\alpha(1)-u(1)-(\alpha(0)-u(0))\geqslant\alpha(T+1)-u(T+1)-(\alpha(T)-u(T))>0,$$

矛盾. 因此

$$\Delta^2(\alpha(t-1)-u(t-1))=\alpha(t+1)-u(t+1)-2(\alpha(t)-u(t))+(\alpha(t-1)-u(t-1))\leqslant 0,$$

则

$$\begin{aligned}\Delta^2\alpha(t-1)\leqslant\Delta^2u(t-1)&=f(t,\tilde{u}(t),\Delta\tilde{u}(t-1))+(u(t)-\tilde{u}(t))\\&=f(t,\alpha(t),\Delta\alpha(t-1))+(u(t)-\alpha(t)).\\&<f(t,\alpha(t),\Delta\alpha(t-1))\leqslant\Delta^2\alpha(t-1)\end{aligned}$$

矛盾. 因此 $\alpha(t)\leqslant u(t)$, 类似可证 $u(t)\leqslant\beta(t)$. 即问题 (2.1) 至少有一个解 $u(t)$, 使得 $\alpha(t)\leqslant u(t)\leqslant\beta(t), t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}$.

引理 2.3 若 $u\in X$, 则 $\|\Delta u(t-1)\|\leqslant T\|(\Delta^2u(t-1))^{\pm}\|$.

证 根据差分中值定理, $u(t)$ 定义在 $[0,T]_{\mathbb{Z}}$ 上, 存在 $c\in[1,T-1]_{\mathbb{Z}}$, 使得 $\Delta u(c-1)\leqslant\frac{u(T)-u(0)}{T-0}$, 结合边界条件, 当 $t\in(c,T)$, 可以得到

$$\begin{aligned}\Delta u(t-1)=\sum_{s=c}^{t-1}\Delta^2u(s-1)+\Delta u(c-1)&\leqslant\sum_{s=c}^{t-1}\Delta^2u(s-1)+\frac{u(T)-u(0)}{T-0}\\&\leqslant\sum_{s=c}^{t-1}\Delta^2u(s-1)\leqslant\sum_{s=1}^{T}\Delta^2u(s-1)\\&\leqslant T\|(\Delta^2u(t-1))^{+}\|.\end{aligned}$$

当 $t \in (0, c)$, 再应用差分中值定理, 得到 $\Delta u(c) \geqslant \frac{u(T)-u(0)}{T-0}$, 结合边界条件, 则有

$$\begin{aligned}\Delta u(t-1) = \sum_{s=c+1}^{t-1} \Delta^2 u(s-1) + \Delta u(c) \geqslant -\sum_{s=t-1}^{c+1} \Delta^2 u(s-1) \geqslant -\sum_{s=1}^{T} \Delta^2 u(s-1) \\ \geqslant -T\|(\Delta^2 u(t-1))^+\|.\end{aligned}$$

故 $\|\Delta u(t-1)\| \leqslant T\|(\Delta^2 u(t-1))^+\|$, 同理可证 $\|\Delta u(t-1)\| \leqslant T\|(\Delta^2 u(t-1))^-\|$.

引理 2.4 对问题 (1.4), 假设条件 (H1) 成立, 对任意常数 $b \in \mathbb{R}$, 若 $b > \min f(t,u,v)$, $(t,u,v) \in [1,T]_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}^2$, 则存在 $\hat{\rho} > 0$, 使得对任意 $s \leqslant b$, 问题 (1.4) 的所有可能解 u 均属于开球 $B_{\hat{\rho}}$ 中.

证 令 $\rho_b = \max\{b - f(t,u,v),\ (t,u,v) \in [1,T]_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}^2\}$, 则 $\rho_b \in (0,\infty)$, 对任意的 $s \leqslant b$, 设 u 为问题 (1.4) 的解, 则 $(\Delta^2 u(t-1))^+ = (s - f(t,u(t),\Delta u(t-1)))^+ \leqslant (b - f(t,u(t),\Delta u(t-1)))^+ \leqslant \rho_b$. 对问题 (1.4) 方程两端从 $t=1$ 到 $t=T$ 求和分, 再结合周期边界条件, 得到

$$s = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} f(t,u(t),\Delta u(t-1)) = QN_f(u).$$

根据引理 2.3 可知, $\|\Delta u(t-1)\| \leqslant T\|(\Delta^2 u(t-1))^{\pm}\| \leqslant T\rho_b$. 由条件 (H1) 得对任意 $b \in R$, 存在 $R > 0$, 使得当 $|u| + |v| \geqslant R$ 时, $f(t,u,v) > b$. 如果 $u_L \geqslant R$, 那么

$$|u| + |v| \geqslant R,\ s = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} f(t,u(t),\Delta u(t-1)) = QN_f(u) > b,$$

这与 $s \leqslant b$ 矛盾, 因此 $u_L < R$, 同理可得 $u_M > -R$.

设 $c, d \in [1,T]_{\mathbb{Z}}$, 使得 $u_M = u(c)$, $u_L = u(d)$, 由 $u_M - u_L = \sum\limits_{t=d+1}^{c} \Delta u(t-1)$ 得

$$u_M \leqslant u_L + \sum_{t=1}^{T} |\Delta u(t-1)|,$$

从而 $\|u\| \leqslant R + T^2\rho_b$. 取 $\hat{\rho} \geqslant R + 2T^2\rho_b$, 则问题 (1.4) 的所有可能解均属于开球 $B_{\hat{\rho}}$ 中.

引理 2.5 [9] 问题 (2.1) 的解可表示为

$$u = Pu + QN_f(u) + [H \circ (I - Q_\phi) \circ H(I-Q)] \circ QN_f(u) := \Phi(u)$$

其中 $\Phi : X \to X$ 全连续.

引理 2.6 [9] 假设存在 $M > 0$, 对任意的 $(t,u,v) \in [0,T] \times \mathbb{R}^2$, $|f(t,u,v)| < M$ 成立, 若问题 (2.1) 存在下解 α 和上解 β, 满足 $\alpha(t) \leqslant \beta(t)$, $t \in [0,T]$, 则问题 (2.1) 存在解 u, 满足 $\alpha(t) \leqslant u(t) \leqslant \beta(t)$, $t \in [0,T]$, 若 β, α 为问题 (2.1) 的严格上下解, 且有 $\alpha(t) < u(t) < \beta(t)$, 则

$$d_{LS}[I - \Phi, \Omega_{\alpha,\beta}, 0] = 1.$$

其中 $\Omega_{\alpha,\beta} = \{u \in X : \alpha(t) < u(t) < \beta(t),\ |u'(t)| < c,\ t \in [0,T]\}$.

$$c \geqslant 2M + r + 1,\ r = \|\alpha\| + \|\beta\|.$$

3 主要结果的证明

定理 1.1 的证明 令 $S_j=\{s\in\mathbb{R}:(1.1)$ 至少有 j 个解 $\}$ $(j\geqslant 1)$.

(a) 首先宣称 $S_1\neq\emptyset$.

取 $s^*>\max\limits_{t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}}f(t,0,0)$, 由条件 (H1) 知, 存在 $R^*<0$, 使得

$$\min_{t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}}f(t,R^*,0)>s^*.$$

则 $\alpha\equiv R^*<0$ 为 $s=s^*$ 时问题 (1.4) 的严格下解, $\beta=0$ 是问题 (1.4) 的严格上解. 对任意 $s^*\in\mathbb{R}$, 取 $n>\min\limits_{t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}}f(t,R^*,0)>s^*$. 设 $\rho_n=\max\{n-f(t,u,v),\ (t,u,v)\in[1,T]_{\mathbb{Z}}\times\mathbb{R}^2\}$. 由条件 (H1) 知, 对任意 $n>0$, 存在 $R^*>0$, 使得当 $|u|+|v|\geqslant R^*$ 时, $f(t,u,v)>n$. 设 $u(t)$ 为 $s=s^*$ 时问题 (1.4) 的可能解, 根据引理 2.4 可知, $u_L<R_*$ 成立, 令 $\rho\geqslant|R_*|+2T^2\rho_n$.

记 $\tilde{f}(t,u,v)$ 为 $f(t,u,v)$ 的截断函数.

$$\tilde{f}(t,u,v)=\begin{cases}f(t,\rho,\rho), & (t,u,v)\in[1,T]_{\mathbb{Z}}\times[\rho,+\infty)\times[\rho,+\infty),\\ f(t,\rho,v), & (t,u,v)\in[1,T]_{\mathbb{Z}}\times[\rho,+\infty)\times[-\rho,\rho],\\ f(t,\rho,-\rho), & (t,u,v)\in[1,T]_{\mathbb{Z}}\times[\rho,+\infty)\times(-\infty,-\rho],\\ f(t,u,-\rho), & (t,u,v)\in[1,T]_{\mathbb{Z}}\times[-\rho,\rho]\times(-\infty,-\rho],\\ f(t,u,v), & (t,u,v)\in[1,T]_{\mathbb{Z}}\times[-\rho,\rho]\times[-\rho,\rho],\\ f(t,u,\rho), & (t,u,v)\in[1,T]_{\mathbb{Z}}\times[-\rho,\rho]\times[\rho,+\infty),\\ f(t,-\rho,-\rho), & (t,u,v)\in[1,T]_{\mathbb{Z}}\times(-\infty,-\rho]\times(-\infty,-\rho],\\ f(t,-\rho,v), & (t,u,v)\in[1,T]_{\mathbb{Z}}\times(-\infty,-\rho]\times[-\rho,\rho],\\ f(t,-\rho,\rho), & (t,u,v)\in[1,T]_{\mathbb{Z}}\times(-\infty,-\rho]\times[\rho,+\infty),\end{cases}$$

则 $\tilde{f}(t,u,v)$ 为有界函数, 构造辅助问题

$$\begin{cases}\Delta^2u(t-1)+\tilde{f}(t,u(t),\Delta u(t-1))=s, & t\in[1,T]_{\mathbb{Z}},\\ u(0)-u(T)=\Delta u(0)-\Delta u(T)=0.\end{cases}\tag{3.1}$$

记 $K=[1,T]_{\mathbb{Z}}\times[-\rho,\rho]\times[-\rho,\rho]$ 为一闭区域, 由引理 2.6 知, 辅助问题 (3.1) 存在解 $u_1(t)$, 满足 $\alpha(t)\leqslant u_1(t)\leqslant\beta(t)$, $t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}$, 显然 $u_1(t)$ 也是问题 (1.4) 的解, 因此根据引理 2.6 知, $s^*\in S_1$.

(b) 如果 $\tilde{s}\in S_1$, 且 $\tilde{s}<s$, 则 $s\in S_1$.

令 $\tilde{u}(t)$ 为 $s=\tilde{s}$ 时问题 (3.1) 的解, 对任意给定的 n, 若 $s\in(\tilde{s},n)$, 类似于 (a) 中的截断技巧, $\tilde{u}(t)$ 为此时问题 (3.1) 的严格上解, 再取 $R_1<\tilde{u}_L$, 使得

$$\min_{t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}}f(t,R_1,0)>s,$$

则 $\alpha\equiv R_1<0$ 为问题 (3.1) 的严格下解, 由引理 2.6 及 n 的任意性可知, 当 $n\to\infty$ 时, 若 $s>\tilde{s}$, 则 $s\in S_1$.

(c) $s_1=\inf S_1<\infty$ 且 $S_1\supset(s_1,\infty)$.

令 $s\in\mathbb{R}$, 设 u 为辅助问题 (3.1) 的一个解, 则 $\|\Delta u(t-1)\|\leqslant\rho$, $s=QN_f(u)$, 且有 $s\geqslant c$, 其中 $c=\inf\limits_{[1,T]_{\mathbb{Z}}\times\mathbb{R}\times[-\rho,\rho]}f(t,u,\Delta u(t-1))$. 若 $s=c$, 则 $s_1=\inf S_1<\infty$, 运用 (b) 的结论, 即得 $S_1\supset(s_1,\infty)$.

(d) $S_2\supset(s_1,\infty)$.

令 $s_3<s_1<s_2<n$, 对于任意的 $s\in(-\infty,n)$, 令 $\Phi(s,\cdot)$ 为问题 (3.1) 在 X 的不动点算子, 根据引理 2.4, 可以找到相应的 $\hat{\rho}$, 使得对于 $s\in[s_3,s_2]$ 时, $I-\Phi(s,\cdot)$ 的任意可能零点 u 均满足 $u\in B_{\hat{\rho}}$. 因此 Leray-schauder 度 $\deg[I-\Phi(s,\cdot),B_{\hat{\rho}},0]$ 有定义, 且不依赖于参数 s, 利用 c 的结论, 对于 $u\in X$, $u-\Phi(s_3,\cdot)\neq 0$, 说明 $\deg[I-\Phi(s_3,\cdot),B_{\hat{\rho}},0]=0$, 且 $\deg[I-\Phi(s_2,\cdot),B_{\hat{\rho}},0]=0$. 根据 Leray-schauder 度的切除性可知, 如果 $\rho'>\hat{\rho}$, 则 $\deg[I-\Phi(s_2,\cdot),B_{\rho'},0]=0$.

令 $\hat{u}$ 为 $s\in(s_1,s_2)$ 时问题 (3.1) 的解, 则 $\hat{u}$ 是 $s=s_2$ 时问题 (3.1) 的严格上解, 取 $R<\hat{u}_L$ 满足 $\min\limits_{t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}}f(t,R,0)>s_2$, 则 R 为 $s=s_2$ 时问题 (3.1) 的严格下解, 由引理 2.6 知, 当 $s=s_2$ 时, 问题 (3.1) 在 $\Omega_{R,\hat{u}}$ 中有一个解, 且满足 $\deg[I-\Phi(s_2,\cdot),\Omega_{R,\hat{u}},0]=1$, 取 ρ' 充分大, 利用 Leray-schauder 度的可加性可得

$$\deg[I-\Phi(s_2,\cdot),B_{\rho'}\backslash\Omega_{R,\hat{u}},0]=\deg[I-\Phi(s_2,\cdot),B_{\rho'},0]-\deg[I-\Phi(s_2,\cdot),\Omega_{R,\hat{u}},0]=-1,$$

则 $s=s_2$ 时, 问题 3.1 在 $B_{\rho'}\backslash\Omega_{R,\hat{u}}$ 中有第二个解, 当 $n\to\infty$ 时, $S_2\supset(s_1,\infty)$.

(e) $s_1\in S_1$.

令 $\{\eta_k\}$ 为 (s_1,n) 中收敛到 s_1 的一个序列, 若 u_k 为 $s=\eta_k$ 时问题 (3.1) 的解, 则 $u_k=\Phi(\eta_k,u_k)$, 由引理 2.4 知, 对任意的 $k\geqslant 1$, 存在 $\rho_k>0$, 使得 $\|u_k\|<\rho_k$. 由 Φ 的紧性, u_k 收敛到当 $s=s_1$ 时问题 (3.1) 的解 u. 由 n 任意性, $s_1\in S_1$, 若 u 是辅助问题 (3.1) 的解, 则 u 一定是问题 (1.4) 的解, 因此, 当 f 满足条件 (H1) 时, 存在 $s_1\in\mathbb{R}$, 使得当 $s<s_1$ 时, 问题 (1.4) 无解; 当 $s=s_1$ 时, 问题 (1.4) 至少有一个解; 当 $s>s_1$ 时, 问题 (1.4) 至少有两个解.

4 应用

例 1 考虑二阶离散周期边值问题

$$\begin{cases}\Delta^2u(t-1)+u^2(t)+(\Delta u(t-1))^2=s, & t\in[1,T]_{\mathbb{Z}},\\ u(0)-u(T)=\Delta u(0)-\Delta u(T)=0\end{cases}\tag{4.1}$$

解的存在性及解的个数与参数的关系.

解 这里取 $f(t,u(t),\Delta u(t-1))=u^2(t)+(\Delta u(t-1))^2$, 因为当 $|u(t)|+|\Delta u(t-1)|\to\infty$ 时, $u^2(t)+(\Delta u(t-1))^2\to+\infty$, 所以 $\lim\limits_{|u|+|v|\to\infty}f(t,u,v)=+\infty$ 对任意 $t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}$ 一致成立. 又 $f:[1,T]_{\mathbb{Z}}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 为连续函数, 则 f 满足条件 (H1).

根据定理 1.1, 存在常数 $s_1\in\mathbb{R}$, 使得当 $s<s_1$ 时, 问题 (4.1) 无解; 当 $s=s_1$ 时, 问题 (4.1) 至少有一个解; 当 $s>s_1$ 时, 问题 (4.1) 至少有两个解.

参 考 文 献

[1] Ambrosetti A, Prodi G. On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces[J]. Annali Di Matematica Pura Ed Applicata, 1972, 93(1): 231–246.

[2] Fabry C, Mawhin J, Nkashama M N. A Multiplicity Result for Periodic Solutions of Forced Nonlinear Second order Ordinary Differential Equations[J]. Bulletin of the London Mathematical Society, 1986(2): 173–180.

[3] Chiappinelli R, Mawhin J, Nugari R. Generalized Ambrosetti–Prodi conditions for nonlinear two–point boundary value problems[J]. Journal of Differential Equations, 1987, 69(3): 422–434.

[4] Paiva F, Montenegro M. An Ambrosetti–Prodi type result for a quasilinear Neumann problem[J], Proceedings Edinburgh Mathematical Society, 2012, 55: 771–780.

[5] Mawhin J, Rebelo C, Zanolin F. Continuation theorems for Ambrosetti-Prodi type periodic problems[J]. Communications in Contemporary Mathematics, 2000, 2(1): 0000007.

[6] Feng C, Chen P. The existence of solutions for nonlinear two–point boundary problems with parameter under Ambrosetti–Prodi condition[J]. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis, 2007, 14(4): 545–555.

[7] Ma L Y. The Ambrosetti-Prodi type results of the nonlinear second-order Neumann boundary value problem[J]. Journal of Shandong University(Natural Science), 2015.

[8] Mawhin J. First order ordinary differential equations with several periodic solutions[J]. Zeitschrift F ü r Angewandte Mathematik Und Physik Zamp, 1987, 38(2): 257–265.

[9] Manasevich R, Mawhin J. Boundary value problems for nonlinear perturbations of vector p-laplacian-like operators[J]. Journal of the Korean Mathematical Society, 2000, 47(5): 47–11.

[10] Filho D C, Morais D, Pereira F R. Critical Ambrosetti–Prodi type problems for systems of elliptic equations[J]. Nonlinear Analysis, 2008, 68(1): 194–207.

AMBROSETTI–PRODI TYPE RESULTS FOR NONLINEAR SECOND-ORDER DISCRETE PERIODIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS

ZHAO Jiao

(*College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Gansu Lanzhou 730070, China*)

Abstract: In this paper, we discuss the relationship between the number of the solutions for second-order discrete periodic boundary value problem

$$\begin{cases} \Delta^2 u(t-1) + f(t, u(t), \Delta u(t-1)) = s, \qquad t \in [1, T]_{\mathbb{Z}}, \\ u(0) - u(T) = \Delta u(0) - \Delta u(T) = 0 \end{cases}$$

and the parameter s, where $f(t, u, v) : [1, T]_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is continuous with respect to $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $s \in \mathbb{R}$. By using the method of the upper and lower solutions and topological degree techniques, Ambrosetti-Prodi type result is obtained, and some related conclusions on this topic are generalized.

Keywords: second-order periodic BVPs; Ambrosetti–Prodi type results; upper and lower solutions; topological degree techniques

2010 MR Subject Classification: 39A12; 39A23