Vol. 41 (2021)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

关于相对 Bousfield 类和相对 Bousfield 等价关系

黄文林
(中国人民大学数学学院 , 北京 100872)

摘 要: 本文研究了有限群的群代数上的有限生成模的相对 Bousfield 类, 定义了相对 Bousfield 等价关系和相对 Bousfield 等价类, 建立了群与子群的相对 Bousfield 等价类之间的对应关系.

关 键 词: 群代数; 相对 Bousfield 类; 相对 Bousfield 等价; 相对投射
MR(2010) **主题分类号**: 20C05; 20C20 **中 图 分 类 号**: O152.6
文 献 标 识 码: A **文 章 编 号**: 0255-7797(2021)03-0257-13

0 引言

自上世纪 70 年代以来, Bousfield 类及其结构问题已经发展成为拓扑学、代数几何、群与代数的表示论等领域的共同研究课题 [1−5], Bousfield 类是研究稳定同伦范畴、交换环上的导出范畴、稳定模范畴等张量三角范畴的局部化子范畴及其分类问题的重要途径, 特别地, 有限群的稳定模范畴的局部化子范畴就是它的 Bousfield 类 [4].

有限群 G 的稳定模范畴 $\mathrm{StMod}(kG)$ 及其满子范畴 $\mathrm{Stmod}(kG)$(全体有限生成的 kG-模的稳定范畴) 是有限群表示论中十分重要的表示范畴. 基于相对稳定范畴 $\mathrm{Stmod}_H(kG)$, Okuyama、Carlson 和 Peng 等将有限群表示论中经典的相对子群 H 的投射推广为相对模 V 的投射, 利用 Happel 的方法相应地建立了更加广义的相对稳定范畴 $\mathrm{Stmod}_V(kG)$, 并研究其中的相对同调问题和上同调问题 [6−10]. 本文研究相对稳定范畴 $\mathrm{Stmod}_V(kG)$ 的 Bousfield 类问题.

本文提出的相对 V-Bousfield 类融合了相对模 V- 投射问题和经典 Bousfield 类问题, 事实上, 它既是相对模 V- 投射的推广, 又是相对稳定范畴 $\mathrm{Stmod}(kG)$ 上经典 Bousfield 类的推广 (注 1.4). 而且, 从结构上看, 相对 V-Bousfield 类还与群代数的模上的张量积及其直和分解问题紧密相关, 而张量积的直和分解方法已经广泛运用到 Green 环的幂零元素、几乎可裂序列、内平凡模、Dade 群的结构、广义迹映射等问题的研究中去 [11−14].

作者着重研究了相对 V-Bousfield 类在模上的限制、诱导、张量诱导等运算下的包含关系问题 (定理 1.14、定理 1.15、定理 1.16、定理 1.19), 以及利用相对 V-Bousfield 类定义了模上的相对 V-Bousfield 等价关系和相对 V-Bousfield 等价类, 证明了在模上的限制和诱导运算下仍保持相对 V-Bousfield 等价关系问题 (定理 2.8、定理 2.11、定理 2.12), 并在子群是强 p- 嵌入的情形下建立了群与子群的相对 V-Bousfield 等价类之间的一一对应 (定理 2.14、推论 2.15). 这些结论综合、统一和推广了相对模 V- 投射和经典 Bousfield 类的若干结论 [4,5,6−10,17].

*收稿日期: 2020-09-02 接收日期: 2020-10-27
基金项目: 中国人民大学科学研究基金 (中央高校基本科研业务费专项资金资助) (20XNED05).
作者简介: 黄文林 (1977–), 男, 湖北, 副教授, 主要研究方向: 有限群表示论

本文中, 我们设定, p 是一个素数, G 是阶含有因子 p 的有限群, k 是特征为 p 的域, 所有的模均是有限生成的. 本文的记号和术语, 可参见文献 [8], [15].

1 相对 Bousfield 类

定义 1.1 [8] 设 V 是 (有限生成的)kG- 模, 对于 (有限生成的)kG- 模 M, 若存在 (有限生成的)kG- 模 X, 使得 M 是张量 kG- 模 $V\otimes X$ 的 (在模同构意义下的) 直因子, 则称 M 是相对 V- 投射 kG- 模, 或称 M 是 V- 投射的, 记为 $M\in\mathcal{P}(V)$, 其中, $\mathcal{P}(V)$ 是全体相对 V- 投射 kG- 模的类.

注 1.2 (1) 对于 G 的子群 H, 若 $V=\mathrm{Ind}_H^G k$, 由 [15, Corollary4.3.8] 知, $\mathcal{P}(V)=\mathcal{P}(\mathrm{Ind}_H^G k)$ 是全体相对 H- 投射 kG- 模的类; 特别地, $V=kG$ 时, $\mathcal{P}(V)=\mathcal{P}(kG)=\mathcal{P}(\mathrm{Ind}_1^G k)$ 是全体投射 kG- 模的类;

(2) 对于任意 kG- 模 V, 每个投射 kG- 模 $P\in\mathcal{P}(V)$, 也即全体投射 kG- 模都是 V- 投射的;

(3) 若 $p\nmid\dim_k(V)$, 由 [12, Corollary4.7] 知, $k|V\otimes V^*$, 此时, $\mathcal{P}(V)=\mathrm{mod}(kG)$.

定义 1.3 设 M 是 (有限生成的)kG- 模, 记

$$<M>_V:=\{(\text{有限生成的})kG\text{- 模}X|M\otimes X\in\mathcal{P}(V)\}$$

称 $<M>_V$ 为有限群 G 上的 kG- 模 M 的相对 V-Bousfield 类.

注 1.4 (1) 显然, $<M>_V=\{(\text{有限生成的})kG\text{- 模}X|\text{ 在 }\mathrm{Stmod}_V(kG)\text{ 中 }M\otimes X=0\}$, 并且, $<M>_V$ 是 $\mathrm{Stmod}_V(kG)$ 的局部化满子范畴;

(2) $<0>_V=\mathrm{mod}(kG)$, 并且对于任意 kG- 模 M, 若 $p\nmid\dim_k(V)$, 则 $<M>_V=\mathrm{mod}(kG)$;

(3) $<k>_V=\mathcal{P}(V)$, 所以 $<k>_V$ 恰是全体相对 V- 投射 kG- 模的类, 这表明本文中关于相对 Bousfield 类 $<M>_V$ 的结论在相对投射类 $\mathcal{P}(V)$ 情形都成立, 从而本节结论涵盖了文献 [6-10] 中关于相对投射的若干相应结论;

(4) $<M>_{kG}=<M>_{\mathrm{Ind}_1^G k}$, 此时, $<M>_{kG}$ 简记为 $<M>$, 并且 $<M>_{kG}$ 恰是稳定模范畴 $\mathrm{Stmod}(kG)$ 的局部化满子范畴 [4], 这表明本文中关于相对 V-Bousfield 类 $<M>_V$ 的结论在 Bousfield 类 $<M>$ 情形都成立 [4,5,17].

容易验证下面的性质 1.5, 证明此略.

性质 1.5 设 M、N、U 和 V 是 kG- 模; 若 $M\cong N$, $U\cong V$, 以及 N 是相对 V- 投射 kG- 模, 则

(1) $<k>_V\subseteq<M>_V\subseteq<0>_V$;

(2) $<V>_V=\mathrm{mod}(kG)$;

(3) $<N>_V=\mathrm{mod}(kG)$;

(4) $<M>_V=<N>_V$.

性质 1.6 设 M、N 和 V 是 kG- 模, 则

(1) $<M\oplus N>_V=<M>_V\cap<N>_V$;

(2) $<M\otimes N>_V\supseteq<M>_V\cup<N>_V$;

(3) $<M\otimes M>_V=<M>_V$;

(4) $<M^*\otimes M>_V=<M>_V$.

证 容易验证 (1)、(2), 下面证明 (3)、(4).

首先, 由 (2) 知,

$$<M^* \otimes M \otimes M>_V \supseteq <M \otimes M>_V \supseteq <M>_V.$$

其次, 注意到,

$$0 \to M \xrightarrow{s} \mathrm{Hom}(M, M) \otimes M \xrightarrow{t} M \to 0$$

是关于 kG- 模典范态射的可裂短正合列, 这里, $s: m \to 1 \otimes m$; $t: \sum f_i \otimes m_i \to \Sigma f_i(m_i)$. 所以, $M|\,\mathrm{Hom}(M, M) \otimes M$, 由此, $M|M^* \otimes M \otimes M$.

最后, 再结合 (1) 知, $<M>_V \supseteq <M^* \otimes M \otimes M>_V$. 综合上述, (3) 得证.

类似地, 用 (3) 的证明方法可证明 (4).

性质 1.7 设 M 和 V 是 kG- 模, $\Omega_V(M)$ 是 M 的相对 Heller 算子模 [8], 则

$$<M>_V = <M^*>_V = <\Omega(M)>_V = <\Omega_V(M)>_V.$$

证 首先, 注意到 $M \cong (M^*)^*$, 再结合性质 1.5(4)、性质 1.6(4), 容易验证 $<M>_V = <M^*>_V$.

其次, 一方面, 由 [8, Section 2] 知, $\Omega(M)|M \otimes \Omega(k)$, 再结合性质 1.6 的 (1) 和 (2) 知, $<\Omega(M)>_V \supseteq <M>_V$; 另一方面, 若 kG- 模 $X \in <\Omega(M)>_V$, 则 $\Omega(M) \otimes X \in \mathcal{P}(V)$, 由 [8, Section 2] 知,

$$\Omega(M \otimes X)|\Omega(M) \otimes X,$$

所以, $\Omega(M \otimes X) \in \mathcal{P}(V)$, 又由 [8, Section 2] 知, $M \otimes X|(\Omega(M \otimes X) \otimes \Omega^{-1}(M \otimes X)) \oplus S$, 这里, S 是一个投射 kG- 模, 由注 1.2(2) 知, $S \in \mathcal{P}(V)$, 由此, $M \otimes X \in \mathcal{P}(V)$, $X \in <M>_V$, 以及 $<\Omega(M)>_V \subseteq <M>_V$; $<M>_V = <\Omega(M)>_V$ 得证.

最后, 类似地, 结合 [8, Proposition 3.6], 用上述 $<M>_V = <\Omega(M)>_V$ 的证明方法可以证明 $<M>_V = <\Omega_V(M)>_V$.

性质 1.8 设 M、U 和 V 是 kG- 模; 若 $U \in \mathcal{P}(V)$, 则 $<M>_U \subseteq <M>_V$; 特别地, 若 $U|V$, 则 $<M>_U \subseteq <M>_V$.

证 一方面, 若 kG- 模 $X \in <M>_U$, 则存在 kG- 模 Y, 使得 $M \otimes X|U \otimes Y$; 另一方面, 因为 $U \in \mathcal{P}(V)$, 所以存在 kG- 模 Z, 使得 $U|V \otimes Z$; 综合上述, $M \otimes X|V \otimes Z \otimes Y$, 也即 $X \in <M>_V$, 由此证得, $<M>_U \subseteq <M>_V$.

特别地, 若 $U|V$, 显然 $U \in \mathcal{P}(V)$, $<M>_U \subseteq <M>_V$ 也成立.

性质 1.9 设 M、U 和 V 是 kG- 模, 则

(1) $<M>_{U \oplus V} \supseteq <M>_U \cup <M>_V$;

(2) $<M>_{U \otimes V} = <M>_U \cap <M>_V$.

证 (1) 由性质 1.8 得知, $<M>_U \subseteq <M>_{U \oplus V}$, 以及, $<M>_V \subseteq <M>_{U \oplus V}$, 所以, $<M>_{U \oplus V} \supseteq <M>_U \cup <M>_V$; (1) 得证.

(2) 一方面, 若 $X \in <M>_U \cap <M>_V$, 则有 kG- 模 Y 和 Z, 使得 $M \otimes X|U \otimes Y$, $M \otimes X|V \otimes Z$, 又因为,

$$(M \otimes X)|(M \otimes X)^* \otimes (M \otimes X) \otimes (M \otimes X),$$

所以,

$$(M \otimes X)|(U \otimes V) \otimes (Y \otimes Z) \otimes (M \otimes X)^*,$$

也即, $X \in <M>_{U\otimes V}$, 这表明, $<M>_{U\otimes V} \supseteq <M>_U \cap <M>_V$, 另一方面, 显然 $U\otimes V \in \mathcal{P}(U)$, 由性质 1.8 得知, $<M>_{U\otimes V} \subseteq <M>_U$, 同理, $<M>_{U\otimes V} \subseteq <M>_V$, 所以, $<M>_{U\otimes V} \subseteq <M>_U \cap <M>_V$; 综合得知 (2) 成立.

性质 1.10 设 M 和 V 是 kG- 模, 则

$$<M>_V = <M>_{V^*} = <M>_{V^*\otimes V} = <M>_{\Omega(V)} = <M>_{\Omega_V(M)}.$$

证 首先, 因为 $V|V^*\otimes V\otimes V$, 所以, $V\in\mathcal{P}(V^*)$, 结合性质 1.8 得知, $<M>_V \subseteq <M>_{V^*}$, 对称地, 可以证明, $<M>_V \supseteq <M>_{V^*}$, 综上, $<M>_V = <M>_{V^*}$ 得证.

其次, 一方面, 若 kG- 模 $X \in <M>_V$, 则存在 kG- 模 Y, 使得 $M\otimes X|V\otimes Y$, 又因为 $V|V^*\otimes V\otimes V$, 所以 $M\otimes X|(V^*\otimes V)\otimes(V\otimes Y)$, 这说明, $X\in <M>_{V^*\otimes V}$, 由此, $<M>_V \subseteq <M>_{V^*\otimes V}$; 另一方面, 注意到 $V^*\otimes V \in P(V)$, 由性质 1.8 得知, $<M>_{V^*\otimes V} \subseteq <M>_V$; 综上, $<M>_V = <M>_{V^*\otimes V}$ 得证.

再次, 一方面, 设 $V = \Omega^0(V)\oplus W$, 这里 W 是一个投射 kG- 模, 由注 1.2(2) 知, $W \in \mathcal{P}(\Omega^0(V))$, 由此, $V\in\mathcal{P}(\Omega^0(V))$, 再由 [8, Section 2] 得知, $\Omega^0(V)|\Omega(V)\otimes\Omega^{-1}(V)$, 也即, $\Omega^0(V)\in\mathcal{P}(\Omega(V))$, 结合性质 1.8 得知, $<M>_V \subseteq <M>_{\Omega(V)}$; 另一方面, 由 [8, Section 2] 得知, $\Omega(V)|V\otimes\Omega(k)$, 由此, $\Omega(V)\in\mathcal{P}(V)$, 再结合性质 1.8 得知, $<M>_{\Omega(V)} \subseteq <M>_V$, 综合上述, $<M>_V = <M>_{\Omega(V)}$ 得证.

最后, 类似地, 结合 [8, Proposition 3.6], 用上述证明 $<M>_V = <M>_{\Omega(V)}$ 的方法还可以证明 $<M>_V = <M>_{\Omega_V(M)}$.

设 M、N、U 和 V 是 kG- 模, 记:

$$<M>_U \otimes <N>_V := \{X\otimes Y | X\in <M>_U, Y\in <N>_V\}.$$

性质 1.11 设 M、N、U 和 V 是 kG- 模, 则

$$<M>_U \otimes <N>_V \subseteq <M\otimes N>_{U\otimes V}.$$

证 设 $X\in <M>_U, Y\in <N>_V$, 则 $M\otimes X\in\mathcal{P}(U), N\otimes Y\in\mathcal{P}(V)$, 也即, 存在 kG- 模 W_1, W_2, 使得

$$M\otimes X|U\otimes W_1, N\otimes Y|V\otimes W_2.$$

所以,

$$(M\otimes N)\otimes(X\otimes Y)|(U\otimes V)\otimes(W_1\otimes W_2).$$

也即, $X\otimes Y\in <M\otimes N>_{U\otimes V}$, 性质 1.11 得证.

设 M、N、U 和 V 是 kG- 模, 记:

$$\mathrm{Hom}(<M>_U, <N>_V) := \{\mathrm{Hom}(X,Y) | X\in <M>_U, Y\in <N>_V\}.$$

性质 1.12 设 M、N、U 和 V 是 kG- 模, 则

$$\mathrm{Hom}(<M>_V, <N>_V) \subseteq <\mathrm{Hom}(M,N)>_{\mathrm{Hom}(U,V)}.$$

证 设 $X \in <M>_U, Y \in <N>_V$, 则 $M \otimes X \in \mathcal{P}(U), N \otimes Y \in \mathcal{P}(V)$, 也即, 存在 kG- 模 W_1, W_2, 使得

$$M \otimes X | U \otimes W_1, N \otimes Y | V \otimes W_2.$$

那么, $(M^* \otimes X)|(U \otimes W_1)^*$, 也即, $M^* \otimes X^* | U^* \otimes W_1^*$, 由此,

$$(M \otimes N)^* \otimes (X^* \otimes Y)|(U^* \otimes V) \otimes (W_1^* \otimes W_2).$$

所以,

$$\mathrm{Hom}(M,\, N) \otimes \mathrm{Hom}(X,\, Y) |\, \mathrm{Hom}(U,\, V) \otimes \mathrm{Hom}(W_1,\, W_2).$$

也即

$$\mathrm{Hom}(X,\, Y) \in <\mathrm{Hom}(M, N)>_{\mathrm{Hom}(U,V)},$$

所以

$$\mathrm{Hom}(<M>_V,\, <N>_V) \subseteq <\mathrm{Hom}(M, N)>_{\mathrm{Hom}(U,V)},$$

性质 1.12 得证.

推论 1.13 设 M 和 V 是 kG- 模, 则 $\mathrm{End}(<M>_V) \subseteq <\mathrm{End}(M)>_{\mathrm{End}(V)} = <M>_V$.

证 由性质 1.12、性质 1.5(4)、性质 1.6(4) 和性质 1.10 可知推论 1.13 成立.

设 $G \geq H, M$ 和 V 是 kG- 模, 记:

$$\mathrm{Res}_H^G(<M>_V) := \{\mathrm{Res}_H^G(X) | X \in <M>_V\}.$$

定理 1.14 设 $G \geq H, M$ 和 V 是 kG- 模, 则

$$\mathrm{Res}_H^G(<M>_V) \subseteq <\mathrm{Res}_H^G(M)>_{\mathrm{Res}_H^G(V)}.$$

证 设 kG- 模 $X \in <M>_V$, 则 $M \otimes X \in \mathcal{P}(V)$, 也即, 存在 kG- 模 Y, 使得 $M \otimes X | V \otimes Y$, 从而,

$$\mathrm{Res}_H^G(M) \otimes \mathrm{Res}_H^G(X) |\, \mathrm{Res}_H^G(V) \otimes \mathrm{Res}_H^G(Y),$$

这说明, $\mathrm{Res}_H^G(X) \in <\mathrm{Res}_H^G(M)>_{\mathrm{Res}_H^G(V)}$, 由此, $\mathrm{Res}_H^G(<M>_V) \subseteq <\mathrm{Res}_H^G(M)>_{\mathrm{Res}_H^G(V)}$ 得证.

设 $G \geq H, M$ 和 V 是 kH- 模, 记:

$$\mathrm{Ind}_H^G(<M>_V) := \{\mathrm{Ind}_H^G(X) | X \in <M>_V\}.$$

定理 1.15 设 $G \geq H, M$ 和 V 是 kH- 模, 则

$$\mathrm{Ind}_H^G(<M>_V) \subseteq <\mathrm{Ind}_H^G(M)>_{\mathrm{Ind}_H^G(V)}.$$

证 设 kH- 模 $X \in <M>_V$, 则 $M \otimes X \in \mathcal{P}(V)$, 也即, 存在 kH- 模 Y, 使得 $M \otimes X | V \otimes Y$, 从而 $\mathrm{Ind}_H^G(M \otimes X) |\, \mathrm{Ind}_H^G(V \otimes Y)$, 所以,

$$\mathrm{Ind}_H^G(M \otimes X) \otimes \mathrm{Ind}_H^G(k) |\, \mathrm{Ind}_H^G(V \otimes Y) \otimes \mathrm{Ind}_H^G(k).$$

又因为由 [15, Corollary 4.3.8] 得知,

$$kG \otimes_{kH} (M \otimes X) \cong (kG \otimes_{kH} M) \otimes X,$$

进一步得到,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_H^G(M\otimes X)\otimes \mathrm{Ind}_H^G(k) &= (kG\otimes_{kH}(M\otimes X))\otimes(kG\otimes_{kH}k)\\ &\cong ((kG\otimes_{kH}M)\otimes X)\otimes(kG\otimes_{kH}k)\\ &\cong (kG\otimes_{kH}M)\otimes(kG\otimes_{kH}(k\otimes X))\\ &\cong \mathrm{Ind}_H^G(M)\otimes\mathrm{Ind}_H^G(X).\end{aligned}$$

类似地,

$$\mathrm{Ind}_H^G(V\otimes Y)\otimes\mathrm{Ind}_H^G(k)\cong\mathrm{Ind}_H^G(V)\otimes\mathrm{Ind}_H^G(Y),$$

这说明,

$$\mathrm{Ind}_H^G(M)\otimes\mathrm{Ind}_H^G(X)|\,\mathrm{Ind}_H^G(V)\otimes\mathrm{Ind}_H^G(Y),$$

也即, $\mathrm{Ind}_H^G(X)\in<\mathrm{Ind}_H^G(M)>_{\mathrm{Ind}_H^G(V)}$.

综合上述, $\mathrm{Ind}_H^G(<M>_V)\subseteq<\mathrm{Ind}_H^G(M)>_{\mathrm{Ind}_H^G(V)}$ 得证.

定理 1.16 设 $G\geq H$, M、N、U 和 V 是 kG- 模, 若 $<M>_U\subseteq<N>_V$, 则

$$<\mathrm{Res}_H^G(M)>_{\mathrm{Res}_H^G(U)}\subseteq<\mathrm{Res}_H^G(N)>_{\mathrm{Res}_H^G(V)}.$$

证 首先, 设 kH- 模 $X\in<\mathrm{Res}_H^G(M)>_{\mathrm{Res}_H^G(U)}$, 由定理 1.15 知,

$$\mathrm{Ind}_H^G(X)\in<\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(M))>_{\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(U))}.$$

由 [15, Corollary 4.3.8] 知, $\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(U))\cong U\otimes\mathrm{Ind}_H^G(k)$, 再结合性质 1.5(4) 和性质 1.9(2) 知,

$$\mathrm{Ind}_H^G(X)\in<\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(M))>_{U\otimes\mathrm{Ind}_H^G(k)}\subseteq<\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(M))>_U,$$

所以,

$$\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(M))\otimes\mathrm{Ind}_H^G(X)\in\mathcal{P}(U).$$

其次, 一方面, 再由 [15, Corollary 4.3.8] 知, $\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(M))\cong M\otimes\mathrm{Ind}_H^G(k)$, 所以,

$$\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(M))\otimes\mathrm{Ind}_H^G(X)\cong M\otimes\mathrm{Ind}_H^G(k)\otimes\mathrm{Ind}_H^G(X)\cong M\otimes(\mathrm{Ind}_H^G(k)\otimes\mathrm{Ind}_H^G(X));$$

另一方面, 由 [15, Theorem 5.2.1] 知, $\mathrm{Ind}_H^G(k\otimes X)|\,\mathrm{Ind}_H^G(k)\otimes\mathrm{Ind}_H^G(X)$, 综合得知,

$$M\otimes\mathrm{Ind}_H^G(X)\in\mathcal{P}(U),\ \mathrm{Ind}_H^G(X)\in<M>_U\subseteq<N>_V.$$

最后, 再由定理 1.14 知

$$\mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G(X))\in<\mathrm{Res}_H^G(N)>_{\mathrm{Res}_H^G(V)}.$$

然而, $X|\,\mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G(X))$, 所以, $X\in<\mathrm{Res}_H^G(N)>_{\mathrm{Res}_H^G(V)}$, 也即,

$$<\mathrm{Res}_H^G(M)>_{\mathrm{Res}_H^G(U)}\subseteq<\mathrm{Res}_H^G(N)>_{\mathrm{Res}_H^G(V)}\ \text{得证.}$$

推论 1.17 设 $G \geq H, M$、N、U 和 V 是 kG- 模; 若 M 和 N 是相对 H- 投射 kG- 模, 则 $<M>_U \subseteq <N>_V$, 当且仅当 $<\mathrm{Res}_H^G(M)>_{\mathrm{Res}_H^G(U)} \subseteq <\mathrm{Res}_H^G(N)>_{\mathrm{Res}_H^G(V)}$.

证 由定理 1.16 知必要性成立, 下面证明充分性.

设 $X \in <M>_U$, 则由定理 1.14 知,

$$\mathrm{Res}_H^G(X) \subseteq <\mathrm{Res}_H^G(M)>_{\mathrm{Res}_H^G(U)},$$

也即, $\mathrm{Res}_H^G(X) \in <\mathrm{Res}_H^G(M)>_{\mathrm{Res}_H^G(U)} \subseteq <\mathrm{Res}_H^G(N)>_{\mathrm{Res}_H^G(V)}$, 再由定理 1.15 知,

$$\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(X)) \in <\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(N))>_{\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(V))}.$$

由此,

$$\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(N)) \otimes \mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(X)) \in \mathcal{P}(\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(V))).$$

结合 [15, Theorem 5.2.1] 知,

$$\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(N) \otimes \mathrm{Res}_H^G(X)) | \mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(N)) \otimes \mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(X)).$$

所以,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(N)) \otimes X \cong & \mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(N) \otimes \mathrm{Res}_H^G(X)) \in \mathcal{P}(\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(V))) \\ = & \mathcal{P}(V \otimes \mathrm{Ind}_H^G(k)) \subseteq \mathcal{P}(V).\end{aligned}$$

然而, 因为 N 是相对 H- 投射 kG- 模, 所以, $N | \mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(N))$, 这意味着,

$$N \otimes X \in \mathcal{P}(V), X \in <N>_V, <M>_U \subseteq <N>_V.$$

证毕.

推论 1.18 设 $G \geq H, M$、N、U 和 V 是 kG- 模; 若 H 包含 G 的某个 Sylow p- 子群, 则 $<M>_U \subseteq <N>_V$, 当且仅当 $<\mathrm{Res}_H^G(M)>_{\mathrm{Res}_H^G(U)} \subseteq <\mathrm{Res}_H^G(N)>_{\mathrm{Res}_H^G(V)}$.

证 由推论 1.17 和 [15, Proposition 11.3.5] 知推论 1.18 成立.

设 $G \geq H, M$ 和 V 是 kH- 模, $\mathrm{Ind}_{\otimes H}^G(M)$ 是 M 的从 H 到 G 的张量诱导模, 记:

$$\mathrm{Ind}_{\otimes H}^G(<M>_V) := \{\mathrm{Ind}_{\otimes H}^G(X) | X \in <M>_V\}$$

定理 1.19 设 $G \geq H, M$ 和 V 是 kH- 模, 则

$$\mathrm{Ind}_{\otimes H}^G(<M>_V) \subseteq <\mathrm{Ind}_{\otimes H}^G(M)>_{\mathrm{Ind}_{\otimes H}^G(V)}.$$

证 设 kH- 模 $X \in <M>_V$, 则 $M \otimes X \in \mathcal{P}(V)$, 也即, 存在 kH- 模 Y, 使得 $M \otimes X | V \otimes Y$.

设 $V \otimes Y = (M \otimes X) \oplus Z, Z$ 是一个 kH- 模, 那么, 由 [18, Proposition 3.15.2] 知, 存在 kG- 模 W, 使得,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_{\otimes H}^G(V \otimes Y) &= \mathrm{Ind}_{\otimes H}^G(M \otimes X) \oplus \mathrm{Ind}_{\otimes H}^G(Z) \oplus W \\ &\cong (\mathrm{Ind}_{\otimes H}^G(M) \otimes \mathrm{Ind}_{\otimes H}^G(X)) \oplus \mathrm{Ind}_{\otimes H}^G(Z) \oplus W \\ &\cong \mathrm{Ind}_{\otimes H}^G(V) \otimes \mathrm{Ind}_{\otimes H}^G(Y).\end{aligned}$$

所以,

$$\mathrm{Ind}_{\otimes H}^{G}(M)\otimes \mathrm{Ind}_{\otimes H}^{G}(X)|\,\mathrm{Ind}_{\otimes H}^{G}(V)\otimes \mathrm{Ind}_{\otimes H}^{G}(Y),$$

也即, $\mathrm{Ind}_{\otimes H}^{G}(X)\in <\mathrm{Ind}_{\otimes H}^{G}(M)>\mathrm{Ind}_{\otimes H}^{G}(V)$, 从而

$$\mathrm{Ind}_{\otimes H}^{G}(<M>_V)\subseteq <\mathrm{Ind}_{\otimes H}^{G}(M)>_{\mathrm{Ind}_{\otimes H}^{G}(V)} \text{ 得证.}$$

2 相对 Bousfield 等价关系

定义 2.1 设 V 是 (有限生成的)kG- 模, 对于 (有限生成的)kG- 模 M 和 N, 若 $<M>_V=<N>_V$, 则称 M 与 N 是相对 V-Bousfield 等价的, 记为 $M\underset{V}{\sim}N$. M 所在的相对 V-Bousfield 等价类记为 $\ll M\gg_V$, (有限生成的) kG- 模上的全体相对 V-Bousfield 等价类记为 $\mathbb{C}(kG)_V$.

注 2.2 (1) 可以验证, 相对 V-Bousfield 等价关系 $\underset{V}{\sim}$ 是 kG- 模上的一种等价关系, 并且, 若 $M\cong N$, 则 $M\underset{V}{\sim}N$, 所以, 相对 V-Bousfield 等价关系是 kG- 模上的一种较模同构关系弱的等价关系;

(2) 设 $V=kG$, 则相对 V-Bousfield 等价关系 $\underset{V}{\sim}$ 恰是 Bousfield 等价关系 $\sim$, 这表明本文中关于相对 V-Bousfield 等价关系的结论在 Bousfield 等价关系情形都成立 [4,5,17];

(3) 每个相对 V-Bousfield 类 $<M>_V$ 对应着一个唯一确定的相对 V-Bousfield 等价类 $\ll M\gg_V$, 全体相对 V-Bousfield 等价类 $\mathbb{C}(kG)_V$ 从类别上对相对稳定范畴 $\mathrm{Stmod}_V(kG)$ 的局部化子范畴进行分类, 对局部化子范畴上的代数结构 (例如, 格结构) 进行刻画.

性质 2.3 设 M、N、X、Y 是 kG- 模; 若 $M\underset{V}{\sim}N$、$X\underset{V}{\sim}Y$, 则

(1) $M\oplus X\underset{V}{\sim}N\oplus Y$;

(2) $M\otimes X\underset{V}{\sim}N\otimes Y$.

证 由性质 1.6(1) 易知 (1) 成立; 容易证明 (2) 也成立.

性质 2.4 设 X、M、N 和 V 是 kG- 模; 若 $M\underset{V}{\sim}N$, 则

(1) $X\underset{V}{\sim}X\otimes X$;

(2) $X\otimes M\underset{V}{\sim}X\otimes X\otimes N$.

证 由性质 1.6(3) 可知 (1) 成立, 再结合性质 2.3(2) 可知 (2) 成立.

性质 2.5 设 M 和 V 是 kG- 模, 则

$$M\underset{V}{\sim}M^*\underset{V}{\sim}\Omega(M)\underset{V}{\sim}\Omega_V(M).$$

证 由性质 1.7 易知性质 2.5 成立.

推论 2.6 设 M、N 和 V 是 kG- 模, 则

(1) $M\underset{V}{\sim}N$ 当且仅当 $M^*\underset{V}{\sim}N^*$;

(2) $M\underset{V}{\sim}N$ 当且仅当 $\Omega(M)\underset{V}{\sim}\Omega(N)$;

(3) $M\underset{V}{\sim}N$ 当且仅当 $\Omega_V(M)\underset{V}{\sim}\Omega_V(N)$.

证 由性质 2.5 可知推论 2.6 成立.

性质 2.7 设 M、N 和 V 是 kG- 模; 若 $M\underset{V}{\sim}N$, 则

(1) $M\underset{V^*}{\sim}N$;

(2) $M\underset{V^*\otimes V}{\sim}N$;

(3) $M\underset{\Omega(V)}{\sim}N$;

(4) $M \underset{\Omega_V(V)}{\widetilde{\quad}} N$.

证 由性质 1.10 可知性质 2.7 成立.

定理 2.8 设 $G \geq H, M$、N 和 V 是 kG- 模; 若 $M \underset{V}{\widetilde{\ }} N$, 则 $\mathrm{Res}_H^G(M) \underset{\mathrm{Res}_H^G(V)}{\widetilde{\quad}} \mathrm{Res}_H^G(N)$.

证 显然, 定理 2.8 是定理 1.16 的直接推论, 可另证如下.

设 $X \in <\mathrm{Res}_H^G(M)>_{\mathrm{Res}_H^G(V)}$, 那么, $\mathrm{Res}_H^G(M) \otimes X \in \mathcal{P}(\mathrm{Res}_H^G(V))$, 结合定理 1.15 知,

$$\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(M) \otimes X) \in \mathcal{P}(\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(V))),$$

一方面, 由 [15, Corollary4.3.8] 知, $\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(M) \otimes X) \cong M \otimes \mathrm{Ind}_H^G(X)$, 所以

$$M \otimes \mathrm{Ind}_H^G(X) \in \mathcal{P}(\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(V))),$$

另一方面, 再由 [15, Corollary4.3.8] 知, $\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(V) \otimes X) \cong V \otimes \mathrm{Ind}_H^G(k)$, 所以,

$$\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(V)) \in \mathcal{P}(V).$$

由此,

$$M \otimes \mathrm{Ind}_H^G(X) \in \mathcal{P}(\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(V))) \subseteq \mathcal{P}(V);$$

综合上述, $\mathrm{Ind}_H^G(X) \in <M>_V = <N>_V$.

进一步, 由定理 1.14 知, $\mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G(X)) \in <\mathrm{Rex}_H^G(N)>_{\mathrm{Res}_H^G(V)}$, 注意到 $X | \mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G(X))$, 所以, $X \in <\mathrm{Res}_H^G(N)>_{\mathrm{Res}_H^G(V)}$, 由此, 我们证明了,

$$<\mathrm{Res}_H^G(M)>_{\mathrm{Res}_H^G(V)} \subseteq <\mathrm{Res}_H^G(N)>_{\mathrm{Res}_H^G(V)}.$$

对称地, 可以证明,

$$<\mathrm{Res}_H^G(N)>_{\mathrm{Res}_H^G(V)} \subseteq <\mathrm{Res}_H^G(M)>_{\mathrm{Res}_H^G(V)},$$

所以, $<\mathrm{Res}_H^G(M)>_{\mathrm{Res}_H^G(V)} = <\mathrm{Res}_H^G(N)>_{\mathrm{Res}_H^G(V)}, \mathrm{Res}_H^G(M) \underset{\mathrm{Res}_H^G(V)}{\widetilde{\quad}} \mathrm{Res}_H^G(N)$ 得证.

推论 2.9 设 $G \geq H, M$、N 和 V 是 kG- 模; 若 M 和 N 是相对 H- 投射 kG- 模, 则

$$M \underset{V}{\widetilde{\ }} N \text{当且仅当} \mathrm{Res}_H^G(M) \underset{\mathrm{Res}_H^G(V)}{\widetilde{\quad}} \mathrm{Res}_H^G(N).$$

证 由推论 1.17 知推论 2.9 成立.

推论 2.10 设 $G \geq H, M$、N 和 V 是 kG- 模; 若 H 包含 G 的 Sylow p- 子群, 则

$$M \underset{V}{\widetilde{\ }} N \text{当且仅当} \mathrm{Res}_H^G(M) \underset{\mathrm{Res}_H^G(V)}{\widetilde{\quad}} \mathrm{Res}_H^G(N).$$

证 由推论 1.18 知推论 2.10 成立.

设 $G > H$, 若 $p \mid |H|$, 但对每个 $t \in G \backslash H$, 都有 $p \nmid |H \cap H^t|$, 则称 H 是 G 的强 p- 嵌入子群. 强 p- 嵌入子群 H 包含 G 的 Sylow$p$- 子群 P 的任意子群 Q 的正规化子 $N_G(Q)$; 强 p- 嵌入子群在有限单群分类中有重要的应用 [16].

定理 2.11 设 H 是 G 的强 p- 嵌入子群, M、N 和 V 是 kH- 模; 则 $M \underset{V}{\widetilde{\ }} N$ 当且仅当 $\mathrm{Ind}_H^G(M) \underset{\mathrm{Ind}_H^G(V)}{\widetilde{\quad}} \mathrm{Ind}_H^G(N)$.

证 必要性. 设 kG- 模 $Y \in <\mathrm{Ind}_H^G(M)>_{\mathrm{Ind}_H^G(V)}$, 那么, $\mathrm{Ind}_H^G(M) \otimes Y \in \mathcal{P}(\mathrm{Ind}_H^G(V))$, 再由定理 1.14 知,

$$\mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G(M) \otimes Y) \in \mathcal{P}(\mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G(V))).$$

注意到, $\mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G(M) \otimes Y) = \mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G(M)) \otimes \mathrm{Res}_H^G(Y)$, 以及, $M | \mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G(M))$, 所以,

$$M \otimes \mathrm{Res}_H^G(Y) \in \mathcal{P}(\mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G(V))),$$

由 [15, Theorem 5.2.1] 得知,

$$\mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G(V)) \cong \oplus_{g \in [H\backslash G/H]} \mathrm{Ind}_{H \cap {}^gH}^G({}^gV) \cong V \oplus (\oplus_{1 \neq g \in [H\backslash G/H]} \mathrm{Ind}_{H \cap {}^gH}^G({}^gV)).$$

注意到, 在 H 是 G 的强 p- 嵌入子群, 以及 $1 \neq g \in [H\backslash G/H]$ 时, $\mathrm{Ind}_{H \cap {}^gH}^G({}^gV)$ 都是投射 kG- 模, 结合注 1.2.(2) 得知, $\mathcal{P}(\mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G(V))) = \mathcal{P}(V)$, 所以, $M \otimes \mathrm{Res}_H^G(Y) \in \mathcal{P}(V)$, 也即, $\mathrm{Res}_H^G(Y) \in <M>_V = <N>_V$.

一方面, 由定理 1.15 得知, $\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(Y)) \in <\mathrm{Ind}_H^G(N)>_{\mathrm{Ind}_H^G(V)}$, 另一方面,

$$Y | \mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(Y)),$$

所以, $\mathrm{Ind}_H^G(N) \otimes Y \in \mathcal{P}(\mathrm{Ind}_H^G(V)), Y \in <\mathrm{Ind}_H^G(N)>_{\mathrm{Ind}_H^G(V)}$, 也即, $<\mathrm{Ind}_H^G(M)>_{\mathrm{Ind}_H^G(V)} \subseteq <\mathrm{Ind}_H^G(N)>_{\mathrm{Ind}_H^G(V)}$.

对称地, 可以证明,

$$<\mathrm{Ind}_H^G(N)>_{\mathrm{Ind}_H^G(V)} \subseteq <\mathrm{Ind}_H^G(M)>_{\mathrm{Ind}_H^G(V)},$$

综合上述, 得知

$$<\mathrm{Ind}_H^G(M)>_{\mathrm{Ind}_H^G(V)} \subseteq <\mathrm{Ind}_H^G(N)>_{\mathrm{Ind}_H^G(V)},$$

也即, $\mathrm{Ind}_H^G(M) \widetilde{\ _{\mathrm{Ind}_H^G(V)}} \mathrm{Ind}_H^G(N)$ 得证.

充分性. 设 kH- 模 $X \in <M>_V$, 则, $M \otimes X \in \mathcal{P}(V)$, 那么, 存在 kH- 模 Y, 使得, $M \otimes X | V \otimes Y$. 注意到, $\mathrm{Ind}_H^G(M) \otimes \mathrm{Ind}_H^G(X) \cong \mathrm{Ind}_H^G(M \otimes X) \otimes \mathrm{Ind}_H^G(k)$, 以及, $\mathrm{Ind}_H^G(V) \otimes \mathrm{Ind}_H^G(Y) \cong \mathrm{Ind}_H^G(V \otimes Y) \otimes \mathrm{Ind}_H^G(k)$, 所以,

$$\mathrm{Ind}_H^G(M) \otimes \mathrm{Ind}_H^G(X) | \mathrm{Ind}_H^G(V) \otimes \mathrm{Ind}_H^G(Y),$$

也即,

$$\mathrm{Ind}_H^G(X) \in <\mathrm{Ind}_H^G(M)>_{\mathrm{Ind}_H^G(V)} = <\mathrm{Ind}_H^G(N)>_{\mathrm{Ind}_H^G(V)}.$$

结合定理 1.14 知,

$$\mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G(X)) \in <\mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G(N))>_{\mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G(V))},$$

由此,

$$\mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G(N)) \otimes \mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G(X)) \in \mathcal{P}(\mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G(V))),$$

结合必要性证明细节得知 $N | \mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G(N)), X | \mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G(X)), \mathcal{P}(\mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G(V))) = \mathcal{P}(V)$, 所以, $N \otimes X \in \mathcal{P}(V)$, 也即, $X \in <N>_V, <M>_V \subseteq <N>_V$.

对称地, 可证明, $<N>_V \subseteq <M>_V$, 从而, $<M>_V = <N>_V$, 则 $M \underset{V}{\widetilde{\ }} N$. 充分性得证.

定理 2.12 设 H 是 G 的强 p- 嵌入子群, M、N 和 V 是 kG- 模; 则

$$M \underset{V}{\widetilde{\ }} N \text{当且仅当} \operatorname{Res}_H^G(M) \underset{\operatorname{Res}_H^G(V)}{\widetilde{\qquad}} \operatorname{Res}_H^G(N).$$

证 由定理 2.8 知必要性成立, 下面证明充分性.

因为 $\operatorname{Res}_H^G(M) \underset{\operatorname{Res}_H^G(V)}{\widetilde{\qquad}} \operatorname{Res}_H^G(N)$, 所以, 由定理 2.11 知,

$$\operatorname{Ind}_H^G(\operatorname{Res}_H^G(M)) \underset{\operatorname{Ind}_H^G(\operatorname{Res}_H^G(V))}{\widetilde{\qquad\qquad}} \operatorname{Ind}_H^G(\operatorname{Res}_H^G(N)).$$

结合 [15, Theorem 11.6.4] 知, 考察 M 的每个不可分解直因子的 Green 对应, 可以得到,

$$\operatorname{Ind}_H^G(\operatorname{Res}_H^G(M)) \cong M \otimes X,$$

这里 X 是投射 kG- 模. 类似地, 可以得到, $\operatorname{Ind}_H^G(\operatorname{Res}_H^G(V)) \cong V \otimes Y$, 这里 Y 是投射 kG- 模. 那么, 结合性质 1.6(1)、性质 1.9(1)、注 1.2(2) 知

$$<\operatorname{Ind}_H^G(\operatorname{Res}_H^G(M))>_{\operatorname{Ind}_H^G(\operatorname{Res}_H^G(V))} = <M \oplus X>_{V \oplus Y} = <M>_V.$$

同理可得,

$$<\operatorname{Ind}_H^G(\operatorname{Res}_H^G(N))>_{\operatorname{Ind}_H^G(\operatorname{Res}_H^G(V))} = <N>_V.$$

综合上述, $<M>_V = <N>_V$, $M \underset{V}{\widetilde{\ }} N$, 充分性得证.

定理 2.13 设 $G \geq H$, V 是 kG- 模; 若 H 包含 G 的 Sylow p- 子群, 则模上的限制映射建立了从 kG- 模上的全体相对 V-Bousfield 等价类 $\mathbb{C}(kG)_V$ 到 kH- 模上的全体相对 $\operatorname{Res}_H^G(V)$-Bousfield 等价类 $\mathbb{C}(kH)_{\operatorname{Res}_H^G(V)}$ 的单射对应.

证 利用模上的限制映射建立从 $\mathbb{C}(kG)_V$ 到 $\mathbb{C}(kH)_{\operatorname{Res}_H^G(V)}$ 的映射, 如下:

$$f : \mathbb{C}(kG)_V \to \mathbb{C}(kH)_{\operatorname{Res}_H^G(V)} : \ll M \gg_V \to \ll \operatorname{Res}_H^G(M) \gg_{\operatorname{Res}_H^G(V)}, \ \ll M \gg_V \in \mathbb{C}(kG)_V$$

由推论 2.10 知, 映射 f 是合理定义的, 并且是从 $\mathbb{C}(kG)_V$ 到 $\mathbb{C}(kH)_{\operatorname{Res}_H^G(V)}$ 的单射对应. 证毕.

定理 2.14 设 H 是 G 的强 p- 嵌入子群, V 是 kG- 模; 则 kG- 模上的全体相对 V-Bousfield 等价类 $\mathbb{C}(kG)_V$ 与 kH- 模上的全体相对 $\operatorname{Res}_H^G(V)$-Bousfield 等价类 $\mathbb{C}(kH)_{\operatorname{Res}_H^G(V)}$ 一一对应, 并且

$$\mathbb{C}(kH)_{\operatorname{Res}_H^G(V)} = \{\ll \operatorname{Res}_H^G(M) \gg_{\operatorname{Res}_H^G(V)} \mid \ll M \gg_V \in \mathbb{C}(kG)_V\};$$

$$\mathbb{C}(kG)_V = \{\ll \operatorname{Ind}_H^G(N) \gg_V \mid \ll N \gg_{\operatorname{Res}_H^G(V)} \in \mathbb{C}(kH)_{\operatorname{Res}_H^G(V)}\}.$$

证 $\mathbb{C}(kG)_V$ 与 $\mathbb{C}(kH)_{\operatorname{Res}_H^G(V)}$ 之间的两个映射定义如下:

$$f : \mathbb{C}(kG)_V \to \mathbb{C}(kH)_{\operatorname{Res}_H^G(V)} : \ll M \gg_V \to \ll \operatorname{Res}_H^G(M) \gg_{\operatorname{Res}_H^G(V)}, \ \ll M \gg_V \in \mathbb{C}(kG)_V,$$

$$g : \mathbb{C}(kH)_{\operatorname{Res}_H^G(V)} \to \mathbb{C}(kG)_V : \ll N \gg_{\operatorname{Res}_H^G(V)} \to \ll \operatorname{Res}_H^G(N) \gg_V, \ \ll N \gg_{\operatorname{Res}_H^G(V)} \in \mathbb{C}(kH)_{\operatorname{Res}_H^G(V)}.$$

一方面, 定理 2.11 和定理 2.12 说明, f 和 g 是合理定义的; 另一方面, 结合定理 2.12 的证明细节, 可以得到,

$$gf(\ll M \gg_V) = g(\ll \mathrm{Res}_H^G(M) \gg_{\mathrm{Res}_H^G(V)}) = \ll \mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(M)) \gg_V = \ll M \gg_V;$$

以及结合定理 2.11 的证明细节, 可以得到,

$$fg(\ll N \gg_{\mathrm{Res}_H^G(V)}) = f(\ll \mathrm{Ind}_H^G(N) \gg_V) = \ll \mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G(N)) \gg_{\mathrm{Res}_H^G(V)} = \ll N \gg_{\mathrm{Res}_H^G(V)};$$

综合上述, $gf = 1, fg = 1$, 这说明, $\{\ll \mathrm{Res}_H^G(M) \gg_{\mathrm{Res}_H^G(V)} \mid \ll M \gg_V \in \mathbb{C}(kG)_V\}$ 是 kH- 模上的全体相对 $\mathrm{Res}_H^G(V)$-Bousfield 等价类 $\mathbb{C}(kH)_{\mathrm{Res}_H^G(V)}$, 以及,

$$\{\ll \mathrm{Ind}_H^G(N) \gg_V \mid \ll N \gg_{\mathrm{Res}_H^G(V)} \in \mathbb{C}(kH)_{\mathrm{Res}_H^G(V)}\}$$

是 kG- 模上的全体相对 V-Bousfield 等价类 $\mathbb{C}(kG)_V$, 并且它们之间是一一对应的. 证毕.

推论 2.15 设 H 是 G 的强 p- 嵌入子群, U 是不可分解的 kH- 模, V 是不可分解的 kG-模, 并且 U 和 V 互为 Green 对应; 则 kG- 模上的全体相对 V-Bousfield 等价类 $\mathbb{C}(kG)_V$ 与 kH- 模上的全体相对 U-Bousfield 等价类 $\mathbb{C}(kG)_U$ 一一对应, 并且

$$\mathbb{C}(kH)_U = \{\ll \mathrm{Res}_H^G(M) \gg_U \mid \ll M \gg_V \in \mathbb{C}(kG)_V\};$$

$$\mathbb{C}(kG)_V = \{\ll \mathrm{Ind}_H^G(N) \gg_V \mid \ll N \gg_U \in \mathbb{C}(kH)_U\}.$$

证 由定理 2.14, 再结合定理 2.11 和定理 2.12 的证明细节, 可知推论 2.15 成立.

参 考 文 献

[1] Bousfield A. The localization of spectra with respect to homology[J]. Topology, 1979, 18(4): 257–281.

[2] Hovey M, Palmieri J. The structure of the Bousfield lattice[J]. Communications in Contemporary Mathematics, 1998, 239: 175–196.

[3] Wolcott L. Bousfield lattices of non-Noetherian rings: some quotients and products[J]. Homology, Homotopy and Applications, 2014, 16(2): 205–229.

[4] Iyengar S, Krause H. The Bousfield lattice of a triangulated category and stratification[J]. Mathematische Zeitschrift, 2013, 273(3-4): 1215–1241.

[5] Iyengar S. The bousfield lattice of the stable module category of a finite group[A]. Representation Theory of Quivers and Finite Dimensional Algebras[C], Oberwolfach, 2011.

[6] Happel D. Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

[7] Carlson J. Modules and group algebras[M]. Lectures in Mathematics ETH Zurich, Basel: Birkhauser Verlag, 1996.

[8] Carlson J, Peng C. Relative projectivity and ideals in cohomology rings[J]. Journal of Algebra, 1996, 183(3): 929–948.

[9] Carlson J, Peng C, Wheeler W. Transfer maps and virtual projectivity[J]. Journal of Algebra, 1998, 204(1): 286–311.

[10] Lassueur C. Relative projectivity and relative endotrivial modules[J]. Journal of Algebra, 2011, 337(1): 285–317.

[11] Benson D, Carlson J. Nilponent elements in the Green ring[J]. Journal of Algebra, 1986, 104(2): 329–350.

[12] Auslander M, Carlson J. Almost-split sequences and group rings[J]. Journal of Algebra, 1986, 103(1): 122–140.

[13] Carlson J, Thevenaz J. The classification of endo-trivial modules[J]. Inventiones Mathematicae, 2004, 158(2): 389–411.

[14] Geer N, Kujawa J, Patureau-Mirand B. Generalized trace and modified dimension functions on ribbon categories[J]. Selecta Mathematica, 2011, 17(2): 453–504.

[15] Webb P. A course in finite group representation theory[M]. New York: Cambridge University Press, 2017.

[16] Salarian R, Stroth G. Existence of strongly p-embedded subgroups[J]. Communications in Algebra, 2015, 43(3): 983–1024.

[17] Huang W. Bousfield equivalence of stable module category for finite groups(in Chinese)[J]. Journal of Jilin University(Science Edition), 2018, 56(1): 47–52.

[18] Benson D. Representations and cohomology I. Basic representation theory of finite groups and associative algebras[M]. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 30, New York: Cambridge University Press, 2004.

ON RELATIVE BOUSFIELD CLASSES AND RELATIVE BOUSFIELD EQUIVALENCE RELATIONSHIPS

HUANG Wen-lin

(*School of Mathematics, Renmin University of China, Beijing 100872, China*)

Abstract: In this paper, the author studied the relative Bousfield classes of finitely generated modules on group algebras of finite groups. We defined the relative Bousfield equivalence relations and the relative Bousfield equivalence classes, and established the correspondence between the relative Bousfield equivalence classes of a group and those of its subgroup.

Keywords: group algebra; relative Bousfield class; relative Bousfield equivalence; relative projectivity

2010 MR Subject Classification: 20C05; 20C20