Vol. 41 (2021)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

区间值 h- 凸函数的整合分数阶积分 Hermite-Hadamard 型不等式

史芳芳 [1], 叶国菊 [1], 刘 尉 [1], 赵大方 [2]
(1. 河海大学 理学院, 江苏 南京 210098)
(2. 湖北师范大学 数学与统计学院, 湖北 黄石 435002)

摘 要: 本文研究了区间值函数的整合分数阶积分形式 Hermite-Hadamard 型不等式的问题. 利用区间分析及区间 h- 凸函数理论, 给出了区间值函数的整合分数阶积分概念, 讨论了该积分的若干基本性质, 并且得到了一类新的分数阶积分的 Hermite-Hadamard 型不等式, 推广了文献 [1–3] 的结果.

关键词: 整合分数阶积分; 区间值函数; Hermite-Hadamard 型不等式
MR(2010) **主题分类号**: 26D15; 26E25; 28B20 **中图分类号**: O178
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2020)03-0227-10

1 引言

21 世纪以来, 由于分数阶积分理论广泛应用于量子力学、高能物理、水动力学、经济学等众多领域, 彰显了其独特优势和不可替代性, 因此其理论和应用深受国内外众多学者的关注. 2013 年, Sarikaya M Z 等人将 Riemann-Liouville 分数阶积分与 Hermite-Hadamard 不等式结合, 建立一类分数阶积分形式的 Hermite-Hadamard 型不等式 [4]. 随后, 国内外许多数学家对分数阶积分形式的 Hermite-Hadamard 型不等式从不同凸性和不同定义的分数阶的角度进行了推广和改进以及应用了大量的工作 [1,4–6].

另一方面, 不确定性问题出现在许多确定性的数学或者计算模型中, 因此区间分析作为一种新的解决不确定性问题的重要工具被广泛应用于各个领域, 如计算物理学、误差分析、机器人技术等. 特别地, 一些经典的积分不等式被推广到区间值函数的形式中, 例如 Hermite-Hadamard 不等式 [3]、Ostrowski 不等式 [7] 等. 2019 年, Hüseyin 引入了区间值函数 Riemann-Liouville 分数阶积分的定义, 并且证明了一些区间值函数 Riemann-Liouville 分数阶积分形式的 Hermite-Hadamard 不等式, 即

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \supseteq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[\mathcal{J}_{a^+}^{\alpha} f(b)+\mathcal{J}_{b^-}^{\alpha} f(a)\right] \supseteq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

受此启发, 本文引入了区间值函数整合分数阶积分的概念, 讨论了其若干重要性质. 将文献 [1] 中的 Hermite-Hadamard 型不等式推广到区间值函数整合分数阶积分的形式中, 同时也推广了文献 [2, 3] 的相关结果.

*收稿日期: 2020-09-07 **接收日期**: 2021-02-22
基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金资助 (2019B44914), 江苏省自然科学基金青年项目 (BK20180500), 国家重点研发计算资助 (2018YFC1508100).

作者简介: 史芳芳 (1995–), 女, 安徽铜陵, 硕士, 主要研究方向: 区间分析理论.

2 预备知识

设 $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个有界闭区间, 这里 $\underline{a},\overline{a}\in\mathbb{R}$ 且 $\underline{a}\le\overline{a}$. 当 $\underline{a}=\overline{a}$ 时, 区间 $[a]$ 称为退化的; 当 $\underline{a}>0$ 时, 区间 $[a]$ 称为正的; 我们用 $\mathbb{R}^{+}$ 表示 $\mathbb{R}$ 上所有正数构成的集合; 用 $\mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ 表示 $\mathbb{R}$ 上所有非空闭区间构成的集合; 用 $\mathbb{R}_{\mathcal{I}}^{+}$ 表示 $\mathbb{R}$ 上所有正闭区间构成的集合. 任取 $\mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ 中的元素 $[\underline{a},\overline{a}]$, $[\underline{b},\overline{b}]$, 对任意 $\lambda\in\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ 空间中的区间运算规定如下:

$$[\underline{a},\overline{a}]+[\underline{b},\overline{b}]=[\underline{a}+\underline{b},\overline{a}+\overline{b}];$$

$$[\underline{a},\overline{a}]-[\underline{b},\overline{b}]=[\underline{a}-\overline{b},\overline{b}-\underline{a}];$$

$$[\underline{a},\overline{a}]\cdot[\underline{b},\overline{b}]=[\min\{\underline{ab},\underline{a}\overline{b},\overline{a}\underline{b},\overline{ab}\},\max\{\underline{ab},\underline{a}\overline{b},\overline{a}\underline{b},\overline{ab}\}];$$

$$[\underline{a},\overline{a}]/[\underline{b},\overline{b}]=[\min\{\underline{a}/\underline{b},\underline{a}/\overline{b},\overline{a}/\underline{b},\overline{a}/\overline{b}\},\max\{\underline{a}/\underline{b},\underline{a}/\overline{b},\overline{a}/\underline{b},\overline{a}/\overline{b}\}];$$

$$\lambda[\underline{a},\overline{a}]=\begin{cases}[\lambda\underline{a},\lambda\overline{a}], & \lambda\ge 0,\\ [\lambda\overline{a},\lambda\underline{a}], & \lambda<0.\end{cases}$$

同时, $[\underline{a},\overline{a}]$, $[\underline{b},\overline{b}]$ 之间的包含关系 “$\subseteq$” 定义为:

$$[\underline{a},\overline{a}]\subseteq[\underline{b},\overline{b}]\Leftrightarrow \underline{b}\le\underline{a},\ \overline{a}\le\overline{b}.$$

在文献 [8] 中, Dinghas 给出了区间值函数 Riemann 可积的定义. 我们用 $\mathcal{IR}_{([a,b])}$ 表示所有 Riemann 可积的区间值函数构成的集合, 用 $\mathcal{R}_{([a,b])}$ 表示所有 Riemann 可积的实函数构成的集合.

引理 1 [8] 若 $f:[a,b]\to\mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ 且 $f=\left[\underline{f},\overline{f}\right]$, 则 $f\in\mathcal{IR}_{([a,b])}$ 当且仅当 $\underline{f}(t),\overline{f}(t)\in\mathcal{R}_{([a,b])}$. 进一步, 有

$$(\mathcal{IR})\int_a^b f(t)dt=\left[(\mathcal{R})\int_a^b \underline{f}(t)dt,(\mathcal{R})\int_a^b \overline{f}(t)dt\right].$$

定义 1 [3] 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}_{\mathcal{I}}^{+}$ 且 $f(t)=\left[\underline{f}(t),\overline{f}(t)\right]$, $h:[0,1]\to\mathbb{R}^{+}$. 若对任意的 $x,y\in[a,b],t\in[0,1]$, 有

$$f\left(tx+(1-t)y\right)\supseteq h(t)f(x)+h(1-t)f(y), \tag{2.1}$$

则称 $f(t)$ 是 $[a,b]$ 上的 h- 凸函数. 我们用 $SX(h,[a,b],\mathbb{R}_{\mathcal{I}}^{+})$ 表示 $[a,b]$ 上所有区间 h- 凸函数的全体. 若 (2.1) 式的包含符号反向, 则称 $f(t)$ 是 $[a,b]$ 上的 h- 凹函数. 类似地, 我们用 $SV(h,[a,b],\mathbb{R}_{\mathcal{I}}^{+})$ 表示 $[a,b]$ 上所有区间 h- 凹函数的全体.

定义 2 [9] 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ 且 $f(t)=\left[\underline{f}(t),\overline{f}(t)\right]$. 若 $f\in\mathcal{IR}_{([a,b])}$, 那么区间值 Riemann-Liouville 分数阶积分定义为:

$$\mathcal{J}_{a^+}^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau,$$
$$\mathcal{J}_{b^-}^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b(\tau-t)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau.$$

其中 Γ 是 Gamma 函数.

在文献 [1] 中, Ahmad 推广了 Riemann-Liouville 积分, 引入了整合分数阶积分. 为进一步推广, 我们定义了区间整合分数阶积分.

定义 3 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}_{\mathcal{I}}^{+}$ 且 $f(t)=\left[\underline{f}(t),\overline{f}(t)\right]$. 若 $f\in\mathcal{IR}_{([a,b])}$, 那么整合分数阶积分在 a 和 b 的定义为:

$$(\mathcal{I}_{\alpha}^{a}f)(t)=\frac{1}{n!}\int_{a}^{t}(t-x)^{n}(x-a)^{\alpha-n-1}f(x)dx,$$
$$({}^{b}\mathcal{I}_{\alpha}f)(t)=\frac{1}{n!}\int_{t}^{b}(x-t)^{n}(b-x)^{\alpha-n-1}f(x)dx.$$

注 1 当 $\alpha=n+1$ 时, 定义 3 即为定义 2.

推论 1 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}_{\mathcal{I}}^{+}$ 且 $f=[\underline{f},\overline{f}]$. 若 $f\in\mathcal{IR}_{([a,b])}$, 那么

$$(\mathcal{I}_{\alpha}^{a}f)(t)=\left[(\mathcal{I}_{\alpha}^{a}\underline{f})(t),(\mathcal{I}_{\alpha}^{a}\overline{f})(t)\right]$$

$$({}^{b}\mathcal{I}_{\alpha}f)(t)=\left[({}^{b}\mathcal{I}_{\alpha}\underline{f})(t),({}^{b}\mathcal{I}_{\alpha}\overline{f})(t)\right].$$

证 由引理 1 和定义 3 即可证得.

引理 2 设 $\xi:[a,b]\to\mathbb{R}_{\mathcal{I}}^{+}$ 且 $\xi=[\underline{\xi},\overline{\xi}]$. 若 $\xi\in\mathcal{IR}_{([a,b])}$ 且关于 $\frac{a+b}{2}$ 对称, 则

$$(\mathcal{I}_{\alpha}^{a}\xi)(b)=({}^{b}\mathcal{I}_{\alpha}\xi)(a)=\frac{1}{2}\left[(\mathcal{I}_{\alpha}^{a}\xi)(b)+({}^{b}\mathcal{I}_{\alpha}\xi)(a)\right].$$

证 由于 ξ 关于 $\frac{a+b}{2}$ 对称, 即对任意的 $x\in[a,b]$, $\xi(a+b-x)=\xi(x)$.
因此, 令 $t=a+b-x$, 有

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}_{\alpha}^{a}\xi(b)=\frac{1}{n!}\int_{a}^{b}(b-x)^{n}(x-a)^{\alpha-n-1}\xi(x)dx\\
=&\frac{1}{n!}\int_{a}^{b}(b-x)^{n}(x-a)^{\alpha-n-1}\left[\underline{\xi}(x),\overline{\xi}(x)\right]dx\\
=&\left[\frac{1}{n!}\int_{a}^{b}(b-x)^{n}(x-a)^{\alpha-n-1}\underline{\xi}(x)dx,\frac{1}{n!}\int_{a}^{b}(b-x)^{n}(x-a)^{\alpha-n-1}\overline{\xi}(x)dx\right]\\
=&\left[\frac{1}{n!}\int_{a}^{b}(t-a)^{n}(b-t)^{\alpha-n-1}\underline{\xi}(a+b-t)dt,\frac{1}{n!}\int_{a}^{b}(t-a)^{n}(b-t)^{\alpha-n-1}\overline{\xi}(a+b-t)dt\right]\\
=&\left[\frac{1}{n!}\int_{a}^{b}(t-a)^{n}(b-t)^{\alpha-n-1}\underline{\xi}(t)dt,\frac{1}{n!}\int_{a}^{b}(t-a)^{n}(b-t)^{\alpha-n-1}\overline{\xi}(t)dt\right]\\
=&\left[{}^{b}\mathcal{I}_{\alpha}\underline{\xi}(a),{}^{b}\mathcal{I}_{\alpha}\overline{\xi}(a)\right]\\
=&{}^{b}\mathcal{I}_{\alpha}\xi(a).
\end{aligned}$$

证毕.

3 主要结果

定理 1 设 $f \in SX(h,[a,b],\mathbb{R}^+_{\mathcal{I}})$ 且 $f=[\underline{f},\overline{f}]$, $h:[0,1]\to\mathbb{R}^+$. 若 $f\in\mathcal{IR}_{([a,b])}$, 那么

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)h(\frac{1}{2})}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\\ \supseteq&\frac{1}{(b-a)^\alpha}\left[\mathcal{I}^a_\alpha f(b)+{}^b\mathcal{I}_\alpha f(a)\right]\\ \supseteq&\frac{f(a)+f(b)}{n!}\int_0^1\nu^n(1-\nu)^{\alpha-n-1}\left[h(\nu)+h(1-\nu)\right]d\nu.\end{aligned}\tag{3.1}$$

其中 $\alpha\in(n,n+1]$.

证 由于 $f \in SX(h,[a,b],\mathbb{R}^+_{\mathcal{I}})$, 那么对任意的 $t\in[0,1]$, 有

$$\begin{aligned}f\left(\frac{a+b}{2}\right)&=f\left(\frac{ta+(1-t)b+tb+(1-t)b}{2}\right)\\&\supseteq h\left(\frac{1}{2}\right)\left[f\left(ta+(1-t)b\right)+f\left(tb+(1-t)a\right)\right].\end{aligned}\tag{3.2}$$

在 (3.2) 式两边同乘以 $\frac{1}{n!}\nu^n(1-\nu)^{\alpha-n-1}$ 并在 $[0,1]$ 上关于 t 取积分,

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)h(\frac{1}{2})}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\\ =&\frac{1}{h(\frac{1}{2})}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{1}{n!}\int_0^1\nu^n(1-\nu)^{\alpha-n-1}d\nu\\ \supseteq&\left[\frac{1}{n!}\int_0^1\nu^n(1-\nu)^{\alpha-n-1}f(\nu a+(1-\nu)b)d\nu+\frac{1}{n!}\int_0^1\nu^n(1-\nu)^{\alpha-n-1}f((1-\nu)a+\nu b)d\nu\right]\\ =&\left[\frac{1}{n!}\int_0^1\nu^n(1-\nu)^{\alpha-n-1}(\underline{f}(\nu a+(1-\nu)b)+\underline{f}((1-\nu)a+\nu b))d\nu,\right.\\ &\left.\frac{1}{n!}\int_0^1\nu^n(1-\nu)^{\alpha-n-1}(\overline{f}(\nu a+(1-\nu)b)+\overline{f}((1-\nu)a+\nu b))d\nu\right]\\ =&\left[\frac{1}{n!}\int_b^a(\tau(\mu))^n(1-\tau(\mu))^{\alpha-n-1}\underline{f}(\mu)\frac{d\mu}{a-b}+\frac{1}{n!}\int_a^b(1-\tau(\mu))^n(\tau(\mu))^{\alpha-n-1}\underline{f}(\mu)\frac{d\mu}{b-a},\right.\\ &\left.\frac{1}{n!}\int_b^a(\tau(\mu))^n(1-\tau(\mu))^{\alpha-n-1}\overline{f}(\mu)\frac{d\mu}{a-b}+\frac{1}{n!}\int_a^b(1-\tau(\mu))^n(\tau(\mu))^{\alpha-n-1}\overline{f}(\mu)\frac{d\mu}{b-a}\right]\\ =&\frac{1}{(b-a)^\alpha}\left[\mathcal{I}^a_\alpha\underline{f}(b)+{}^b\mathcal{I}_\alpha\underline{f}(a),\mathcal{I}^a_\alpha\overline{f}(b)+{}^b\mathcal{I}_\alpha\overline{f}(a)\right].\\ =&\frac{1}{(b-a)^\alpha}\left[\mathcal{I}^a_\alpha f(b),{}^b\mathcal{I}_\alpha f(a)\right].\end{aligned}$$

其中 $\tau(\mu)=\frac{b-\mu}{b-a}$.

因此

$$\frac{\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)h(\frac{1}{2})}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\supseteq\frac{n!}{(b-a)^\alpha}\left[\mathcal{I}^a_\alpha f(b)+{}^b\mathcal{I}_\alpha f(a)\right].$$

即证得 (3.1) 式中的第一个不等式.

类似地, 我们有

$$f\left(ta+(1-t)b\right)+f\left(tb+(1-t)a\right)\supseteq\left[h(t)+h(1-t)\right]f(a)+f(b). \tag{3.3}$$

在 (3.3) 式两边同时乘以 $\frac{1}{n!}\nu^n(1-\nu)^{\alpha-n-1}$ 并在 $[0,1]$ 上关于 t 取积分,

$$\frac{1}{(b-a)^\alpha}\left[\mathcal{I}_\alpha^a f(b)+{}^b\mathcal{I}_\alpha f(a)\right]\supseteq\frac{f(a)+f(b)}{n!}\int_0^1\nu^n(1-\nu)^{\alpha-n-1}\left[h(\nu)+h(1-\nu)\right]d\nu.$$

证毕.

推论 2 设 $f\in SV(h,[a,b],\mathbb{R}_\mathcal{I}^+)$ 且 $f=[\underline{f},\overline{f}]$, $h:[0,1]\to\mathbb{R}^+$. 若 $f\in\mathcal{IR}_{([a,b])}$, 那么

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)h(\frac{1}{2})}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\\ \subseteq&\frac{1}{(b-a)^\alpha}\left[\mathcal{I}_\alpha^a f(b)+{}^b\mathcal{I}_\alpha f(a)\right]\\ \subseteq&\frac{f(a)+f(b)}{n!}\int_0^1\nu^n(1-\nu)^{\alpha-n-1}\left[h(\nu)+h(1-\nu)\right]d\nu.\end{aligned}$$

注 2 若定理 1 中 $h(t)=t$, 则

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\supseteq\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha\Gamma(\alpha-n)}\left[\mathcal{I}_\alpha^a f(b)+{}^b\mathcal{I}_\alpha f(a)\right]\supseteq\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

注 3 若定理 1 中 $\alpha=n+1, h(t)=t$, 则得到文献 [2] 中的定理 2.

注 4 若定理 1 中 $n=1$, $\alpha=2$, 则得到文献 [3] 中的定理 4.1.

注 5 若定理 1 中 $\underline{f}=\overline{f}$ 且 $h(t)=t$, 则得到文献 [1] 中的定理 2.1.

定理 2 设 $f\in SX(h,[a,b],\mathbb{R}_\mathcal{I}^+)$ 且 $f=[\underline{f},\overline{f}]$, $\xi:[a,b]\to\mathbb{R}_\mathcal{I}^+$ 关于 $\frac{a+b}{2}$ 对称, $h:[0,1]\to\mathbb{R}^+$. 若 $f\xi\in\mathcal{IR}_{([a,b])}$, 那么

$$\begin{aligned}&\frac{n!}{2h\left(\frac{1}{2}\right)(b-a)^\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[\mathcal{I}_\alpha^a\xi(b)+{}^b\mathcal{I}_\alpha\xi(a)\right]\\ \supseteq&\frac{n!}{(b-a)^\alpha}\left[\mathcal{I}_\alpha^a(f\xi)(b)+{}^b\mathcal{I}_\alpha(f\xi)(a)\right]\\ \supseteq&\left[f(a)+f(b)\right]\int_0^1\left[h(t)+h(1-t)\right]t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\xi(tb+(1-t)a)dt,\end{aligned} \tag{3.4}$$

其中 $\alpha\in(n,n+1]$.

证 由于 $f\in SX(h,[a,b],\mathbb{R}_\mathcal{I}^+)$, 那么在 (3.2) 式两边同乘以 $\frac{1}{h\left(\frac{1}{2}\right)}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\xi(tb+(1-t)a)$ 且在 $[0,1]$ 上关于 t 取积分,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\xi(tb+(1-t)a)dt\\ \supseteq&\int_0^1t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\left[f\left(ta+(1-t)b\right)+f\left(tb+(1-t)a\right)\right]\xi(tb+(1-t)a)dt\\ =&\int_0^1t^n(1-t)^{\alpha-n-1}f\left(ta+(1-t)b\right)\xi(tb+(1-t)a)dt\\ &+\int_0^1t^n(1-t)^{\alpha-n-1}f\left(tb+(1-t)a\right)\xi(tb+(1-t)a)dt.\end{aligned}$$

令 $x=tb+(1-t)a$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h\left(\frac{1}{2}\right)(b-a)^{\alpha}} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b (x-a)^n (b-x)^{\alpha-n-1} \xi(x) dx \\
\supseteq & \frac{1}{(b-a)^{\alpha}} \left\{ \int_a^b (x-a)^n (b-x)^{\alpha-n-1} f(a+b-x) \xi(x) dx + \int_a^b (x-a)^n (b-x)^{\alpha-n-1} f(x) \xi(x) dx \right\} \\
= & \frac{1}{(b-a)^{\alpha}} \left\{ \int_a^b (x-a)^n (b-x)^{\alpha-n-1} f(x) \xi(a+b-x) dx + \int_a^b (x-a)^n (b-x)^{\alpha-n-1} f(x) \xi(x) dx \right\} \\
= & \frac{1}{(b-a)^{\alpha}} \left\{ \int_a^b (x-a)^n (b-x)^{\alpha-n-1} f(x) \xi(x) dx + \int_a^b (x-a)^n (b-x)^{\alpha-n-1} f(x) \xi(x) dx \right\}.
\end{aligned}$$

由引理 2, 有

$$\frac{n!}{2h\left(\frac{1}{2}\right)(b-a)^{\alpha}} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \left[\mathcal{I}_{\alpha}^{a} \xi(b) + {}^{b}\mathcal{I}_{\alpha} \xi(a)\right] \supseteq \frac{n!}{(b-a)^{\alpha}} \left[\mathcal{I}_{\alpha}^{a}(f\xi)(b) + {}^{b}\mathcal{I}_{\alpha}(f\xi)(a)\right],$$

即证得 (3.4) 式中的第一个不等式. 类似地,

$$f(ta+(1-t)b) + f(tb+(1-t)a) \supseteq [h(t)+h(1-t)][f(a)+f(b)]. \tag{3.5}$$

在 (3.5) 式两边同乘以 $t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\xi(tb+(1-t)a)$ 并在 $[0,1]$ 上关于 t 取积分, 得

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1} f(ta+(1-t)b) \xi(tb+(1-t)a) dt \\
&\quad + \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1} f(tb+(1-t)a) \xi(tb+(1-t)a) dt \\
\supseteq & [f(a)+f(b)] \int_0^1 [h(t)+h(1-t)] t^n (1-t)^{\alpha-n-1} \xi(tb+(1-t)a) dt.
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
&\frac{n!}{(b-a)^{\alpha}} \left[\mathcal{I}_{\alpha}^{a}(f\xi)(b) + {}^{b}\mathcal{I}_{\alpha}(f\xi)(a)\right] \\
\supseteq & [f(a)+f(b)] \int_0^1 [h(t)+h(1-t)] t^n (1-t)^{\alpha-n-1} \xi(tb+(1-t)a) dt.
\end{aligned}$$

证毕.

推论 3 设 $f \in SV(h,[a,b],\mathbb{R}_{\mathcal{I}}^{+})$ 且 $f=[\underline{f},\overline{f}]$, $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}_{\mathcal{I}}^{+}$ 关于 $\frac{a+b}{2}$ 对称, $h:[0,1]\to\mathbb{R}^{+}$. 若 $f\varphi\in\mathcal{IR}_{([a,b])}$, 那么

$$\begin{aligned}
&\frac{n!}{2h\left(\frac{1}{2}\right)(b-a)^{\alpha}} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \left[\mathcal{I}_{\alpha}^{a} g(b) + {}^{b}\mathcal{I}_{\alpha} g(a)\right] \\
\subseteq & \frac{n!}{(b-a)^{\alpha}} \left[\mathcal{I}_{\alpha}^{a}(fg)(b) + {}^{b}\mathcal{I}_{\alpha}(fg)(a)\right] \\
\subseteq & [f(a)+f(b)] \int_0^1 [h(t)+h(1-t)] t^n (1-t)^{\alpha-n-1} g(tb+(1-t)a) dt.
\end{aligned}$$

注 6 若定理 2 中 $h(t)=t$, 则

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[\mathcal{I}_{\alpha}^{a}g(b)+{}^{b}\mathcal{I}_{\alpha}g(a)\right]\supseteq\left[\mathcal{I}_{\alpha}^{a}(fg)(b)+{}^{b}\mathcal{I}_{\alpha}(fg)(a)\right]$$
$$\supseteq\frac{[f(a)+f(b)]}{2}\left[\mathcal{I}_{a}^{\alpha}\varphi(b)+\mathcal{I}_{b}^{\alpha}\varphi(a)\right].$$

注 7 若定理 2 中 $\underline{f}=\overline{f}$ 且 $h(t)=t$, 则得到文献 [5] 中的定理 2.1.

注 8 若定理 1 中 $\alpha=n+1, h(t)=t$, 则得到文献 [10] 中的定理 3.3.

定理 3 设 $f\in SX(h_1,[a,b],\mathbb{R}_{\mathcal{I}}^{+})$ 且 $f=[\underline{f},\overline{f}]$, $g\in SX(h_2,[a,b],\mathbb{R}_{\mathcal{I}}^{+})$ 且 $g=[\underline{g},\overline{g}]$, $h:[0,1]\to\mathbb{R}^{+}$. 若 $fg\in\mathcal{IR}_{([a,b])}$, 则

$$\begin{aligned}&\frac{n!}{(b-a)^{\alpha}}\left[\mathcal{J}_{\alpha}^{a}f(b)g(b)+{}^{b}\mathcal{J}_{\alpha}f(a)g(a)\right]\\ \supseteq&\mathcal{M}(a,b)\int_{0}^{1}\nu^{n}(1-\nu)^{\alpha-n-1}\big[h_1(\nu)h_2(\nu)+h_1(1-\nu)h_2(1-\nu)\big]d\nu\\ &+\mathcal{N}(a,b)\int_{0}^{1}\nu^{n}(1-\nu)^{\alpha-n-1}\big[h_1(\nu)h_2(1-\nu)+h_1(1-\nu)h_2(\nu)\big]d\nu,\end{aligned}\tag{3.6}$$

且

$$\begin{aligned}&\frac{n!\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})}f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)g\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\\ \supseteq&\frac{n!}{(b-a)^{\alpha}}\left[\mathcal{J}_{\alpha}^{a}f(b)g(b)+{}^{b}\mathcal{J}_{\alpha}f(a)g(a)\right]\\ &+\mathcal{M}(a,b)\int_{0}^{1}\nu^{n}(1-\nu)^{\alpha-n-1}\left[h_1(\nu)h_2(1-\nu)+h_1(1-\nu)h_2(\nu)\right]d\nu\\ &+\mathcal{N}(a,b)\int_{0}^{1}\nu^{n}(1-\nu)^{\alpha-n-1}\left[h_1(\nu)h_2(\nu)+h_1(1-\nu)h_2(1-\nu)\right]d\nu.\end{aligned}\tag{3.7}$$

其中,

$$\mathcal{M}(a,b)=f(a)g(a)+f(b)g(b),\ \mathcal{N}(a,b)=f(a)g(b)+f(b)g(a).$$

证 由于 $f\in SX(h_1,[a,b],\mathbb{R}_{\mathcal{I}}^{+})$, $g\in SX(h_2,[a,b],\mathbb{R}_{\mathcal{I}}^{+})$, 则

$$\begin{aligned}f\left(ta+(1-t)b\right)g\left(ta+(1-t)b\right)\supseteq&h_1(t)h_2(t)f(a)g(a)+h_1(1-t)h_2(1-t)f(b)g(b)\\ &+h_1(t)h_2(1-t)f(a)g(b)+h_1(1-t)h_2(t)f(b)g(a).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f\left((1-t)a+tb\right)g\left((1-t)a+tb\right)\supseteq&h_1(1-t)h_2(1-t)f(a)g(a)+h_1(t)h_2(t)f(b)g(b)\\ &+h_1(1-t)h_2(t)f(a)g(b)+h_1(t)h_2(1-t)f(b)g(a).\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}&f\left(ta+(1-t)b\right)g\left(ta+(1-t)b\right)+f\left((1-t)a+tb\right)g\left((1-t)a+tb\right)\\ \supseteq&\left[h_1(t)h_2(t)+h_1(1-t)h_2(1-t)\right]\mathcal{M}(a,b)\\ &+\left[h_1(t)h_2(1-t)+h_1(1-t)h_2(t)\right]\mathcal{N}(a,b).\end{aligned}\tag{3.8}$$

在 (3.8) 式两边同时乘以 $\frac{1}{n!}\nu^n(1-\nu)^{\alpha-n-1}$ 并且在 $[0,1]$ 上关于 t 取积分,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n!}\int_0^1 \nu^n(1-\nu)^{\alpha-n-1}f\big(\nu a+(1-\nu)b\big)g\big(\nu a+(1-\nu)b\big)d\nu\\&\quad+\frac{1}{n!}\int_0^1 \nu^n(1-\nu)^{\alpha-n-1}f\big((1-\nu)a+\nu b\big)g\big((1-\nu)a+\nu b\big)d\nu\\&\supseteq\frac{\mathcal{M}(a,b)}{n!}\int_0^1 \nu^n(1-\nu)^{\alpha-n-1}\big[h_1(\nu)h_2(\nu)+h_1(1-\nu)h_2(1-\nu)\big]d\nu\\&\quad+\frac{\mathcal{N}(a,b)}{n!}\int_0^1 \nu^n(1-\nu)^{\alpha-n-1}\big[h_1(1-\nu)h_2(\nu)+h_1(\nu)h_2(1-\nu)\big]d\nu.\end{aligned}\tag{3.9}$$

由定义 3, 我们有

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 \nu^n(1-\nu)^{\alpha-n-1}f\big(\nu a+(1-\nu)b\big)g\big(\nu a+(1-\nu)b\big)d\nu=\frac{1}{(b-a)^\alpha}\mathcal{J}_\alpha^a f(b)g(b),\tag{3.10}$$

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 \nu^n(1-\nu)^{\alpha-n-1}f\big((1-\nu)a+\nu b\big)g\big((1-\nu)a+\nu b\big)d\nu=\frac{1}{(b-a)^\alpha}{}^b\mathcal{J}_\alpha f(a)g(a).\tag{3.11}$$

将不等式 (3.10)–(3.11) 式代入到 (3.9) 式, 即证得 (3.6) 式.

类似地,

$$\begin{aligned}&f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)g\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\\&=f\Big(\frac{\nu a+(1-\nu)b}{2}+\frac{(1-\nu)a+\nu b}{2}\Big)g\Big(\frac{\nu a+(1-\nu)b}{2}+\frac{(1-\nu)a+\nu b}{2}\Big)\\&\supseteq h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})\left[f\big(\nu a+(1-\nu)b\big)g\big(\nu a+(1-\nu)b\big)+f\big((1-\nu)a+\nu b\big)g\big((1-\nu)a+\nu b\big)\right]\\&\quad+h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})\left\{\left[h_1(\nu)h_2(1-\nu)+h_1(1-\nu)h_2(\nu)\right]\mathcal{M}(a,b)\right.\\&\quad\left.+\left[h_1(\nu)h_2(\nu)+h_1(1-\nu)h_2(1-\nu)\right]\mathcal{N}(a,b)\right\}.\end{aligned}\tag{3.12}$$

在 (3.12) 式两边同时乘以 $\frac{1}{n!}\nu^n(1-\nu)^{\alpha-n-1}$ 并且在 $[0,1]$ 上关于 t 取积分,

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)}f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)g\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\\&\supseteq h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})\frac{1}{n!}\int_0^1 \nu^n(1-\nu)^{\alpha-n-1}\left[f\big(\nu a+(1-\nu)b\big)g\big(\nu a+(1-\nu)b\big)\right.\\&\quad\left.+f\big((1-\nu)a+\nu b\big)g\big((1-\nu)a+\nu b\big)\right]d\nu\\&\quad+h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})\frac{1}{n!}\int_0^1 \nu^n(1-\nu)^{\alpha-n-1}\left\{\left[h_1(\nu)h_2(1-\nu)+h_1(1-\nu)h_2(\nu)\right]\mathcal{M}(a,b)\right.\\&\quad\left.+\left[h_1(\nu)h_2(\nu)+h_1(1-\nu)h_2(1-\nu)\right]\mathcal{N}(a,b)\right\}d\nu\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})}{(b-a)^\alpha}\left[\mathcal{J}_\alpha^a f(b)g(b)+{}^b\mathcal{J}_\alpha f(a)g(a)\right]\\
&\quad+\frac{\mathcal{M}(a,b)h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})}{n!}\int_0^1 \nu^n(1-\nu)^{\alpha-n-1}\left[h_1(\nu)h_2(1-\nu)+h_1(1-\nu)h_2(\nu)\right]d\nu\\
&\quad+\frac{\mathcal{N}(a,b)h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})}{n!}\int_0^1 \nu^n(1-\nu)^{\alpha-n-1}\left[h_1(\nu)h_2(\nu)+h_1(1-\nu)h_2(1-\nu)\right]d\nu.
\end{aligned}
$$

上式两边同时乘以 $\frac{n!}{h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})}$, 即证得 (3.7) 式.
证毕.

推论 4 设 $f\in SV(h_1,[a,b],\mathbb{R}_\mathcal{I}^+)$ 且 $f=[\underline{f},\overline{f}]$, $g\in SV(h_2,[a,b],\mathbb{R}_\mathcal{I}^+)$ 且 $g=[\underline{g},\overline{g}]$, $h:[0,1]\to\mathbb{R}^+$. 若 $fg\in\mathcal{IR}_{([a,b])}$. 那么

$$
\begin{aligned}
&\frac{n!}{(b-a)^\alpha}\left[\mathcal{J}_\alpha^a f(b)g(b)+{}^b\mathcal{J}_\alpha f(a)g(a)\right]\\
\subseteq&\mathcal{M}(a,b)\int_0^1 \nu^n(1-\nu)^{\alpha-n-1}\left[h_1(\nu)h_2(\nu)+h_1(1-\nu)h_2(1-\nu)\right]d\nu\\
&+\mathcal{N}(a,b)\int_0^1 \nu^n(1-\nu)^{\alpha-n-1}\left[h_1(\nu)h_2(1-\nu)+h_1(1-\nu)h_2(\nu)\right]d\nu,
\end{aligned}
$$

且

$$
\begin{aligned}
&\frac{n!\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})}f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)g\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\\
\subseteq&\frac{n!}{(b-a)^\alpha}\left[\mathcal{J}_\alpha^a f(b)g(b)+{}^b\mathcal{J}_\alpha f(a)g(a)\right]\\
&+\mathcal{M}(a,b)\int_0^1 \nu^n(1-\nu)^{\alpha-n-1}\left[h_1(\nu)h_2(1-\nu)+h_1(1-\nu)h_2(\nu)\right]d\nu\\
&+\mathcal{N}(a,b)\int_0^1 \nu^n(1-\nu)^{\alpha-n-1}\left[h_1(\nu)h_2(\nu)+h_1(1-\nu)h_2(1-\nu)\right]d\nu.
\end{aligned}
$$

注 9 若定理 1 中 $\alpha=n+1$, 则得到文献 [2] 中的定理 3 和定理 4.

注 10 若定理 1 中 $n=1,\alpha=2$, 则得到文献 [3] 中的定理 4.5 和定理 4.6.

注 11 若定理 3 中 $h(t)=t$, 则

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(b-a)^\alpha}\left[\mathcal{J}_\alpha^a f(b)g(b)+{}^b\mathcal{J}_\alpha f(a)g(a)\right]\\
\supseteq&\frac{\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+3)}\left[\mathcal{M}(a,b)\left[(n+2)(n+1)+(\alpha-n+1)(\alpha-n)\right]\right.\\
&\left.+2\mathcal{N}(a,b)(n+1)(\alpha-n)\right]
\end{aligned}
$$

且

$$
\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})}f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)g\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\\
\supseteq&\frac{1}{(b-a)^\alpha}\left[\mathcal{J}_\alpha^a f(b)g(b)+{}^b\mathcal{J}_\alpha f(a)g(a)\right]+\frac{\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+3)}\left[\mathcal{M}(a,b)\left[(n+2)(n+1)\right.\right.\\
&\left.\left.+(\alpha-n+1)(\alpha-n)\right]+2\mathcal{N}(a,b)(n+1)(\alpha-n)\right]
\end{aligned}
$$

参 考 文 献

[1] Set E, Akdemir A O, Mumcu I. The Hermite-Hadamar's inequality and its extensions for conformable fractional integrals of any order $\alpha > 0$[J]. Creat Math. Inf., 2016, 27: 197–206.

[2] Shi F F, Ye G J, Zhao D F, Liu W. Some Fractional Hermite-Hadamard Type Inequalities for Interval-Valued Functions[J]. Mathematics, 2020, 8(4): 534–543.

[3] Zhao D F, An T Q, Ye G J, Liu W. New Jensen and Hermite-Hadamard type inequalities for h-convex interval-valued functions[J]. J. Inequal Appl., 302(2018): 1–14.

[4] Sarikaya M Z, Set E, Yaldiz H, Başak N. Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities[J]. Math. Comput. Model, 2013, 57(9–10): 2403–2407.

[5] Set E, Mumcu I. Hermite-Hadamar-Fejér type inequalities for conformable fractional integrals[J]. Miskolc Mathematics Notes. 2019, 20(1), 475–488.

[6] Katugampola U N. A new approach to generalized fractional derivatives[J]. Bull. Math. Anal. Appl., 2014, 6(4): 1–15.

[7] Chalco-Cano Y, Flores-Franulic A, Román-Flores H. Ostrowski type inequalities for interval-valued functions using generalized Hukuhara derivative[J]. Comput. Appl. Math., 2012, 31(3): 457–472.

[8] Dinghas A. Zum Minkowskischen Integralbegriff abgeschlossener Mengen[J]. Math. Z., 1956, 66(1): 173–188.

[9] Büdak H, Tunc T, Sarikaya M Z. Fractional Hermite–Hadamard type inequalities for interval-valued functions[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 2020, 148(2): 705–718.

[10] Liu X L, Ye G J, Zhao D F, Liu W. Fractional Hermite–Hadamard type inequalities for interval-valued functions[J]. J. Inequal. Appl., 2019, 2019(1): 1–11.

CONFORMABLE FRACTIONAL INTEGRALS HERMITE-HADAMARD TYPE INEQUALITIES FOR INTERVAL-VALUED FUNCTIONS

SHI Fang-fang [1], YE Guo-ju [1], LIU Wei [1], ZHAO Da-fang [2]

(*1 College of Science, Hehai University, Nanjing 210098, China*)

(*2 School of Mathematics and Statistics, Hubei Normal University, Huangshi 435002, China*)

Abstract: In this paper, we study the problem of comformable fractional integrals for interval-valued functions in the form of Hermite-Hadamard type inequalities. Using interval analysis and the theory of interval h-convex functions, we give the concept of comformable fractional integrals for interval-valued functions, discuss some basic properties of these integrals, and obtain a new class of Hermite-Hadamard type inequalities for fractional integrals, which extend the results in [1-3].

Keywords: conformable fractional integral; interval-valued function; Hermite-Hadamard type inequalities

2010 MR Subject Classification: 26D15; 26E25; 28B20