Vol. 41 (2021)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一类带有扩散项的非线性抛物问题

樊佳幸, 杨 晗
(西南交通大学数学学院, 四川 成都 611756)

摘 要: 本文研究了一类带有扩散项的非线性抛物方程的初边值问题. 利用 Galerkin 方法, 借助 Gagliardo-Nirenberg 不等式、Sobolev 嵌入定理和势井理论, 获得了关于弱解整体存在和爆破的充分条件的结果, 推广了扩散项系数为有界情形的结果.

关键词: 非线性抛物方程; Galerkin 方法; 势井理论; 整体解; 爆破
MR(2010) **主题分类号**: 35A01; 35A24 **中图分类号**: O175.29
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2021)04-0342-15

1 引言

本文研究如下带有扩散项的非线性抛物方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_t - (\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)^\gamma \Delta u = |u|^{p-1}u, (x,t) \in \Omega \times [0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0, (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]. \end{cases} \tag{1.1}$$

其中, $(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)^\gamma \Delta u$ 为非局部扩散项, $\Omega \subset R^n$ 为边界充分光滑的有界区域, 常数 $\gamma \in R$, $p>1$.

(1.1) 可用来描述热传导现象、半导体中的电子与空穴流、流体在多孔介质中的运动规律等问题. 当 $\gamma = 0$ 时, (1.1) 是经典的抛物型方程, 与其相关的抛物方程整体解的存在和爆破问题已被许多学者进行了广泛的研究, 详见 [1-6]. 当 $\gamma \neq 0$ 时, (1.1) 即为非局部反应扩散方程, 与之相关的抛物方程的研究也有一些成果. 例如, 在文献 [7] 中, Sismen 等考虑了如下非线性抛物方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_t - a(l(u))\Delta u + |u|^{p-2}u = f(u), (x,t) \in \Omega \times R, \\ u(x,0) = u_0(x), x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0, (x,t) \in \partial\Omega \times R. \end{cases}$$

其中, $\Omega \subset R^n$ 为边界充分光滑的有界区域, 常数 $p \geq 2$. $f: R \to R$ 是利普希茨连续函数. $l: L^2(\Omega) \to R$ 是线性连续函数, 即存在一个函数 $g \in L^2(\Omega)$, 使得对所有的 $u \in L^2(\Omega)$, 都有 $l(u) = l_g(u) = \int_\Omega g(x)u(x)dx$ 成立. $0<m \leq a(s) \leq M(s \in R)$. 采用 Galerkin 方法和 Aubin 紧性定理, 研究了弱解的整体存在性、唯一性以及关于初值的连续性.

*收稿日期: 2020-06-25 接收日期: 2021-01-18
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11701477).
作者简介: 樊佳幸 (1996–), 女, 四川广元, 硕士, 主要研究方向: 偏微分方程.

事实上, 在以往大多数文献中, 均假设扩散项系数是有界的, 即存在正常数 m, M, 使得 $0<m \le a(s) \le M<\infty (s \in R)$, 此时问题总是非退化的, 如文献 [8–10]. 但在刻画扰动传播的有限性等问题的反应扩散方程时总会出现退化情形, 因此有必要研究具有退化性的反应扩散方程. 如 Almeida 等在文献 [11] 中研究了如下非局部退化抛物问题

$$\begin{cases} u_t - (\int_\Omega u^2 dx)^\gamma \Delta u = f(x,t), (x,t) \in \Omega \times [0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0, (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]. \end{cases}$$

此时, 扩散项系数 $(\int_\Omega u^2 dx)^\gamma (\gamma \in R)$ 可能是零或无穷大. 文 [11] 采用扰动方法, 将退化问题转化成非退化问题, 利用文献 [12] 中非退化问题弱解的存在性, 通过建立解的相应先验估计, 得到了退化问题弱解整体唯一存在和局部唯一存在的条件, 并研究了解的渐近行为.

本文旨在研究另一种扩散项为 $(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)^\gamma \Delta u (\gamma \in R)$ 的情形, 此时, 扩散项系数 $(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)^\gamma (\gamma \in R)$ 也可能是零或无穷大, 且进一步将文献 [11] 中非齐次项 $f(x,t)$ 拓展为非线性项 $|u|^{p-1}u$, 受文献 [13] 的启发, 结合 Gagliardo-Nirenberg 不等式、Sobolev 嵌入定理和势井理论, 利用 Galerkin 方法, 建立了弱解整体唯一存在和爆破的充分条件.

首先给出弱解的定义.

定义 1 若 $u \in L^\infty(0,T; H^1(\Omega))$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$, 对任意的 $w \in H_0^1(\Omega)$, $t \in [0,T]$, 都有等式

$$\int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial t}\omega + (\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)^\gamma \nabla u \cdot \nabla\omega - |u|^{p-1}u\omega) dx = 0 \tag{1.2}$$

成立, 且

$$u(x,0) = u_0(x), x \in \Omega.$$

则称函数 u 是问题 (1.1) 的一个弱解.

现给出本文主要结论如下.

定理 1 假设 $u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$, $\gamma>\frac{p-1}{2}$, 当 $n>2$ 时, $1<p \le \frac{n+2}{n-2}$; 当 $n \le 2$ 时, $1<p<\infty$. 则问题 (1.1) 存在一个整体弱解 $u(x,t)$, 满足

$$u \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)), \qquad \nabla u \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)), \qquad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T; L^2(\Omega)).$$

若 $n<2$, 则由初值函数 $u_0(x)$ 决定的整体弱解 $u(x)$ 是唯一的.

定理 2 假设 $0<\gamma<\frac{p-1}{2}$, 当 $n>2$ 时, $1<p \le \frac{n+2}{n-2}$; 当 $n \le 2$ 时, $1<p<\infty$. 则对每一个包含在势井 W 中的初值函数 $u_0(x)$, 初边值问题 (1.1) 都存在一个包含在 $\overline{W}$ 中的整体弱解 $u(x,t)$, 使得

$$u \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)), \qquad \nabla u \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)), \qquad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T; L^2(\Omega)).$$

进一步的, 有 $t>0$, 因此 $u(x,t)$ 满足

$$当 t \ge s \ge 0 时, \|u(t)\|_{L^2} \le \|u(s)\|_{L^2}. \tag{1.3}$$

其中, $\overline{W}$是W在$H_0^1(\Omega)$中的闭包, W 的定义见 (2.6).

若 $n<2$, 则由初值函数 $u_0(x)$ 决定的整体弱解 $u(x)$ 是唯一的.

定理 3 假设 $u_0(x)\in H_0^1(\Omega)$, $0<\gamma<\frac{p-1}{2}$, $1<p<\frac{n+4}{n}$. 则存在一个正常数

$$T_0=\frac{n-np+4\gamma+4}{c(p-1)(4\gamma-2n\gamma+4)}\|u_0\|_{L^2}^{\frac{(1-p)(4\gamma-2n\gamma+4)}{n-np+4\gamma+4}}, c\in R^+,$$

使得当 $0\le t\le T_0$ 时, 问题 (1.1) 存在一个局部弱解 $u(x,t)$, 满足

$$u\in L^\infty(0,T_0;L^2(\Omega)),\qquad \nabla u\in L^\infty(0,T_0;L^2(\Omega)),\qquad \frac{\partial u}{\partial t}\in L^2(0,T_0;L^2(\Omega)),$$

并且有

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2+\int_0^t\|\nabla u(\tau)\|_{L^2}^{2\gamma+2}d\tau-\int_0^t\|u(\tau)\|_{L^{p+1}}^{p+1}d\tau=\frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2 \tag{1.4}$$

和

$$J(u(t))\le J(u_0),\ t\in[0,T_0] \tag{1.5}$$

成立. 其中 $J(u)$ 的定义见 (2.5).

定理 4 假设定理 3 的条件全部满足. 进一步的假设

$$J(u_0(x))<0 \tag{1.6}$$

且

$$\|u_0\|_{L^2}<(\mathrm{mes}(\Omega))^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p+1}{(p-1)(p-2\gamma-1)T}\right)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{1.7}$$

则问题 (1.1) 满足初值函数的弱解不是全局的, 即在有限时间

$$\frac{p+1}{(p-1)(p-2\gamma-1)}(\mathrm{mes}(\Omega))^{\frac{p-1}{2}}\|u_0\|_{L^2}^{1-p}>T$$

内爆破.

定理 5 假设定理 1 的条件成立, 对任意固定的 $T>0$, 令 u, v 是问题 (1.1) 满足 $u(0)=u_0$, $v(0)=v_0$ 的两个整体弱解, 若 $n<2$, 则有

$$\|u-v\|_{L^2}^2\le C(T,\|\nabla u_0\|_{L^2},\|u_0\|_{L^{p+1}},\|\nabla v_0\|_{L^2},\|v_0\|_{L^{p+1}})\|u_0-v_0\|_{L^2}^2.$$

全文将 $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ 和 $\|\cdot\|_{H^s(\Omega)}$ 分别简记为 $\|\cdot\|_{L^p}$ 和 $\|\cdot\|_{H^s}$, 记 $(u,v)=\int_\Omega uvdx$, c 表示不依赖于未知函数的正常数, 在不同地方不一定相同.

2 准备工作

首先给出结论证明过程中需要的两个引理.

引理 1 [12] (Gagliardo-Nirenberg 不等式) 对任意函数 $u(x)\in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p\ge 1$ 且 $r\ge 1$, 有如下不等式成立,

$$\|u\|_{L^q}\le C_1\|\nabla u\|_{L^p}^{\theta}\|u\|_{L^r}^{1-\theta}, \tag{2.1}$$

其中

$$\theta=\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{p}+\frac{1}{r}\right)^{-1}, \tag{2.2}$$

且

(1) 当 $p\geq n=1$ 时, $r\leq q\leq\infty$;

(2) 当 $n>1$ 且 $p<n$ 时, 若 $r\leq\frac{np}{n-p}$, 则 $r\leq q\leq\frac{np}{n-p}$; 若 $r\geq\frac{np}{n-p}$, 则 $\frac{np}{n-p}\leq q\leq r$;

(3) 当 $p=n>1$ 时, $r\leq q\leq\infty$;

(4) 当 $p>n>1$ 时, $r\leq q\leq\infty$.

常数 C_1 仅依赖于 n,p,q,r.

引理 2 [12] (Sobolev 嵌入定理) 对任意函数 $u(x)\in H_0^1(\Omega)$, 有

$$\|u\|_{L^{p+1}}\leq C_2\|\nabla u\|_{L^2}, \tag{2.3}$$

其中, 当 $n>2$ 时, $0\leq p\leq\frac{n+2}{n-2}$; 当 $n\leq 2$ 时, $0\leq p<\infty$, 常数 C_2 仅依赖于 n,p,Ω. 当 $n<2$ 时, $H_0^1(\Omega)$ 中的函数是连续的, 且

$$\sup|u|\leq C_3\|\nabla u\|_{L^2}, \tag{2.4}$$

常数 C_3 仅依赖于 n,Ω.

下面引入能量泛函

$$J(u)=\frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla u\|_{L^2}^{2\gamma+2}-\frac{1}{p+1}\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}, \tag{2.5}$$

定义势井

$$W=\left\{u|u\in H_0^1(\Omega),0\leq J(\lambda u)<d,\lambda\in[0,1]\right\}. \tag{2.6}$$

其中势井深度

$$d=\inf_{u\in H_0^1(\Omega),u\not\equiv 0}\sup_{\lambda\geq 0}J(\lambda u). \tag{2.7}$$

接下来, 给出势井深度和势井的相关性质.

引理 3 假设 $u\in H_0^1(\Omega)$, $-1<\gamma<\frac{p-1}{2}$, 当 $n>2$ 时, $0\leq p\leq\frac{n+2}{n-2}$; 当 $n\leq 2$ 时, $0\leq p<\infty$. 则 $d>0$.

证 显然

$$J(\lambda u)=\frac{\lambda^{2\gamma+2}}{2\gamma+2}\|\nabla u\|_{L^2}^{2\gamma+2}-\frac{\lambda^{p+1}}{p+1}\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1},$$

考虑对任意 $\lambda>0$, 有

$$\frac{d}{d\lambda}J(\lambda u)=\lambda^{2\gamma+1}\|\nabla u\|_{L^2}^{2\gamma+1}-\lambda^p\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}=\lambda^p(\lambda^{2\gamma+1-p}\|\nabla u\|_{L^2}^{2\gamma+1}-\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}). \tag{2.8}$$

令 $h(\lambda)=\lambda^{2\gamma+1-p}\|\nabla u\|_{L^2}^{2\gamma+1}-\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}$. 因为 $-1<\gamma<\frac{p-1}{2}$, 所以

$$h'(\lambda)=(2\gamma+1-p)\lambda^{2\gamma-p}\|\nabla u\|_{L^2}^{2\gamma+1}<0, \tag{2.9}$$

并且

$$\lim_{\lambda\longrightarrow 0^+}h(\lambda)=+\infty,\lim_{\lambda\longrightarrow+\infty}h(\lambda)<0. \tag{2.10}$$

由 (2.9), (2.10) 可以得到, 存在唯一一个 $\lambda^*=\left(\frac{\|\nabla u\|_{L^2}^{2\gamma+2}}{\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p-2\gamma-1}}>0$ 使得 $h(\lambda^*)=0$. 进一步的, 由 (2.8) 有, $\frac{d}{d\lambda}J(\lambda u)|_{\lambda=\lambda^*}=\lambda^p h(\lambda)$. 因为当 $\lambda\in(0,\lambda^*)$ 时, $h(\lambda)>0$; 当 $\lambda\in(\lambda^*,+\infty)$ 时, $h(\lambda)<0$. 因此可以得到, 当 $\lambda\in(0,\lambda^*)$ 时, $J(\lambda u)$ 单调递增; 当 $\lambda\in(\lambda^*,+\infty)$ 时, $J(\lambda u)$ 单调递减. 由于 $J(\lambda u)|_{\lambda=0}=0$,$-1<\gamma<\frac{p-1}{2}$ 及当 $n>2$ 时, $0\le p\le\frac{n+2}{n-2}$; 当 $n\le 2$ 时, $0\le p<\infty$, 根据引理 2 可以得到

$$\begin{aligned}\sup_{\lambda\ge0}J(\lambda u)&=J\left(\left(\frac{\|\nabla u\|_{L^2}^{2\gamma+2}}{\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p-2\gamma-1}}u\right)=\frac{p-2\gamma-1}{(2\gamma+2)(p+1)}\left(\frac{\|\nabla u\|_{L^2}^{(2\gamma+2)(p+1)}}{\|u\|_{L^{p+1}}^{(2\gamma+2)(p+1)}}\right)^{\frac{1}{p-2\gamma-1}}\\&\ge\frac{p-2\gamma-1}{(2\gamma+2)(p+1)}\left(\frac{1}{C_2}\right)^{\frac{(2\gamma+2)(p+1)}{p-2\gamma-1}}>0.\end{aligned}$$

引理 4 令 $W_*=\left\{u|u\in H_0^1(\Omega),\|\nabla u\|_{L^2}^{2\gamma+2}-\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}>0,J(u)<d\right\}$, 则

$$W=W_*\cup\{0\}.$$

证 (1) 假设 $u\in W$且$u\ne0$, 则

$$\sup_{\lambda\ge0}J(\lambda u)=J\left(\left(\frac{\|\nabla u\|_{L^2}^{2\gamma+2}}{\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p-2\gamma-1}}u\right)\ge d,$$

因此 $\left(\frac{\|\nabla u\|_{L^2}^{2\gamma+2}}{\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p-2\gamma-1}}>1$, 故 $u\in W_*$.

(2) 反过来, 假设 $u\in W_*$, 则有

$$\frac{\|\nabla u\|_{L^2}^{2\gamma+2}}{\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}}>1,$$

而当 $0<\lambda\le1$ 时, $\frac{\partial}{\partial\lambda}J(\lambda u)>0$ 且 $J(\lambda u)|_{\lambda=0}=0$, 因此 $\sup_{\lambda\in[0,1]}J(\lambda u)=J(u)<d$.

综上 $W=W_*\cup\{0\}$.

下面的定理与 d 的上界有关.

引理 5 考虑以下非线性正特征值问题

$$\begin{aligned}(\int_\Omega|\nabla u|^2dx)^\gamma\Delta u+\lambda|u|^{p-1}u=&0,\quad\lambda>0,\\u|\partial\Omega=&0.\end{aligned}\tag{2.11}$$

其中, $-1<\gamma<\frac{p-1}{2}$, 当 $n>2$ 时, $0\le p\le\frac{n+2}{n-2}$; 当 $n\le2$ 时, $0\le p<\infty$. 若对 $\lambda>0$, (2.11) 有一特征函数 u_λ, 则 d 是有上界的, 且势井 W 在 $H_0^1(\Omega)$ 中是有界的.

证 一方面,

$$J\left(\left(\frac{\|\nabla u_\lambda\|_{L^2}^{2\gamma+2}}{\|u_\lambda\|_{L^{p+1}}^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p-2\gamma-1}}u_\lambda\right)\ge d.$$

另一方面, 由 (2.11) 可以得到

$$\|\nabla u_\lambda\|_{L^2}^{2\gamma+2}-\lambda\|u_\lambda\|_{L^{p+1}}^{p+1}=0.$$

因此

$$J\left(\left(\frac{\|\nabla u_\lambda\|_{L^2}^{2\gamma+2}}{\|u_\lambda\|_{L^{p+1}}^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p-2\gamma-1}}u_\lambda\right)=J(\lambda^{\frac{1}{p-2\gamma-1}}u_\lambda)=\frac{p-2\gamma-1}{(2\gamma+2)(p+1)}\cdot\|\nabla u_\lambda\|_{L^2}^{2\gamma+2}\cdot\lambda^{\frac{2\gamma+2}{p-2\gamma-1}},$$

由以上可知 d 是有上界的.

令 $u\in W$ 且 $u\neq 0$, 则由引理 4 得到

$$\|\nabla u\|_{L^2}^{2\gamma+2}-\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}>0.$$

因此

$$d>J(u)=\frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla u\|_{L^2}^{2\gamma+2}-\frac{1}{p+1}\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}\geq\frac{p-2\gamma-1}{(2\gamma+2)(p+1)}\|\nabla u\|_{L^2}^{2\gamma+2},$$

由于 $-1<\gamma<\frac{p-1}{2}$, 即

$$\|\nabla u\|_{L^2}^{2\gamma+2}\leq\frac{(2\gamma+2)(p+1)}{p-2\gamma-1}d.$$

所以, 势井 W 包含在球 $\left\{v|v\in H_0^1(\Omega),\|\nabla v\|_{L^2}^{2\gamma+2}\leq\frac{(2\gamma+2)(p+1)}{p-2\gamma-1}d\right\}$ 中.

3 当 $\gamma>\frac{p-1}{2}$ 时, 解的全局性和唯一性

证明定理 1 利用 Galerkin 方法. 取空间 $H_0^1(\Omega)$ 的一组基 $\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$, 且 ω_i 是 $-\Delta$ 算子的狄利克雷问题的特征函数:

$$\begin{cases}-\Delta\omega_i=\lambda_i\omega_i,\\ \omega_i|_{\partial\Omega}=0.\end{cases}\tag{3.1}$$

将 (3.1) 两边同时与 ω_i 做内积, 可知特征值 $\lambda_i\geq 0, i\in N^*$, 将 ω_i 标准化, 使得 $\|\omega_i\|_{L^2}=1$. 接下来, 寻找 (1.1) 具有以下形式的近似解

$$u_m(x,t)=\sum_{i=1}^{m}g_{im}(t)\omega_i(x),g_{im}(t)\in C^1([0,T]),\tag{3.2}$$

其中未知函数 g_{im} 是由以下常微分方程决定,

$$(u_{mt},\omega_j)+\left(\left(\int_\Omega|\nabla u_m|^2dx\right)^{\gamma}\nabla u_m,\nabla\omega_j\right)=(|u_m|^{p-1}u_m,\omega_j),1\leq j\leq m,\tag{3.3}$$

且初值条件满足

$$u_m(0)=u_{0m},u_{0m}=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{im}(t)\omega_i(x)\to u_0\ 在H_0^1(\Omega)中,m\to\infty.\tag{3.4}$$

因此, 由常微分方程中 Picard 迭代法, (3.3), (3.4) 在某一区间 $[0,t_m], 0<t_m<T$ 中存在一个局部解 $u_m(t)$. 下面证明, 对任意的 $T>0$, 这样的解可以通过先验估计延拓到整个区间 $[0,T]$ 上.

在 (3.3) 的两边同时乘以 g'_{im}, 对 i 从 1 到 m 求和, 并关于 t 积分, 得到

$$\int_0^t \|u_{mt}\|_{L^2}^2 d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t \|\nabla u_m\|_{L^2}^{2\gamma} \frac{d}{d\tau}\|\nabla u_m\|_{L^2}^2 d\tau = \frac{1}{p+1}\|u_m\|_{L^{p+1}}^{p+1} - \frac{1}{p+1}\|u_{0m}\|_{L^{p+1}}^{p+1}, \tag{3.5}$$

令 $f(t)=\|\nabla u_m\|_{L^2}^2$, 则 (3.5) 左边第二项

$$\frac{1}{2}\int_0^t \|\nabla u_m\|_{L^2}^{2\gamma} \frac{d}{d\tau}\|\nabla u_m\|_{L^2}^2 d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t f(\tau)^\gamma df(\tau) = \frac{1}{2\gamma+2}f(t)^{\gamma+1} - \frac{1}{2\gamma+2}f(0)^{\gamma+1},$$

换回原函数名, 即

$$\frac{1}{2}\int_0^t \|\nabla u_m\|_{L^2}^{2\gamma} \frac{d}{d\tau}\|\nabla u_m\|_{L^2}^2 d\tau = \frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla u_m\|_{L^2}^{2\gamma+2} - \frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla u_{0m}\|_{L^2}^{2\gamma+2}. \tag{3.6}$$

将 (3.6) 代入 (3.5) 整理可得

$$\int_0^t \|u_{mt}\|_{L^2}^2 d\tau + \frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla u_m\|_{L^2}^{2\gamma+2} - \frac{1}{p+1}\|u_m\|_{L^{p+1}}^{p+1} = \frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla u_{0m}\|_{L^2}^{2\gamma+2} - \frac{1}{p+1}\|u_{0m}\|_{L^{p+1}}^{p+1}, \tag{3.7}$$

由于 $\gamma>\frac{p-1}{2}$, 当 $n>2$ 时, $1<p\le\frac{n+2}{n-2}$; 当 $n\le 2$ 时, $1<p<\infty$. 利用引理 2 和 Young 不等式, 则有

$$\begin{aligned}\int_0^t \|u_{mt}\|_{L^2}^2 d\tau + \frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla u_m\|_{L^2}^{2\gamma+2} &\le c + \frac{1}{p+1}\|u_m\|_{L^{p+1}}^{p+1} \\ &\le c + c\left(\|\nabla u_m\|_{L^2}^{2\gamma+2}\right)^{\frac{p+1}{2\gamma+2}} \\ &\le c + \frac{1}{4\gamma+4}\|\nabla u_m\|_{L^2}^{2\gamma+2}.\end{aligned}$$

由此可以得到

$$\int_0^t \|u_{mt}\|_{L^2}^2 d\tau \le c, \tag{3.8}$$

$$\|\nabla u_m\|_{L^2}^{2\gamma+2} \le c. \tag{3.9}$$

利用 (3.9) 和 Poincar*é* 不等式,

$$\|u_m\|_{L^2}^2 \le c\|\nabla u_m\|_{L^2}^2 \le c. \tag{3.10}$$

因此, 由先验估计 (3.8)–(3.10) 可知, 存在一个函数 u 和 $\{u_m\}$ 的子序列, 不妨仍记为 $\{u_m\}$, 使得

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ 在} L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\text{中}, \tag{3.11}$$

$$\nabla u_m \overset{*}{\rightharpoonup} \nabla u \text{ 在} L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\text{中}, \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial t} \text{ 在} L^2(0,T;L^2(\Omega))\text{中}. \tag{3.13}$$

一方面, 由 Aubin 紧性定理, $W=\{v|v\in L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega)),v_t\in L^2(0,T;L^2(\Omega))\}$ 紧嵌入到 $L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega))$ 中, 根据 (3.11)–(3.13) 可以得到

$$u_m\to u \text{ 在} L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega))\text{中}. \tag{3.14}$$

于是, 存在 $\{u_m\}$ 的子序列, 不妨仍记为 $\{u_m\}$, 使得 $u_m \xrightarrow{a.e} u$ 在 $\Omega\times[0,T]$ 中. 因为 $s\to|s|^{p-1}s$ 是一个连续函数, 所以

$$|u_m|^{p-1}u_m \xrightarrow{a.e} |u|^{p-1}u \text{ 在 } \Omega\times[0,T] \text{ 中}.$$

由 u_m 在 $L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega))$ 中的一致有界性和引理 2, $|u_m|^{p-1}u_m$ 在 $L^{\infty}(0,T;L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega))$ 上一致有界. 则

$$|u_m|^{p-1}u_m \overset{*}{\rightharpoonup} |u|^{p-1}u \text{ 在 } L^{\infty}(0,T;L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)) \text{ 中}.$$

另一方面, 由 (3.14) 可知

$$\|\nabla u_m\|_{L^2}\longrightarrow\|\nabla u\|_{L^2} \text{ 在 } L^{\infty}[0,T] \text{ 中},$$

为了讨论方便, 记 $a(u)=(\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx)^{\gamma}$, 由于 a 是连续的, 可以得到

$$a(u_m)\longrightarrow a(u) \text{ 在 } L^{\infty}[0,T] \text{ 中}.$$

固定 (3.3) 中的 j, 由于 $\frac{p+1}{p}<2$, 且每一项均在 $L^{\frac{p+1}{p}}[0,T]$ 中弱收敛, 令 $m\longrightarrow\infty$, 可以得到

$$\int_{\Omega}(\frac{\partial u}{\partial t}\omega_j+a(u)\nabla u\cdot\nabla\omega_j-|u|^{p-1}u\omega_j)dx=0,\forall j=1,2,\cdots.$$

根据基 $\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的稠密性,

$$\int_{\Omega}(\frac{\partial u}{\partial t}\omega+a(u)\nabla u\cdot\nabla\omega-|u|^{p-1}u\omega)dx=0,\forall\omega\in H_0^1(\Omega).$$

由 (3.4), (3.13), (3.14) 知, 在 $L^2(\Omega)$ 中, $u_m(0)\rightharpoonup u(0)$, $u_m(0)\rightharpoonup u_0$. 根据极限的唯一性, $u(0)=u_0$. 因此 u 是问题 (1.1) 的整体弱解.

唯一性的证明如下.

令 u_1 和 u_2 是 (1.1) 的两个满足初值条件的整体弱解, 则 $w=u_1-u_2$ 满足

$$w'-(\int_{\Omega}|\nabla u_1|^2dx)^{\gamma}\Delta u_1+(\int_{\Omega}|\nabla u_2|^2dx)^{\gamma}\Delta u_2=|u_1|^{p-1}u_1-|u_2|^{p-1}u_2, \tag{3.15}$$

$$w(x,0)=0.$$

接下来, 将 (3.15) 与 w 做内积可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_{L^2}^2+(\int_{\Omega}|\nabla u_1|^2dx)^{\gamma}(\nabla u_1,\nabla w)-(\int_{\Omega}|\nabla u_2|^2dx)^{\gamma}(\nabla u_2,\nabla w)\\&=\int_{\Omega}(|u_1|^{p-1}u_1-|u_2|^{p-1}u_2)wdx.\end{aligned} \tag{3.16}$$

利用拉格朗日中值定理和 Hölder 不等式, (3.16) 右边

$$\begin{aligned}\int_\Omega(|u_1|^{p-1}u_1-|u_2|^{p-1}u_2)wdx&\le p\int_\Omega \sup(|u_1|^{p-1},|u_2|^{p-1})w^2dx\\&\le p\int_\Omega(|u_1|^{p-1}+|u_2|^{p-1})w^2dx\\&\le p\int_\Omega w^2dx\cdot(\|u_1\|_{L^\infty}^{p-1}+\|u_2\|_{L^\infty}^{p-1}).\end{aligned}$$

而左边第二项和第三项利用 Hölder 不等式可化简为

$$\begin{aligned}&((\int_\Omega|\nabla u_1|^2dx)^\gamma\nabla u_1-(\int_\Omega|\nabla u_2|^2dx)^\gamma\nabla u_2,\nabla u_1-\nabla u_2)\\=&\|\nabla u_1\|_{L^2}^{2\gamma+2}+\|\nabla u_2\|_{L^2}^{2\gamma+2}-\|\nabla u_1\|_{L^2}^{2\gamma}\int_\Omega\nabla u_1\cdot\nabla u_2dx-\|\nabla u_2\|_{L^2}^{2\gamma}\int_\Omega\nabla u_1\cdot\nabla u_2dx\\\ge&\|\nabla u_1\|_{L^2}^{2\gamma+2}+\|\nabla u_2\|_{L^2}^{2\gamma+2}-\|\nabla u_1\|_{L^2}^{2\gamma+1}\|\nabla u_2\|_{L^2}-\|\nabla u_2\|_{L^2}^{2\gamma+1}\|\nabla u_2\|_{L^2}\\=&(\|\nabla u_1\|_{L^2}^{2\gamma+1}-\|\nabla u_2\|_{L^2}^{2\gamma+1})(\|\nabla u_1\|_{L^2}-\|\nabla u_2\|_{L^2})\\>&0.\end{aligned}$$

因此, 由引理 2 可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_{L^2}^2\le p\int_\Omega w^2dx\cdot(\|u_1\|_{L^\infty}^{p-1}+\|u_2\|_{L^\infty}^{p-1})\le c\|w\|_{L^2}^2.$$

所以, 根据 Gronwall 不等式, $w=0$.

4 当 $0<\gamma<\frac{p-1}{2}$ 时, 解的全局性和唯一性

证明定理 2 再次利用 Galerkin 方法. $\{\omega_i\}_{i=1}^\infty$, $\{u_m\}$ 与定理 1 中所述相同, 令 $\{u_{0m}\}$ 是一个满足如下条件的序列:

$$u_{0m}\in W,u_{0m}=\sum_{i=1}^m\alpha_{im}(t)\omega_i(x)\to u_0\ 在H_0^1(\Omega)中,m\to\infty.\tag{4.1}$$

则在区间 $[0,t_m]$ $(t_m>0)$ 上存在解 $u_m(t)$, 且根据 (3.7), 在该区间上 $u_m(t)$ 满足

$$\int_0^t\|u_{mt}\|_{L^2}^2d\tau+J(u_m(t))=J(u_{0m}).\tag{4.2}$$

下面证明

$$u_m(t)\in W,\forall t\ge0.\tag{4.3}$$

假设 (4.3) 不成立, 设 t^* 是最小的时间, 使得 $u_m(t^*)\notin W$, 则由 $u_m(t)$ 的连续性可知 $u_m(t^*)\in\partial W$. 因此, 由引理 4 可以得到

$$J(u_m(t^*))=d\tag{4.4}$$

或者

$$\|\nabla u_m(t^*)\|_{L^2}^{2\gamma+2} - \|u_m(t^*)\|_{L^{p+1}}^{p+1} = 0. \tag{4.5}$$

这与 (4.1), (4.2) 矛盾. 事实上, 当 (4.4) 成立时, 显然矛盾. 当 (4.5) 成立时, 有

$$J(u_m(t^*)) = J\left(\left(\frac{\|\nabla u_m(t^*)\|_{L^2}^{2\gamma+2}}{\|u_m(t^*)\|_{L^{p+1}}^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p-2\gamma-1}} u_m(t^*)\right) \geq d,$$

这也意味着矛盾. 因此, 由 (4.2) 和引理 4 得到

$$\int_0^t \|u_{mt}\|_{L^2}^2 d\tau + \left(\frac{1}{2\gamma+2} - \frac{1}{p+1}\right) \|\nabla u_m\|_{L^2}^{2\gamma+2} \leq J(u_{0m}) \leq c, \tag{4.6}$$

因为 $0<\gamma<\frac{p-1}{2}$, 所以 $\frac{1}{2\gamma+2} - \frac{1}{p+1}>0$, 由此可知

$$\int_0^t \|u_{mt}\|_{L^2}^2 d\tau \leq c, \tag{4.7}$$

$$\|\nabla u_m\|_{L^2}^{2\gamma+2} \leq c, \tag{4.8}$$

同定理 1 的证明可以得到

$$\|u_m\|_{L^2}^2 \leq c. \tag{4.9}$$

由 (5.7)–(5.9) 和 Aubin 紧性定理, 重复定理 1 的证明过程, 可得到 u 是问题 (1.1) 的整体弱解.

下面证明 (1.3).

根据引理 4, $u \in \overline{W}$, 所以

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2}^{2\gamma+2} - \|u(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1} \geq 0. \tag{4.10}$$

将 (1.1) 与 u 做内积并关于 t 积分, 整理化简可得

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2}\|u(s)\|_{L^2}^2 - \int_s^t \|\nabla u(\tau)\|_{L^2}^{2\gamma+2} d\tau + \int_s^t \|u(\tau)\|_{L^{p+1}}^{p+1} d\tau. \tag{4.11}$$

因此, 由 (4.10) 和 (4.11) 立即可以得到 (1.3).

唯一性的证明重复定理 1 的证明过程可以得到.

5 解的局部存在性和爆破

证明定理 3 依旧采用 Galerkin 方法. $\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{u_m\}$, $\{u_{0m}\}$ 与定理 1 中所述相同. 在 (3.2) 的两边同时乘以 g_{im} 并对 i 从 1 到 m 求和, 得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_m\|_{L^2}^{2\gamma+2} = \int_\Omega u_m^{p+1} dx, \tag{5.1}$$

因为当 $n>2$ 时, $1<p \leq \frac{n+2}{n-2}$; 当 $n \leq 2$ 时, $1<p<\infty$, 所以 $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{p+1} < \frac{1}{2}$, 于是根据引理 1 可以得到

$$|\int_\Omega u_m^{p+1} dx| \leq C_1 \left(\|\nabla_m\|_{L^2}^{2\gamma+2}\right)^{\delta} \|u_m\|_{L^2}^{\delta'}. \tag{5.2}$$

由于 $\gamma>\frac{np-n-4}{4}$, 所以

$$\delta=\frac{(p+1)\theta}{2\gamma+2}=\frac{np-n}{4\gamma+4}<1,$$

又因为 $\gamma<\frac{p-1}{2}$, 故有

$$\delta^{'}=(1-\theta)(p+1)=\frac{n-np+2p+2}{2}>0.$$

其中, θ 是由 $\frac{1}{p+1}=(\frac{1}{2}-\frac{1}{n})\theta+\frac{1}{2}(1-\theta)$ 唯一确定的 [0,1] 中的数. 于是根据 Young 不等式,

$$|\int_\Omega u_m^{p+1}dx|\leq\frac{1}{2}\|\nabla u_m\|_{L^2}^{2\gamma+2}+\frac{c}{2}\|u_m\|_{L^2}^{2\delta^{''}},\tag{5.3}$$

其中 $\delta^{''}=\frac{\delta^{'}}{2(1-\delta)}>1$. 因此, 由 (5.1), (5.3) 得到

$$\frac{d}{dt}\|u_m\|_{L^2}^2\leq c\|u_m\|_{L^2}^{2\delta^{''}}.\tag{5.4}$$

于是, 微分不等式 (5.4) 的解 $\|u_m\|_{L^2}^2$ 可由以下初值问题的解来表示:

$$\frac{dy}{dt}=cy^{\delta^{''}},y(0)=y_0=\|u_{0m}\|_{L^2}^2.\tag{5.5}$$

如果

$$t<t_\infty=\frac{1}{c(\delta^{''}-1)y_0^{\delta^{''}-1}},\tag{5.6}$$

则 (5.5) 的解 y 是有限的. 因此, 在区间 $0\leq t\leq T_0=\frac{t_\infty}{2}$ 内, 可以得到

$$\|u_m(t)\|_{L^2}^2\leq c.\tag{4.7}$$

由 (3.7), (5.3), (5.7), 立即得到

$$\|u_m\|_{L^\infty(0,T_0;L^2(\Omega))}\leq c,\tag{5.8}$$

且

$$\|u_{mt}\|_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega))}\leq c,\tag{5.9}$$

$$\|\nabla u_m\|_{L^\infty(0,T_0;L^2(\Omega))}\leq c.\tag{5.10}$$

由 (5.8)–(5.10) 和 Aubin 紧性定理, 重复定理 1 的证明过程, 可以得到 u 是问题 (1.1) 在区间 $0\leq t\leq T_0$ 上的弱解.

下满证明 u 满足 (1.4) 和 (1.5).

令 $V(0,T;H_0^1(\Omega))$ 是由满足以下条件的所有函数 $v(t)$ 构成的空间, 即

$$v(t)\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),v'(t)\in L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

在 (3.2) 的两边同时乘以任意函数 $f(t)\in C^1([0,T])$, 并关于 t 积分, 得到

$$\begin{aligned}&\int_0^t(u_{mt},f(\tau)\omega_j)d\tau+\int_0^t\left(\left(\int_\Omega|\nabla u_m|^2dx\right)^\gamma\nabla u_m,\nabla(f(\tau)\omega_j)\right)d\tau\\&=\int_0^t(|u_m|^{p-1}u_m,f(\tau)\omega_j)d\tau.\end{aligned}$$

固定 j, 令 $m\to\infty$ 则有

$$\begin{aligned}&\int_0^t(u_t,f(\tau)\omega_j)d\tau+\int_0^t\left(\left(\int_\Omega|\nabla u|^2dx\right)^\gamma\nabla u,\nabla(f(\tau)\omega_j)\right)d\tau\\=&\int_0^t(|u|^{p-1}u,f(\tau)\omega_j)d\tau,\forall j=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

这意味着对任意 $\psi(\tau)\in V(0,T;H_0^1(\Omega))$ 都有

$$\int_0^t(u_t,\psi(\tau))d\tau+\int_0^t\left(\left(\int_\Omega|\nabla u|^2dx\right)^\gamma\nabla u,\nabla(\psi(\tau))\right)d\tau=\int_0^t(|u|^{p-1}u,\psi(\tau))d\tau.\tag{5.11}$$

在 (5.11) 中令 $\psi(\tau)=u(\tau)$ 可立即得到 (1.4).

从 (3.7) 可以得到

$$J(u_m(t))\le J(u_{0m}).\tag{5.12}$$

令 $\theta\in C([0,T_0])$ 是非负函数, 则有

$$\int_0^{T_0}J(u_m(t))\theta(t)dt\le\int_0^{T_0}J(u_{0m}(t))\theta(t)dt.\tag{5.13}$$

其中, 当 $m\longrightarrow\infty$ 时, (5.13) 第二项趋于 $\int_0^{T_0}J(u_0(t))\theta(t)dt$. 而第一项关于 $L^2(0,T_0;H_0^1(\Omega))$ 的弱拓扑是下半连续的. 因此

$$\int_0^{T_0}J(u(t))\theta(t)dt\le\liminf_{m\longrightarrow\infty}\int_0^{T_0}J(u_m(t))\theta(t)dt\le\int_0^{T_0}J(u_0(t))\theta(t)dt.$$

因为 θ 是任意的, 所以

$$J(u(t))\le J(u_0),\ t\in[0,T_0].$$

定理 3 的证明完成.

注 1 当 $\delta''>1$ 时, $T_0>0$. 下面证明 $\delta''=\frac{\delta'}{2(1-\delta)}=\frac{(n-np+2p+2)(\gamma+1)}{n-np+4\gamma+4}>1$. 整理化简即证 $2\gamma-n\gamma+2>0$. 当 $n\le 2$ 时, 显然成立. 当 $n>2$ 时, 即证 $\gamma<\frac{2}{n-2}$. 因为当 $n>2$ 时, $1<p\le\frac{n+2}{n-2}$, 所以 $\frac{2}{n-2}-\frac{p-1}{2}=\frac{n-np+2p+2}{2n-4}>0$. 于是 $\gamma<\frac{p-1}{2}<\frac{2}{n-2}$. 综上, 结论成立.

证明定理 4 假设定理 4 的结论不成立, 令 $u(x,t)$ 是由初值函数 $u_0(x)$ 决定的满足定理条件的全局解, 则对 $\forall t>0$, $u(x,t)$ 满足 (1.4) 和 (1.5). 从 (1.5) 和 (1.6) 可以得到

$$\frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla u(t)\|_{L^2}^{2\gamma+2}-\frac{1}{p+1}\|u(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1}<0,\ t\ge 0.\tag{5.14}$$

将 (5.14) 代入 (1.4) 中, 则有

$$\begin{aligned}\frac12\|u(t)\|_{L^2}^2&\ge\left(1-\frac{2\gamma+2}{p+1}\right)\int_0^t\|u(\tau)\|_{L^{p+1}}^{p+1}d\tau+\frac12\|u_0\|_{L^2}^2\\&\ge\frac{p-2\gamma-1}{p+1}(\mathrm{mes}(\Omega))^{-\frac{p-1}{2}}\int_0^t\|u(\tau)\|_{L^2}^{p+1}d\tau+\frac12\|u_0\|_{L^2}^2.\end{aligned}\tag{5.15}$$

这里, 用到不等式 $\|u(t)\|_{L^2}^2 \leq (\mathrm{mes}(\Omega))^{\frac{p-1}{p+1}}\|u(t)\|_{L^{p+1}}^2$. 由 (5.15) 立即得到

$$\|u(t)\|_{L^2}^{p-1} \geq \frac{1}{\|u_0\|_{L^2}^{1-p} - Lt},$$

其中

$$L = \frac{(p-1)(p-2\gamma-1)}{p+1}(\mathrm{mes}(\Omega))^{-\frac{p-1}{2}}.$$

因此, 当 $t \longrightarrow \frac{1}{L}\|u_0\|_{L^2}^{1-p} > T$ 时, $\|u(t)\|_{L^2}^{p-1} \longrightarrow \infty$. 这与 u 是全局解矛盾. 故定理成立.

6 解对初值的连续依赖性

证明定理 5 令 u, v 是问题 (1.1) 满足 $u(0) = u_0, v(0) = v_0$ 的两个弱解, 则

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u-v\|_{L^2}^2 + (\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)^\gamma(\nabla u, \nabla(u-v)) - (\int_\Omega |\nabla v|^2 dx)^\gamma(\nabla v, \nabla(u-v))\\ =&\int_\Omega (|u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v)(u-v)dx,\end{aligned} \tag{6.1}$$

同定理 1 中弱解的唯一性证明过程,

$$(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)^\gamma(\nabla u, \nabla(u-v)) - (\int_\Omega |\nabla v|^2 dx)^\gamma(\nabla v, \nabla(u-v))>0, \tag{6.2}$$

$$\int_\Omega (|u|^{p-1}u - |u|^{p-1}u)(u-v)dx \leq p\int_\Omega (u-v)^2 dx \cdot (\|u_1\|_{L^\infty}^{p-1} + \|u_2\|_{L^\infty}^{p-1}), \tag{6.3}$$

将 (6.2), (6.3) 代入 (6.1) 中, 且由于 $u, v \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), n<2$, 根据引理 2 可以得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u-v\|_{L^2}^2 &\leq p\int_\Omega (u-v)^2 dx \cdot (\|u_1\|_{L^\infty}^{p-1} + \|u_2\|_{L^\infty}^{p-1})\\ &\leq cp\int_\Omega (u-v)^2 dx \cdot (\|\nabla u\|_{L^2}^{p-1} + \|\nabla v\|_{L^2}^{p-1}).\end{aligned} \tag{6.4}$$

由于 v 是问题 (1.1) 的解, 将 v 代入方程 (1.1), 两边同时与 v_t 做内积并关于 t 积分可以得到

$$\int_0^t \|v_t\|_{L^2}^2 d\tau + \frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla v\|_{L^2}^{2\gamma+2} - \frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} = \frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla v_0\|_{L^2}^{2\gamma+2} - \frac{1}{p+1}\|v_0\|_{L^{p+1}}^{p+1},$$

由于 $\gamma>\frac{p-1}{2}$, 当 $n>2$ 时, $1<p \leq \frac{n+2}{n-2}$; 当 $n \leq 2$ 时, $1<p<\infty$. 利用引理 2 和 Young 不等式, 则有

$$\begin{aligned}\int_0^t \|v_t\|_{L^2}^2 d\tau + \frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla v\|_{L^2}^{2\gamma+2} \leq& \frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} + \frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla v_0\|_{L^2}^{2\gamma+2} - \frac{1}{p+1}\|v_0\|_{L^{p+1}}^{p+1}\\ \leq& c\left(\|\nabla v\|_{L^2}^{2\gamma+2}\right)^{\frac{p+1}{2\gamma+2}} + \frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla v_0\|_{L^2}^{2\gamma+2} - \frac{1}{p+1}\|v_0\|_{L^{p+1}}^{p+1}\\ \leq& \frac{1}{4\gamma+4}\|\nabla v\|_{L^2}^{2\gamma+2} + c + \frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla v_0\|_{L^2}^{2\gamma+2}\\ &- \frac{1}{p+1}\|v_0\|_{L^{p+1}}^{p+1},\end{aligned}$$

故

$$\frac{1}{4\gamma+4}\|\nabla v\|_{L^2}^{2\gamma+2} \le c + \frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla v_0\|_{L^2}^{2\gamma+2} - \frac{1}{p+1}\|v_0\|_{L^{p+1}}^{p+1}, \tag{6.5}$$

同理

$$\frac{1}{4\gamma+4}\|\nabla u\|_{L^2}^{2\gamma+2} \le c + \frac{1}{2\gamma+2}\|\nabla u_0\|_{L^2}^{2\gamma+2} - \frac{1}{p+1}\|u_0\|_{L^{p+1}}^{p+1}. \tag{6.6}$$

将 (6.5), (6.6) 代入 (6.4), 整理化简可得

$$\frac{d}{dt}\|u-v\|_{L^2}^2 \le \eta\|u-v\|_{L^2}^2, \tag{6.7}$$

其中

$$\begin{aligned}\eta =& 2cp\cdot\Bigg(\left((4\gamma+4)\,c + 2\|\nabla u_0\|_{L^2}^{2\gamma+2} - \frac{4\gamma+4}{p+1}\|u_0\|_{L^{p+1}}^{p+1}\right)^{\frac{p-1}{2\gamma+2}} \\ &+\left((4\gamma+4)\,c + 2\|\nabla v_0\|_{L^2}^{2\gamma+2} - \frac{4\gamma+4}{p+1}\|v_0\|_{L^{p+1}}^{p+1}\right)^{\frac{p-1}{2\gamma+2}}\Bigg).\end{aligned}$$

在 (6.7) 的两边同时乘以 $e^{-\eta t}$, 计算得

$$\|u-v\|_{L^2}^2 \le C(T, \|\nabla u_0\|_{L^2}, \|u_0\|_{L^{p+1}}, \|\nabla v_0\|_{L^2}, \|v_0\|_{L^{p+1}})\|u_0-v_0\|_{L^2}^2,$$

其中 $C(T, \|\nabla u_0\|_{L^2}, \|u_0\|_{L^{p+1}}, \|\nabla v_0\|_{L^2}, \|v_0\|_{L^{p+1}}) = e^{\eta T}$.

注 2 假设定理 2 的条件成立, 对任意固定的 $T>0$, 令 u, v 是问题 (1.1) 满足 $u(0)=u_0$, $v(0)=v_0$ 的两个整体弱解, 若 $n<2$, 通过类似的证明过程, 可得到相似的结果.

参 考 文 献

[1] Rouchon P. Blow-up of solutions of nonlinear heat equations in unbounded domains for slowly decaying initial data [J]. Zeischrift für Angewandte Mathematik und Physik, 2001, 52(6): 1017–1032.

[2] Baras P, Cohen L. Complete blow-up after $T_{\max}$ for the solution of a semilinear heat equation [J]. Journal of Functional Analysis, 1987, 71(1): 142–174.

[3] Liu Yacheng, Zhao Junsheng. On potential wells and applications to semilinear hyperbolic equations and parabolic equations [J]. Nonlinear Analysis-theory Methods and Applications, 2006, 64(12): 2665–2687.

[4] Xu Runzhang. Initial boundary value problem for semilinear hyperbolic equations and parabolic equations with critical initial data [J]. Quarterly of Applied Mathematics, 2010, 68(3): 459–468.

[5] Fujita H. On some nonexistence and nonuniqueness theorems for nonlinear parabolic equations [J]. Nonlinear Functional Analysis, 1970, 18(1): 105–113.

[6] Levine H A, Meier P. The value of the critical exponent for reaction-diffusion equations in cones [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1990, 109(1): 73–80.

[7] Simsen J, Ferreira J. A global attractor for a nonlocal parabolic problem [J]. Nonlinear Studies, 2014, 21(3): 405–416.

[8] Chipot M, Lovat B. Some remarks on nonlocal elliptic and parabolic problems [J]. Nonlinear Analysis-theory Methods and Applications, 1997, 30(7): 4619–4627.

[9] Ackleh A S, Ke L. Existence-uniqueness and long time behavior for a class of nonlocal nonlinear parabolic evolution equations [J]. Proceedings of the American Mathematical Socienty, 2000, 128(12): 3483–3492.

[10] Duque J C M, Almeida R M P, Antontsev S N, Ferreira J. A reaction–diffusion model for the non-local coupled system:existence, uniqueness, long time behavior and localization properties of solutions [J]. IMA Journal of Applied Mathematics, 2016, 81(2): 344–364.

[11] Almeida R M P, Antontsev S N, Duque J C M. On a nonlocal degenerate parabolic problem [J]. Nonlinear Analysis-Real World Applications, 2016, 27: 146–157.

[12] Ladyzhenskaya O A, Solonnikov V A, Uralceva N N. Linear and quasi–linear equations of parabolic type [M]. American: American Mathematical Society, 1968.

[13] Tsutsumi M. Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear parabolic equations [J]. Publicational of The Research Institute for Mathematical Sciences, 1972, 8(2): 211–229.

A CLASS OF NONLINEAR PARABOLIC PROBLEMS WITH A DIFFUSION TERM

FAN Jia-xing , YANG Han

(*School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China*)

Abstract: In this paper, we study the initial boundary value problem for a class of Nonlinear Parabolic Equations with a diffusion term. By means of Galerkin method, Gagliardo Nirenberg inequality, Sobolev embedding theorem and potential well theory, we obtain sufficient conditions for the global existence and blow up of weak solutions, which generalize the results for the case of bounded diffusion coefficient.

Keywords: Nonlinear Parabolic Equation; Galerkin method; potential well theory; global solution; blow-up

2010 MR Subject Classification: 35A01; 35A24