Vol. 41 (2021)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

Diffeological 空间范畴中光滑映射的分解

詹 妍, 赵 浩
(华南师范大学数学科学学院, 广东 广州 510631)

摘 要: 本文研究了 diffeological 空间范畴中光滑映射的分解问题. 利用经典同伦论中映射分解的方法, 获得了任何一个光滑映射都可以分解为一个光滑同伦等价和光滑纤维化或光滑上纤维化的复合的结果, 推广了拓扑空间范畴中的相关结果.

关 键 词: diffeological 空间; 光滑纤维化; 光滑上纤维化

MR(2010) **主题分类号**: 18G55; 55P05 **中 图 分 类 号**: O189

文 献 标 识 码: A **文 章 编 号**: 0255-7797(2021)03-0237-10

0 引言

纤维化作为复叠空间的自然推广, 对同伦论的研究有着重要的作用 [1]. 在拓扑空间范畴中, 对纤维化理论的研究已经完善. 1966 年, Spanier[2] 研究了复叠空间理论, 引入纤维丛和 Hurewicz 纤维化的概念. 特别地, 文 [2] 给出了升腾函数的概念并证明了映射 $p\colon E \to B$ 是纤维化当且仅当存在 p 的升腾函数. 与之对偶地, 文 [2] 也给出了收缩函数的概念并证明了函数 $f\colon X' \to X$ 是上纤维化当且仅当存在 f 的收缩函数. 利用升腾函数与收缩函数的概念, 文 [2] 给出了诱导纤维化的相关结论: 对任一空间 X, 映射 $p\colon E \to B$ 诱导映射 $p_*\colon E^X \to B^X$, 由 $p_*(g) = p \circ g$ 定义, 其中 E^X 与 B^X 表示映射空间. 若 p 是纤维化, 则 p_* 也是纤维化. 与之对偶地, 对任一空间 Y, 映射 $f\colon X' \to X$ 诱导映射 $f^*\colon Y^X \to Y^{X'}$, 由 $f^*(g) = g \circ f$ 定义. 若 f 是上纤维化, 则 f^* 是纤维化. 1970 年, Maunder[3] 根据 Hurewicz 纤维化的定义, 证明了任何一个光滑映射既可表示为一个上纤维化和同伦等价的复合, 也可表示为一个同伦等价和纤维化的复合.

相对于拓扑空间范畴中纤维化的理论, 在其它范畴中也有对应的纤维化理论, diffeological 空间范畴便是其中的范畴之一. 在 diffeological 空间范畴中, 其对象为 diffeological 空间, 态射为 diffeological 空间之间的光滑映射. Diffeological 空间作为光滑流形的一般化, 最初由 Souriau[4] 在上世纪 80 年代提出. 2013 年, Iglesias-Zemmour[5] 在专著 [5] 中系统地给出了 diffeological 空间的同伦理论. 在文 [6] 中, Haraguchi-Shimakawa 研究了 diffeological 空间范畴中的模结构, 并给出了两个光滑映射 $f, f'\colon X \to Y$ 之间的光滑同伦的另一定义, 即存在 $X \times I$ 到 Y 的光滑映射 H 使 $H_0 = f$, $H_1 = f'$, 且不失一般性地可假设 H 为 tame 同伦. 而在文 [7] 中, Haraguchi 研究了光滑 CW 复形的同伦性质并且给出了光滑同伦等价的定义, 即存在光滑映射 $f\colon X \to Y$ 和 $g\colon Y \to X$, 使得 $g \circ f$ 光滑同伦于 1_X, $f \circ g$ 光滑同伦于 1_Y.

*收稿日期: 2020-09-15 接收日期: 2020-10-22
基金项目: 国家自然科学基金面上项目资助 (11671154, 11761072); 广东省自然科学基金面上项目资助 (2020A1515011008).
作者简介: 詹妍 (1995–), 女, 广东潮州, 硕士, 主要研究方向: 代数拓扑.
通讯作者: 赵浩

根据已知的文献, 虽然有关 diffeological 空间的同伦理论得到了充分的发展, 但是有关纤维化的一些基本概念与性质并未见到相关的结果. 鉴于此, 本文将研究 diffeological 空间范畴有关纤维化的相关概念与性质, 得到以下的主要结果:

定理 0.1 任何一个光滑映射 $f\colon A \to B$ 可表示成为一个光滑同伦等价和光滑纤维化的复合.

定理 0.2 任何一个光滑映射 $f\colon A \to B$ 可表示成为一个光滑上纤维化和光滑同伦等价的复合.

本文结构安排如下: 在第一节我们给出有关 diffeological 空间范畴的一些基本概念与性质, 在第二节给出定理 0.1 的证明, 在第三节给出定理 0.2 的证明.

1 预备知识

本节介绍有关 diffeological 空间的一些基本概念与性质.

定义 1.1 [5] 设 X 是一个集合, U 是欧式空间的开子集, 任一映射 $P\colon U \to X$ 称为 X 的一个参数化.

定义 1.2 [5] 设 X 是一个非空集合, U 是欧式空间的开子集. X 的一个参数化族 $D_X = \{f|f\colon U \to X\}$, 称为 X 的一个 diffeology, 如果它满足以下三个条件:

(1) 常值参数化在 D_X 中;

(2) 对任一映射 $P\colon U \to X$, 若对于 U 中的任一点 u, 存在 u 的一个开邻域 V, 使得 $P|V\colon V \to X$ 在 D_X 中, 则 P 在 D_X 中;

(3) 对 D_X 中的任一参数化 $P\colon U \to X$ 和任一欧式空间开子集之间的光滑映射 $Q\colon V \to U$, $P \circ Q$ 在 D_X 中.

集合 X 和它的一个 diffeologyD_X 一起称为一个 diffeological 空间. 称 D_X 中的每个成员为 X 的 plot.

定义 1.3 [5] 给定 diffeological 空间 X 和 Y, 我们称映射 $f\colon X \to Y$ 是光滑的, 如果对于 X 的任一 plot $P\colon U \to X$, $f \circ P$ 是 Y 的一个 plot.

命题 1.4 [5] 设 X, Y 和 Z 都是 diffeological 空间, 若 $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ 都是光滑映射, 则复合映射 $g \circ f\colon X \to Z$ 也是光滑映射.

以下介绍几类常见的 diffeological 空间及其相关的性质.

定义 1.5 [7] 设 A 是 X 的一个非空子集, $i\colon A \to X$ 是包含映射. A 有一个子 diffeology

$$D_A = \{P\colon U \to A|i \circ P\colon U \to X \in D_X\}.$$

我们称具有子 diffeology 的 A 是 X 的子空间. 在本文中, 我们把单位区间 I 看成 R 的子空间.

定义 1.6 [7] 设 X 和 Y 都是 diffeological 空间, $\pi\colon X \to Y$ 是一个光滑的、满的映射, 如果对于 Y 的任一 plot $P\colon U \to Y$ 和任一点 $u \in U$, 存在 u 的开邻域 V 和 X 的 plot $Q\colon V \to X$, 使得 $P|V = \pi \circ Q$, 则称映射 π 为一个除法.

命题 1.7 [5] 设 X, Y 和 Z 都是 diffeological 空间, $\pi\colon X \to Y$ 是除法. 则映射 $f\colon Y \to Z$ 是光滑的当且仅当 $f \circ \pi$ 是光滑的.

定义 1.8 [7] 设 X 是 diffeological 空间, Y 是非空集合. $\pi\colon X \to Y$ 是满射. Y 有一个商 diffeology

$$\begin{aligned} D_Y = \{P\colon U \to Y | &任意 r \in U, 存在 r 的开邻域 V, Q\colon \\ &V \to X \in D_X, 使得 P|V\colon V \to X = \pi \circ Q\}. \end{aligned}$$

称带商 diffeology 的 Y 为 X 的商空间或 X 的 diffeological 商. 由以上定义可见, π 是一个除法.

定义 1.9 [7] 设 X 与 Y 都是 diffeological 空间, 令 $C^\infty(X,Y) = \{所有光滑映射 f\colon X \to Y\}$. 则 $C^\infty(X,Y)$ 有一个函数式 diffeology

$$\begin{aligned} D_{C^\infty(X,Y)} = \{P\colon U \to C^\infty(X,Y) | &任意 Q\colon V \to X \\ &\in D_X, \mathrm{ev} \circ (P \times Q)\colon U \times V \to Y \in D_Y\}. \end{aligned}$$

其中 $\mathrm{ev}\colon C^\infty(X,Y) \times X \to Y$ 是赋值映射, 定义为 $\mathrm{ev}(f,x) = f(x)$.

定理 1.10 [5] 设 X, Y 和 Z 都是 diffeological 空间, $C^\infty(X,Y), C^\infty(X \times Y, Z)$ 和 $C^\infty(X, C^\infty(Y,Z))$ 都带函数式 diffeology. 则 $C^\infty(X, C^\infty(Y,Z)) \cong C^\infty(X \times Y, Z)$.

定义 1.11 [5] 设 $H\colon X \times I \to Y$ 是光滑同伦, 如果存在 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, 使得

$$H(x,s) = H(x,0), \quad 0 \le s \le \varepsilon; \qquad H(x,s) = H(x,1), \quad 1-\varepsilon \le s \le 1.$$

则称 H 为 tame 同伦.

以下给出光滑纤维化与光滑上纤维化的概念.

定义 1.12 [2] 设 E, B 和 X 都是 diffeological 空间. 如果对任一光滑映射 $f\colon X \to E$, 光滑同伦 $G\colon X \times I \to B, G_0 = p \circ f$, 都存在光滑同伦 $F\colon X \times I \to E$, 使得 $F_0 = f, p \circ F = G$(F 是 G 的提升), 则称 p 有关于空间 X 的光滑同伦提升性质. 把 X 看成 $X \times \{0\}$, 设 $i_0\colon X \to X \times I$ 是包含映射, 则有交换图表如下:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, dashed, "F"'] & B. \end{tikzcd}$$

若对所有 diffeological 空间 X, p 都有光滑同伦提升性质, 则称 p 是光滑纤维化.

定义 1.13 [2] 设 X, Y 是 diffeological 空间, A 是 X 的子空间. 如果对任一光滑映射 $f\colon X \to Y$, 光滑同伦 $G\colon A \times I \to Y, G_0 = f|A$, 都存在光滑同伦 $F\colon X \times I \to Y$, 使得 $F_0 = f, F|A \times I = G$($F$ 是 G 的扩张), 则称 f 有关于空间 X 的光滑同伦扩张性质. 设 $i\colon A \to X$ 是包含映射, 则有交换图表如下:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "i"] \arrow[dd, "\cap"'] & & X \arrow[dl, "f"] \arrow[dd, "\cap"] \\ & Y & \\ A \times I \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, "i \times 1_I"'] & & X \times I. \arrow[ul, dashed, "F"'] \end{tikzcd}$$

若对所有 diffeological 空间 X, f 都有光滑同伦扩张性质, 则称 f 是光滑上纤维化.

2 定理 0.1 的证明

定理 2.1(即定理 0.1) 任何一个光滑映射 $f\colon A\to B$ 可表示成为一个光滑同伦等价和光滑纤维化的复合.

证 令 $P_f=\{(a,\lambda)\in A\times B^I, f(a)=\lambda(1)\}$, 看成乘积空间 $A\times B^I$ 的子空间, 其中 $B^I=C^\infty(I,B)$. 令

$$\begin{aligned} g\colon P_f\to B, &\qquad h\colon A\to P_f,\\ (a,\lambda)\mapsto\lambda(0) &\qquad a\mapsto(a,e_{f(a)}). \end{aligned}$$

则有以下交换图表:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \\ P_f \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}.$$

从而可证光滑映射 f 可表示成为光滑同伦等价映射 h 和光滑纤维化 g 的复合，即证 g 是光滑纤维化, 以及 h 是光滑同伦等价.

首先证明 g 是光滑纤维化.

(1) 证 g 是光滑映射.

任取 $P\colon U\to P_f\in D_{P_f}$, 设 $P(u)=(a,\lambda), u\in U$. 则 $g\circ P\colon U\to B$ 为

$$\begin{gathered} U\xrightarrow{P}P_f\xrightarrow{g}B\\ u\mapsto(a,\lambda)\mapsto\lambda(0). \end{gathered}$$

设 $i\colon P_f\to A\times B^I$ 是包含映射, 则 $i\circ P\colon U\to A\times B^I\in D_{A\times B^I}$:

$$\begin{gathered} U\xrightarrow{P}P_f\xrightarrow{i}A\times B^I\\ u\mapsto(a,\lambda)\mapsto(a,\lambda). \end{gathered}$$

设 $\pi_A\colon A\times B^I\to A, \pi_{B^I}\colon A\times B^I\to B^I$ 是自然投射, 则 $P^{'}\triangleq\pi_{B^I}\circ i\circ P\colon U\to B^I\in D_{B^I}$:

$$\begin{gathered} U\xrightarrow{i\circ P}A\times B^I\xrightarrow{\pi_{B^I}}B^I\\ u\mapsto\quad(a,\lambda)\longmapsto\lambda. \end{gathered}$$

取 $Q\colon U\to I, Q(u)=0, u\in U$. 则 $Q\in D_I$. 取光滑映射 $l\colon U\to U\times U, l(u)=(u,u), u\in U$. 于是, $ev\circ(P^{'}\times Q)\circ l\in D_B$:

$$\begin{gathered} U\xrightarrow{l}U\times U\xrightarrow{P^{'}\times Q}C^\infty(I,B)\times I\xrightarrow{ev}B\\ u\longmapsto(u,u)\longmapsto(\lambda,0)\longmapsto\lambda(0), \end{gathered}$$

即 $g\circ P=\mathrm{ev}\circ(P^{'}\times Q)\circ l\in D_B\colon\ \in D_B$. 故 g 是光滑映射.

(2) 证 g 对所有 diffeological 空间都有光滑同伦提升性质.

设 X 是任一 diffeological 空间, $k\colon X\to P_f$ 是任一光滑映射, $G\colon X\times I\to B$ 是光滑同伦使 $G_0=g\circ k$. 不妨设 G 是 tame 同伦.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "k"] \arrow[d, "i_0"'] & P_f \arrow[d, "g"] \\ X\times I \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, dashed, "F"'] & B. \end{tikzcd}$$

记 $k_1\triangleq\pi_A\circ i\circ k\colon X\to A, k_2\triangleq\pi_{B^I}\circ i\circ k\colon X\to B^I$. 根据指数对应法则, k_2 对应 $k^{'}\colon X\times I\to B, k^{'}(x,t)=k_2(x)(t)$. 定义 $F_B^{'}\colon X\times I\times I$ 为

$$F_B^{'}(x,s,t)=\begin{cases}k^{'}(x,\frac{2t-s}{2-s}), & 0\le s\le 2t,\\ G(x,s-2t), & 2t\le s\le 1.\end{cases}$$

由于 $G(x,0)=g\circ k(x)=k_2(x)(0)=k^{'}(x,0)$, G 是 tame 映射, 故 $F_B^{'}$ 是光滑的. 根据指数对应法则, 得到光滑同伦 $F_B\colon X\times I\to B^I$.

再定义 $F\colon X\times I\to A\times B^I$ 为 $F(x,s)=(k_1(x),F_B(x,s))$, 由 k_1 和 F_B 的光滑性得 F 是光滑的. 又 $f(k_1(x))=k_2(x)(1)=k^{'}(x,1)=F_B^{'}(x,s,1)=F_B(x,s)(1)$, 从而 F 是从 $X\times I$ 到 P_f 的映射. 同时, $F(x,0)=(k_1(x),F_B(x,0))=(k_1(x),k^{'}(x,t))=(k_1(x),k_2(x))=k(x); g\circ F=F_B(x,s)(0)=F_B^{'}(x,s,0)=G(x,s)$.

因此, 由 (1)(2) 知 g 是光滑纤维化.

其次证明 h 是光滑同伦等价.

(1) 证 $h\colon A\to P_f, h(a)=(a,e_{f(a)})$ 是光滑映射.

任取 $P\colon U\to A\in D_A$, $h\circ P\colon U\to P_f$ 为

$$\begin{aligned} U &\xrightarrow{P} A \xrightarrow{\quad h\quad} P_f\\ u &\longmapsto P(u)\longmapsto (P(u),e_{f(P(u))}).\end{aligned}$$

要证 $h\circ P\in D_{P_f}$, 即证 $P^{'}\triangleq i\circ h\circ P\colon U\to A\times B^I, u\mapsto(P(u),e_{f(P(u))})\in D_{A\times B^I}$, 则转化为证 $P_1\triangleq\pi_A\circ P^{'}\colon U\to A\in D_A$, 和 $P_2\triangleq\pi_{B^I}\circ P^{'}\colon U\to B^I\in D_{B^I}$:

$$\begin{aligned} U &\xrightarrow{\quad P^{'}\quad} A\times B^I \xrightarrow{\quad\pi_A\quad} A & U &\xrightarrow{\quad P^{'}\quad} A\times B^I \xrightarrow{\quad\pi_{B^I}\quad} B^I\\ u &\longmapsto (P(u),e_{f(P(u))})\mapsto P(u). & u &\longmapsto (P(u),e_{f(P(u))})\mapsto e_{f(P(u))}.\end{aligned}$$

可见, $P_1=P\in D_A$. 而要证 $P_2\in D_{B^I}$, 即证对任意 $Q\colon V\to I\in D_I$, 都有 $ev\circ(P_2\times Q)\in D_B$:

$$\begin{aligned} U\times V &\xrightarrow{P_2\times Q} C^\infty(I,B)\times I \xrightarrow{\ ev\ } B\\ (u,v) &\longmapsto (e_{f(P(u))},Q(s))\longmapsto f(P(u)),\end{aligned}$$

由 f 的光滑性得 $ev\circ(P_2\times Q)\in D_B$ 成立, 从而 $h\circ P\in D_{P_f}$, 即 h 是光滑映射.

(2) 定义 $j\colon P_f\to A, j(a,\lambda)=a$, 是第一个坐标的投射, 则是光滑的.

(3) 证 $j\circ h\simeq 1_A, h\circ j\simeq 1_{P_f}$.

首先 $j\circ h=1_A$, 而 $h\circ j\colon 1_{P_f}\to 1_{P_f}$ 为 $h\circ j(a,\lambda)=(a,e_{f(a)})$.

定义 $H\colon P_f\times I\to P_f, H(a,\lambda,s)=(a,\lambda_s),\lambda_s(t)=\lambda(t+s(1-t)),t\in I$. 下证 H 是光滑的.

任取 $P\colon U\to P_f\times I\in D_{P_f\times I}$, 设 $P(u)=(a,\lambda,s),u\in U$. 需证 $H\circ P\colon U\to P_f\in D_{P_f}$:

$$\begin{gathered}U\xrightarrow{P}P_f\times I\xrightarrow{H}P_f\\ u\mapsto(a,\lambda,s)\mapsto(a,\lambda_s).\end{gathered}$$

则需证 $P''\triangleq i\circ H\circ P\colon U\to A\times B^I, P''(u)=(a,\lambda_s)\in D_{A\times B^I}$. 转化为证 $P_1'\triangleq\pi_A\circ P''\colon U\to A\in D_A, P_2'\triangleq\pi_{B^I}\circ P''\colon U\to B^I\in D_{B^I}$:

$$\begin{array}{ll}U\xrightarrow{P''}A\times B^I\xrightarrow{\pi_A}A & U\xrightarrow{P''}A\times B^I\xrightarrow{\pi_{B^I}}B^I\\ u\longmapsto(a,\lambda_s)\longmapsto a, & u\longmapsto(a,\lambda_s)\longmapsto\lambda_s.\end{array}$$

而证 $P_2'\in D_{B^I}$ 相当于要证对任意 $Q'\colon V\to I\in D_I$, 都有 $\mathrm{ev}\circ(P_2'\times Q')\in D_B$:

$$\begin{gathered}U\times V\xrightarrow{P_2'\times Q'}C^\infty(I,B)\times I\xrightarrow{ev}B\\ (u,v)\longmapsto(\lambda_s,Q'(v))\longmapsto\lambda(Q'(v)+s(1-Q'(v))).\end{gathered}$$

由于 $P\colon U\to P_f\times I\in D_{P_f\times I}$, 设 $\pi_{P_f}\colon P_f\times I\to P_f,\pi_I\colon P_f\times I\to I$ 是自然投射, 得到 $i\circ\pi_{P_f}\circ P\colon U\to I\in D_{A\times B^I},\pi_I\circ P\colon U\to I\in D_I$:

$$\begin{array}{ll}U\xrightarrow{P}P_f\times I\xrightarrow{\pi_{P_f}}P_f\xrightarrow{i}A\times B^I & U\xrightarrow{P}P_f\times I\xrightarrow{\pi_I}I\\ u\mapsto(a,\lambda,s)\mapsto(a,\lambda)\mapsto(a,\lambda). & u\longmapsto(a,\lambda,s)\mapsto s.\end{array}$$

从而 $\pi_A\circ i\circ\pi_{P_f}\circ P\colon U\to I,\ u\mapsto a\in D_A$, 即得到 $P_1'\in D_A$. 另, $P_2''\triangleq\pi_{B^I}\circ i\circ\pi_{P_f}\circ P\colon U\to I,u\mapsto\lambda\in D_{B^I}$. 取 $Q\colon V\to I,Q(v)=(Q'(v)+s(1-Q'(v)))\in D_I$, 则有 $\mathrm{ev}\circ(P_2''\times Q)\in D_B$:

$$\begin{gathered}U\times V\xrightarrow{P_2''\times Q}C^\infty(I,B)\times I\xrightarrow{\quad\mathrm{ev}\quad}B\\ (u,v)\mapsto(\lambda,Q'(v)+s(1-Q'(v)))\mapsto\ \lambda(Q'(v)+s(1-Q'(v))),\end{gathered}$$

即 $\mathrm{ev}\circ(P_2'\times Q')\in D_B$. 故 H 是光滑映射. 又 $H_0=1_{P_f},H_1=h\circ j$, 所以 H 是连接 1_{P_f} 和 $h\circ j$ 的光滑同伦.

因此, 由 (1)(2)(3) 知 h 是光滑同伦等价.

3 定理 0.2 的证明

定义 3.1 [5] 设 X 和 Y 都是 diffeological 空间, 如果 $f\colon X\to Y$ 是双射, 且 f 和 f^{-1} 都是光滑的, 则称映射 f 为 diffeomorphism.

引理 3.2 映射 $\phi\colon X\times Y/\alpha\times\beta\to X/\alpha\times Y/\beta$(由 $\phi([x,y])=([x],[y])$ 定义) 是 diffeomorphism.

证 (1) 由等价关系 $\alpha,\beta,\alpha\times\beta$ 的定义和映射 ϕ 的定义, 得 ϕ 是双射, 且有以下交换图表:

$$\begin{tikzcd}
X\times Y \arrow[r, "p_\alpha\times p_\beta"] \arrow[d, "p_{\alpha\times\beta}"'] & X/\alpha\times Y/\beta \arrow[dl, shift left, "\phi^{-1}"] \\
X\times Y/\alpha\times\beta \arrow[ur, shift left, "\phi"] &
\end{tikzcd}.$$

(2) p_α,p_β 是除法, 易证 $p_\alpha\times p_\beta$ 是光滑的. 又 $p_{\alpha\times\beta}$ 是除法, 由命题 1.7 知 ϕ 是光滑映射.

(3) 由于 $p_\alpha\times p_\beta$ 是除法, $p_{\alpha\times\beta}$ 是光滑映射, 故由命题 1.7 知 ϕ^{-1} 是光滑映射.

引理 3.3 设 $F\colon X\times I\to Y$ 是光滑同伦. 定义等价关系 α: $x\alpha x'$ 当且仅当 $F(x,t)=F(x',t)$, 任意 $t\in I$. 设 $p_\alpha\colon X\to X/\alpha$ 是粘合映射. 则 F 诱导光滑同伦 $F'\colon X/\alpha\times I\to Y$, 使得 $F'\circ(p_\alpha\times 1_I)=F$.

证 设 1 是 I 上的等价关系, 定义 $i1i'$ 当且仅当 $i=i'$, 则 $\alpha\times 1$ 是 $X\times I$ 上的等价关系. 由引理 3.2 知 $\phi\colon X\times I/\alpha\times 1\to X/\alpha\times I$ 是 diffeomorphism. 根据 F 的假设知, 存在映射 $F''\colon X\times I/\alpha\times 1\to Y$ 使 $F''\circ p_{\alpha\times 1}=F$, 且因为 $p_{\alpha\times 1}$ 是除法, 所以 F'' 是光滑的. 得到以下交换图表:

$$\begin{tikzcd}
X\times I \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "p_\alpha\times 1_I"] \arrow[ddr, "p_{\alpha\times 1}"'] & & Y \\
& X/\alpha\times I \arrow[ur, dashed, "F'"] & \\
& X\times I/(\alpha\times 1) \arrow[u, "\phi"] \arrow[uur, "F''"'] &
\end{tikzcd}.$$

令 $F'=F''\circ\phi^{-1}$, 即是所求.

定理 3.4 (即定理 0.2) 任何一个光滑映射 $f\colon A\to B$ 可表示成为一个光滑上纤维化和光滑同伦等价的复合.

证 令 $M_f=A\times I\coprod B/\sim$ 为 f 的光滑映射柱, 其中 $\sim$ 是等价关系: $(a,1)\sim f(a), a\in A$. 把 M_f 看成 $A\times I\coprod B$ 的商空间, 设 $p\colon A\times I\coprod B\to M_f$ 为光滑粘合映射. 令

$$\begin{aligned}
g\colon A&\to M_f & h\colon M_f&\to B\\
a&\mapsto[a,0]. & [a,t]&\mapsto f(a),(a,t)\in A\times I,\\
& & b&\mapsto b,\qquad b\in B.
\end{aligned}$$

则有以下交换图表：

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \\
M_f \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}.$$

故可证光滑映射 f 可表示成为光滑上纤维化 g 和光滑同伦等价 h 的复合, 即证 g 是光滑上纤维化, 以及 h 是光滑同伦等价.

首先证明 g 是光滑上纤维化.

(1) 证 g 是光滑映射. 把 A 看成 $A\times\{0\}$, 则是 M_f 的子空间, 而 g 是相应的包含映射, 则是光滑的.

(2) 证 g 对所有 diffeological 空间都有光滑同伦扩张性质.

设 Y 是任一 diffeological 空间, $k\colon M_f\to Y$ 是任一光滑映射, $G\colon A\times I\to Y$ 是光滑同伦使 $G_0=k\circ g$. 不妨设 G 是 tame 同伦.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "g"] \arrow[dd, "\cap"'] & & M_f \arrow[dl, "k"] \arrow[dd, "\cap"] \\
& Y & \\
A\times I \arrow[ur, "G"'] \arrow[rr, "g\times 1_I"'] & & M_f\times I. \arrow[ul, dashed, "F"']
\end{tikzcd}$$

定义 $F_B\colon B\times I\to Y$ 为 $F_B(b,s)=k(b)$, 和 $F_A\colon A\times I\times I\to Y$ 为

$$F_A(a,t,s)\begin{cases}k([a,\frac{2t-s}{2-s}]), & 0\le s\le 2t\\ G(a,s-2t), & 2t\le s\le 1.\end{cases}$$

由于 k 是光滑的, G 是 tame 同伦, 且 $G(a,0)=k\circ g(a)=k([a,0])$, 故 F_B 和 F_A 是光滑的. 因为 $F_A(a,1,s)=k([a,1])=k(f(a))=F_B(f(a),s)$, 根据引理 3.3, $F_A\cup F_B$ 诱导光滑同伦 $F\colon M_f\times I\to Y$, 使 $F\circ(p\times 1)=F_A\cup F_B$. 则 $F(x,0)=F_B(x,0)=k(x)$, 当 $x\in B$; $F([x,t],0)=k([x,t])$, 当 $(x,t)\in A\times I$; 故 $F_0=k$. $F\circ(g\times 1_I)(a,s)=F([a,0],s)=G(a,s)$, 即 $F\circ(g\times 1_I)=G$.

因此, 由 (1)(2) 知 g 是光滑上纤维化.

其次证明 h 是光滑同伦等价.

(1) 证 $h\colon M_f\to B$ 是光滑映射.

因为在 M_f 中, $f(a)=[a,1], a\in A$, 所以把 $h\colon M_f\to B$ 看成

$$\begin{aligned} h\colon M_f &\to M_f\\ [a,t] &\mapsto [a,1], (a,t)\in A\times I,\\ b &\mapsto b, \qquad\quad b\in B.\end{aligned}$$

任取 $P\colon U\to M_f\in D_{M_f}$, 设 $P(u)=[a,t], (a,t)\in A\times I$ 或 $P(u)=b, b\in B, u\in U$. 则 $h\circ P\colon U\to M_f$ 为

$$\begin{aligned} &U\xrightarrow{P} M_f\xrightarrow{h} M_f\\ &u\mapsto [a,t]\longmapsto [a,1], (a,t)\in A\times I,\\ &u\longmapsto b\longmapsto b, \qquad\quad b\in B.\end{aligned}$$

设 $i_1\colon A\times I\to A\times I\coprod B$, $i_2\colon B\to A\times I\coprod B$ 是包含映射, 由于 $P\colon U\to M_f\in D_{M_f}$, 则对任意 $u\in U$, 存在 u 的邻域 W 和 $Q_1^{'}\colon W\to A\times I\in D_{A\times I}$, 使得 $h\circ P|W=p\circ i_1\circ Q_1^{'}$, 或者 $Q_2^{'}\colon W\to B\in D_B$, 使得 $P|W=p\circ i_2\circ Q_2^{'}$. 令 $l\colon A\times I\to A\times I, l(a,t)=(a,1), (a,t)\in A\times I$.

可见 l 是光滑的, 则 $Q_1 \triangleq l\circ Q_1^{'} \in D_{A\times I}$. 于是, $h\circ P|W = p\circ i_1\circ Q_1$, 或者 $h\circ P|W = p\circ i_2\circ Q_2^{'}$. 从而 $h\circ P\in D_{M_f}$.

(2) 定义 $j\colon B\to M_f, j(b)=b, b\in B$. 可见 j 是包含映射, 则是光滑的.

(3) 证明 $h\circ j\simeq 1_B, j\circ h\simeq 1_{M_f}$.

首先 $h\circ j = 1_B$, 而 $j\circ h\colon 1_{M_f}\to 1_{M_f}$ 为

$$\begin{aligned}
&M_f \xrightarrow{h} B \xrightarrow{j} M_f\\
&[a,t]\mapsto f(a)\mapsto f(a)=[a,1], (a,t)\in A\times I,\\
&\quad b\longmapsto b\longmapsto b, \qquad\qquad b\in B.
\end{aligned}$$

定义 $H\colon M_f\times I\to M_f$ 为

$$\begin{aligned}
&M_f\times I\to M_f\\
&([a,t],s)\mapsto [a,t+s-st], (a,t)\in A\times I,\\
&\quad (b,s)\mapsto b, \qquad\qquad b\in B.
\end{aligned}$$

下证 H 是光滑的.

任取 $P\colon U\to M_f\times I\in D_{M_f\times I}$, 设 $P(u)=([a,t],s), (a,t)\in A\times I$ 或 $P(u)=b, b\in B, u\in U$. 则 $H\circ P\colon U\to P_f$ 为

$$\begin{aligned}
&U\xrightarrow{P} M_f\times I\xrightarrow{H} M_f\\
&u\longmapsto ([a,t],s)\mapsto [a,t+s-st], (a,t)\in A\times I,\\
&u\longmapsto (b,s)\longmapsto b, \qquad\qquad b\in B.
\end{aligned}$$

设 $\pi_{M_f}\colon M_f\times I\to M_f, \pi_I\colon M_f\times I\to I$ 是自然投射, 由于 $P\colon U\to M_f\times I\in D_{M_f\times I}$, 则 $P_1\triangleq \pi_{M_f}\circ P\colon U\to M_f\in D_{M_f}$, $P_2\triangleq\pi_I\circ P\colon U\to I\in D_I$:

$$\begin{aligned}
&U\xrightarrow{P} M_f\times I\xrightarrow{\pi_{M_f}} M_f\times I \qquad && U\xrightarrow{P} M_f\times I\xrightarrow{\pi_I} I\\
&u\longmapsto ([a,t],s)\longmapsto [a,t], && u\mapsto ([a,t],s)\mapsto s,\\
&u\longmapsto (b,s)\longmapsto b. && u\mapsto (b,s)\longmapsto s.
\end{aligned}$$

于是对任意 $u\in U$, 存在 u 的开邻域 V 和 $Q_1\colon V\to A\times I\in D_{A\times I}$, 使 $P_1|V=p\circ i_1\circ Q_1$, 或者 $Q_2\colon V\to B\in D_B$, 使 $P_2|V=p\circ i_2\circ Q_2$.

设 $\pi_A\colon A\times I\to A$, $\pi_I^{'}\colon A\times I\to I$ 为自然投射, 则 $Q_1^{'}\triangleq\pi_A\circ Q_1\colon V\to A\in D_A, Q_1^{''}\triangleq \pi_I^{'}\circ Q_1\colon V\to I\in D_I$. 令 $Q^{'}\colon V\to I$ 为 $Q^{'}(u)\triangleq Q_1^{''}(u)+P_2(u)-Q_1^{''}(u)P_2(u), u\in V$. 则 $Q^{'}\in D_I$. 再令 $\widetilde{Q}\colon V\to A\times I$ 为 $Q(u)=(Q_1^{'}(u),Q^{'}(u)), u\in V$. 则 $\widetilde{Q}\in D_{A\times I}$. 于是 $H\circ P|V=P\circ i_1\circ\widetilde{Q}$. 或者令 $\widetilde{Q}\triangleq Q_2\colon V\to B\in D_B$, 有 $H\circ P|V=P\circ i_2\circ\widetilde{Q}$. 从而 $H\circ P\in D_{M_f}$, 即 H 是光滑映射. 又 $H_0=1_{P_f}, H_1=h\circ j$, 所以 H 是连接 1_{M_f} 和 $j\circ h$ 的光滑同伦.

因此, 由 (1)(2)(3) 知 h 是光滑同伦等价.

参 考 文 献

[1] Gray B. Homotopy theory[M]. London: Academic Press, INC., 1975.

[2] Spanier E H. Algebraic topology[M]. New York: Springer-Verlag, Inc., 1966.

[3] Maunder C R F. Algebraic topology[M]. Cambridge: Cambridge University Press., 1970.

[4] Souriau J M. Groupes differentiels[M], Berlin: Springer, Lecture Notes in Math., 1980.

[5] Iglesias P, Zemmour. Diffeology[M]. America: American Mathematical Society, 2013.

[6] Haraguchi T, Shimakawa K. A model structure on the category of diffeological spaces[J]. arXiv:1311.5668.

[7] Haraguchi T. Homotopy structures of smooth CW complexes[J]. arXiv:1811.06175.

DECOMPOSITIONS OF SMOOTH MAPS IN DIFFEOLOGICAL SPACE CATEGORY

ZHAN Yan, ZHAO Hao

(*School of Mathematical Sciences, South China Normal University, Guangzhou 510631, China*)

Abstract: In this paper we study the decomposition problem of smooth maps in the diffeological space category. We apply the method of decomposition of maps from the classical homotopy theory to show that any smooth map can be decomposed as the composition of a smooth homotopy equivalence with a smooth fibration or a smooth cofibration. It generalizes the related results in the topological space category.

Keywords: Diffeological space; smooth fibration; smooth cofibration

2010 MR Subject Classification: 18G55; 55P05