Vol. 41 (2021)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一维直线上的奇异型 Trudinger-Moser 不等式

朱茂春, 刘 杰
(江苏大学数学科学学院, 江苏 镇江 212013)

摘 要: 本文研究了一维直线上的奇异型 Trudinger-Moser 不等式. 利用分数次 Sobolev 空间上函数的 Green 表示公式, 得到了一类奇异型 Trudinger-Moser 不等式. 进一步利用合适的测试函数序列验证了不等式中常数的最佳性. 这一结果将高维空间上的奇异型 Trudinger-Moser 不等式推广到了一维情形.

关键词: Trudinger-Moser 不等式; 分数次 Sobolev 空间; 重排; 最佳常数
MR(2010) **主题分类号**: 46E35; 46E30; 26A33 **中图分类号**: O178
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2021)03-0219-08

1 引言

设 $\Omega \subset R^n$ 是具有 C^∞ 的有界区域, $W_0^{1,p}(\Omega)$ 是定义在 Ω 上的 Sobolev 空间, 其范数为 $\|u\|_{W^{1,p}} = \left(\int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p)\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$. 由经典的 Sobolev 嵌入定理可知 $(n \geq 2)$:

(1) 当 $p < n$ 时: $W_0^{1,n}(\Omega)$ 嵌入到 $L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)$;

(2) 当 $p > n$ 时: $W_0^{1,n}(\Omega)$ 嵌入到 $C^\alpha(\Omega)$, 其中 $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$;

(3) 当 $p = n$ 时: $W_0^{1,n}(\Omega)$ 嵌入到任意的 $L^q(\Omega)$, 其中 $q \geq 1$,

但是, 在 $p = n$ 时, 并不能得到 $W_0^{1,n}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$. 1967 年 Trudinger 通过幂级数展开法建立了一个最佳嵌入不等式, 即存在 $\alpha_0 > 0$, 只要 $\alpha < \alpha_0$, 就有

$$\sup_{\|u\|_{W_0^{1,n}(\Omega)} \leq 1} \int_\Omega \exp\left(\alpha |u|^{\frac{n}{n-1}}\right) dx < +\infty.$$

1971 年, Moser[1] 通过对称重排方法确定了使得上式成立的最大常数 α_n, $\alpha_n = n\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}$, 其中 ω_{n-1} 为 $\mathbb{R}^n$ 上单位球面的测度. 即当 $0 \leq \alpha \leq \alpha_n$ 时, 上式成立; 但 $\alpha > \alpha_n$ 时, 上式中的上确界可以任意大. 现在称 Moser 得到的结果为 Trudinger-Moser 不等式, 即

$$\sup_{\|\nabla u\|_n \leq 1} \int_\Omega \left\{\exp\left(\alpha_{\rm n} |u|^{\frac{n}{n-1}}\right) - 1\right\} dx < C(\Omega, \alpha).$$

后来 Adimurthi 和 K.Sandeep[2] 建立了有界区域上 Dirichlet 范数约束下的奇异型 Trudinger-Moser 不等式: 即当且仅当 α 和 β 满足 $\frac{\alpha}{\alpha_n} + \frac{\beta}{n} \leq 1$, $\alpha > 0$, $\beta \in [0, n)$ 时, 有

$$\sup_{\|\nabla u\|_n \leq 1} \int_\Omega \frac{\exp\left(\alpha |u|^{\frac{n}{n-1}}\right)}{|x|^\beta} dx < \infty.$$

*收稿日期: 2020-07-08 接收日期: 2020-07-30
基金项目: 国家自然科学基金 (12071185, 12061010, 11971202); 江苏省青年基金 (BK20160483); 江苏大学基础基金 (16JDG043) 资助.
作者简介: 朱茂春 (1982 –), 男, 江苏镇江, 副教授, 主要研究方向: 几何不等式、偏微分方程理论. E-mail:zhumaochun2006@126.com.

关于 Trudinger-Moser 不等式的其他重要研究可以参见文献 [3–8].

一个自然的问题是当 $n = 1$ 时, 有没有类似的 Trudinger-Moser 不等式呢? 2015 年, Martinazzi, Iula 以及 Maalaoui 在文献 [9] 中给出了一个肯定的回答, 他们得到了定义在直线上的分数次 Sobolev 空间上的 Trudinger-Moser 不等式, 即若 $p \in (1,\infty)$, 则对于任何满足 $|I|<\infty$ 的开区间 $I \subset \mathbb{R}$, 当 $\alpha \le \alpha_p$ 时, 有

$$\sup_{u\in \tilde{H}^{\frac{1}{p},p}(I),\left\|(-\Delta)^{\frac{1}{2p}}u\right\|_{L^p(I)}\le 1}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(\alpha|u|^{\frac{p}{p-1}}\right)dx = C_p|I|$$

成立, 其中 $\alpha_p = \frac{1}{2}\left(2\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2p}\right)\right)^{\frac{p}{p-1}}$, $\Gamma(z)=\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt.$

进一步, 他们证明了常数 α_p 是最佳的, 即当 $\alpha>\alpha_p$ 时, 上式中的上确界可以无穷大.

但一维情形下分数次 Sobolev 空间上奇异型 Trudinger-Moser 不等式的研究仍是空白. 本文将着力关注、探讨并尝试建立一维情形下有界区间上的奇异型 Trudinger-Moser 不等式并讨论常数的最佳性.

为了叙述主要结果, 首先介绍分数次 Sobolev 空间 $H^{s,p}$. 令 $s\in(0,1)$, 考虑函数空间 $L_s(\mathbb{R})$:

$$L_s(\mathbb{R})=\left\{u\in L^1_{loc}(\mathbb{R}):\int_{\mathbb{R}}\frac{|u(x)|}{1+|x|^{1+2s}}dx<\infty\right\}.$$

对于 $u\in L_s(\mathbb{R})$, 定义 $(-\Delta)^s u$ 如下:

$$\langle(-\Delta)^s u,\varphi\rangle := \int_{\mathbb{R}} u(-\Delta)^s\varphi dx, \varphi\in\mathcal{S},$$

其中 $\mathcal{S}$ 为光滑的速降函数空间, 并且对于 $\varphi\in\mathcal{S}$, 定义

$$(-\Delta)^s\varphi=\mathcal{F}^{-1}\left(|\cdot|^{2s}\hat{\varphi}\right),$$

其中 $\mathcal{F}^{-1}$ 为 Fourier 逆变换, $\hat{\varphi}$ 为 φ 的 Fourier 变换. 对于 $s\in(0,1)$ 及 $p\in[1,\infty)$, $s=\frac{1}{p}$, 定义 Bessel 位势空间

$$H^{s,p}(\mathbb{R})=\left\{u\in L^p(\mathbb{R}):(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\in L^p(\mathbb{R})\right\}$$

以及它的子空间

$$\widetilde{H}^{s,p}(I)=\left\{u\in L^p(\mathbb{R}):\ \text{在}\mathbb{R}\backslash I\ \text{上},\ u\equiv 0,(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\in L^p(\mathbb{R})\right\},$$

其中 $I\subset\mathbb{R}$ 是一个有界区间. 上述两个空间的范数是:

$$\|u\|^p_{H^{s,p}(\mathbb{R})} := \left\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\right\|^p_{L^p(\mathbb{R})}+\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R})}.$$

记 $\|u\|^* := \left\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\right\|_{L^p(I)}$, 当 $u\in\widetilde{H}^{s,p}(I)$ 时, 由 [1] 可知存在 C 使得

$$\|u\|_{H^{s,p}(\mathbb{R})}\le C\|u\|^*,$$

也即在 $\widetilde{H}^{s,p}(I)$ 上 $\|u\|_{H^{s,p}(\mathbb{R})}$ 与 $\|u\|^*=\left\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\right\|_{L^p(I)}$ 是等价的. 所以上述 $\widetilde{H}^{s,p}(I)$ 空间的范数可以由 $\|u\|^*=\left\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\right\|_{L^p(I)}$ 替代.

本文的主要结果如下.

定理 1.1 对于任意有限区间 $I\subset\mathbb{R}$, $p\in[1,\infty)$ 及 $\beta\in[0,1)$, 存在常数 $C(p,\beta)$, 满足对任意的 $0\le\alpha\le\alpha_p$, 有

$$\sup_{u\in\tilde{H}^{\frac{1}{p},p}(I),\left\|(-\Delta)^{\frac{1}{2p}}u\right\|_{L^p(I)}\le 1}\frac{1}{|I|^{1-\beta}}\int_{\mathbb{R}}\frac{\exp\left[(1-\beta)\alpha_p|u|^{\frac{p}{p-1}}\right]}{|x|^{\beta}}dx\le C(p,\beta) \tag{1.1}$$

成立, 其中

$$\alpha_p:=\frac{1}{2}\left[2\cos\left(\frac{\pi}{2p}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\right]^{p'},p'=\frac{p}{p-1},\Gamma(z):=\int_0^{+\infty}t^{z-1}e^{-t}dt.$$

进一步, (1.1) 式中的常数 α_p 是最佳的, 即如果 $\alpha>\alpha_p$, (1) 式中的上确界可以任意大.

2 定理 1.1 的证明

为了证明定理 1.1, 首先给出下面的重排定义及处理卷积重排问题时常用的 O'Neil 引理.

记 $\lambda(s)=|\{x\in \mathrm{R}:f(x)>s\}|$, 则 $f^*(t)=\inf\{s>0:\lambda(s)\le t\}$ 为 f 的径向递减重排, $f^{**}(t)=t^{-1}\int_0^t f^*(s)ds$ 为极大值函数. 下面给出著名的 O'Neil 引理 (见 [10]), 即若 $\varphi=f*g$, 则对于任意 $t>0$ 均有

$$\varphi^*(t)\le\varphi^{**}(t)\le tf^{**}(t)g^{**}(t)+\int_t^{\infty}f^*(s)g^*(s)ds.$$

引理 2.1 设 I 为 $\mathbb{R}$ 的有界子集, $u\in\tilde{H}^{\frac{1}{p},p}(I)$. 则

$$u^*(t)\le(\alpha_p)^{\frac{1-p}{p}}\left[p(t)^{-\frac{1}{p'}}\int_0^t\left|(-\Delta)^{\frac{1}{2p}}u\right|^*(r)dr+\int_t^{|I|}\left|(-\Delta)^{\frac{1}{2p}}u\right|^*(r)\cdot(r)^{-\frac{1}{p'}}\right] \tag{2.1}$$

证 当 $u\in\tilde{H}^{\frac{1}{p},p}(I)$, 可知

$$u(x)=\int_I G_{\frac{1}{2p}}(x,y)(-\Delta)^{\frac{1}{2p}}u(y)dy,$$

其中 $G_{\frac{1}{2p}}(x,y)$ 是 $(-\Delta)^{\frac{1}{2p}}$ 在 I 上的 Green 函数, 即对于 $x\in I$, 满足

$$\begin{cases}(-\Delta)^{\frac{1}{2p}}G_{\frac{1}{2p}}(x,.)=\delta_x, & y\in I\\ G_{\frac{1}{2p}}(x,y)=0, & y\in R\backslash I\end{cases}$$

进一步, 不难验证 $G_{\frac{1}{2p}}(x,y)$ 满足

$$0\le(2\alpha_p)^{\frac{p-1}{p}}G_{\frac{1}{2p}}(x,y)\le I_{\frac{1}{p}}(x-y)=|x-y|^{\frac{1}{p}-1},$$

其中 $I_{\frac{1}{p}}(x)=|x|^{\frac{1}{p}-1}$. 上述两式证明参照文献 [1, Lemma 2.2] 以及文献 [1, Theorem 1.1] 的证明, 此处从略.

设 $x\in I$ 时, 记 $f=\left|(-\Delta)^{\frac{1}{2p}}u\right|$, $g(x)=|x|^{\frac{1}{p}-1}$, 则由简单计算可得

$$g^*(t)=\left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{1}{p'}},g^{**}(t)=p\left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{1}{p'}},$$

下面估计 $u(x)$ 的重排函数. 由于 $f\geq 0$ 利用 O'Neil 引理, 可以得到

$$\begin{aligned}
u^*(t)\leq u^{**}(t)&\leq(2\alpha_p)^{\frac{1-p}{p}}\left[tf^{**}(t)g^{**}(t)+\int_t^\infty f^*(s)g^*(s)ds\right]\\
&=(2\alpha_p)^{\frac{1-p}{p}}\left[tt^{-1}p\left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{1}{p'}}\int_0^t\left|(-\Delta)^{\frac{1}{2p}}u\right|^*(r)dr+\int_t^{|I|}\left|(-\Delta)^{\frac{1}{2p}}u\right|^*(r)\cdot\left(\frac{r}{2}\right)^{-\frac{1}{p'}}dr\right|\\
&=(2\alpha_p)^{\frac{1-p}{p}}\left[p\left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{1}{p'}}\int_0^t\left|(-\Delta)^{\frac{1}{2p}}u\right|^*(r)dr+\int_t^{|I|}\left|(-\Delta)^{\frac{1}{2p}}u\right|^*(r)\cdot\left(\frac{r}{2}\right)^{-\frac{1}{p'}}\right]\\
&=(\alpha_p)^{\frac{1-p}{p}}\left[p(t)^{-\frac{1}{p'}}\int_0^t\left|(-\Delta)^{\frac{1}{2p}}u\right|^*(r)dr+\int_t^{|I|}\left|(-\Delta)^{\frac{1}{2p}}u\right|^*(r)\cdot(r)^{-\frac{1}{p'}}\right]
\end{aligned}$$

证毕.

引理 2.2 [11] 令 $0<\alpha\leq 1$, $p\in(1,\infty)$, $a(s,t)$ 是定义在 $(-\infty,\infty)\times[0,\infty)$ 的非负可测函数且满足

$$\begin{cases}a(s,t)\leq 1,\ \text{当} 0<s<t\ \text{时},\\ \sup_{t>0}\left(\int_{-\infty}^0 a(s,t)^{p'}ds+\int_t^\infty a(s,t)^{p'}ds\right)^{\frac{1}{p'}}=b<\infty\end{cases}$$

若 $\Phi\geq 0$ 且满足 $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\Phi(s)^pds\leq 1$, 那么一定存在某个常数 C_0 满足

$$\int_0^{+\infty}\exp\left(-F_\alpha(t)\right)dt,$$

其中

$$F_\alpha(t)=\alpha t-\alpha\left(\int_{-\infty}^{+\infty}a(s,t)\Phi(s)ds\right)^{p'}.$$

定理 1.1 的证明 对 (2.1) 式做变量替换 $t=e^{-s}|I|$, 可以很容易得到

$$\begin{aligned}u^*\left(e^{-s}|I|\right)\leq(\alpha_p)^{\frac{1-p}{p}}|I|^{\frac{1}{p}}\Bigg[&p\left(e^{-s}\right)^{\frac{1-p}{p}}\int_s^\infty\left|(-\Delta)^{\frac{1}{2p}}u\right|^*\left(e^{-r}|I|\right)\cdot e^{-r}dr+\\ &\int_0^s\left|(-\Delta)^{\frac{1}{2p}}u\right|^*\left(e^{-r}|I|\right)\cdot\left(e^{-r}\right)^{\frac{1}{p}}dr\Bigg]\end{aligned}\tag{2.2}$$

令

$$\Phi(r)=\begin{cases}\left|(-\Delta)^{\frac{1}{2p}}u\right|^*(e^{-r}|I|)\cdot(e^{-r}|I|)^{\frac{1}{p}}, & \text{若} r\geq 0\\ 0, & \text{若} r<0\end{cases}\tag{2.3}$$

以及

$$a(r,s)=\begin{cases}0, & 若 r\le 0\\ 1, & 若 0<r\le s\\ pe^{\frac{s-r}{p'}}, & 若 s<r<\infty\end{cases} \tag{2.4}$$

结合 (2.2)–(2.4) 式, 有

$$u^*\left(e^{-s}|I|\right)\le(\alpha_p)^{\frac{1-p}{p}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(r)\cdot a(r,s)dr.$$

通过简单的计算, 可知

$$\left(|x|^{-\beta}\right)^*(t)=\left(\frac{t}{2}\right)^{-\beta},$$

并且由重排的基本性质, 可知

$$\left(\exp\left[(1-\beta)\alpha|u|^{\frac{p}{p-1}}\right]\right)^*(t)=\exp\left[(1-\beta)\alpha\left|u^*\right|^{\frac{p}{p-1}}\right].$$

对于任意的 $0\le\alpha\le\alpha_p$, 利用 Hardy-Littlewood 不等式 [12], 有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|I|^{1-\beta}}\int_I\frac{\exp\left[(1-\beta)\alpha|u|^{\frac{p}{p-1}}\right]}{|x|^\beta}dx\\ \le&\frac{1}{|I|^{1-\beta}}\int_0^{|I|}\exp\left[(1-\beta)\alpha\left|u^*\right|^{\frac{p}{p-1}}\right]\left(\frac{t}{2}\right)^{-\beta}dt\\ =&\frac{1}{|I|^{1-\beta}}\int_0^{\infty}\exp\left[(1-\beta)\alpha\left|u^*\left(e^{-s}|I|\right)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right]\cdot\left(\frac{e^{-s}|I|}{2}\right)^{-\beta}\cdot e^{-s}|I|ds\\ =&2^\beta\int_0^\infty\exp\left[(1-\beta)\alpha\left|u^*\left(e^{-s}|I|\right)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right]\cdot e^{-s(1-\beta)}ds\\ =&2^\beta\int_0^\infty\exp\left[(1-\beta)\alpha\left[(\alpha_p)^{\frac{1-p}{p}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(r)\cdot a(r,s)dr\right]^{\frac{p}{p-1}}\right]\cdot e^{-s(1-\beta)}ds\\ \le&2^\beta\int_0^\infty\exp\left[(1-\beta)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(r)\cdot a(r,s)dr\right]^{\frac{p}{p-1}}-s(1-\beta)\right]ds\\ \le&2^\beta\int_0^\infty\exp\left[-F_{1-\beta}(s)\right]ds,\end{aligned}$$

其中

$$F_{1-\beta}(s)=s(1-\beta)-(1-\beta)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(r)\cdot a(r,s)dr\right]^{\frac{p}{p-1}}.$$

因为 (2.4) 中的 $a(s,r)$ 满足当 $0<r<s$, $a(r,s)\le 1$, 以及

$$\int_{-\infty}^0 a(r,s)^{\frac{p}{p-1}}dr+\int_s^\infty a(r,s)^{\frac{p}{p-1}}dr=p^{p'}\int_s^\infty e^{s-r}dr=p^{p'}<\infty,$$

且有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(s)^p ds &= \int_0^{+\infty}|I|\left[\left|(-\Delta)^{\frac{1}{2p}}u\right|^*\left(e^{-r}|I|\right)\right]^p\cdot e^{-r}dr\\ &= \int_0^{|I|}\left[\left|(-\Delta)^{\frac{1}{2p}}u\right|^*(t)\right]^p\cdot t\cdot\frac{1}{t}dt\\ &= \left\|(-\Delta)^{\frac{1}{2p}}u\right\|_{L^p(I)}^p\le 1.\end{aligned}$$

于是利用引理 2.2, 可以得到

$$\int_0^{\infty}\exp\left[-F_{1-\beta}(s)\right]ds\le C_0.$$

因此, 当 $0\le\alpha\le\alpha_p$, 可以得到

$$\frac{1}{|I|^{1-\beta}}\int_I\frac{\exp\left[(1-\beta)\alpha|u|^{\frac{p}{p-1}}\right]}{|x|^\beta}\le C(p,\beta).$$

下面证明常数 α_p 是最佳的. 通过简单的伸缩变换, 不难发现只需证明该结论在特定区间 $I=(-1,1)$ 上成立即可. 证明过程分为三步.

第一步 测试函数的构造. 固定 $\tau\ge 1$, 令 $f(y)=f_\tau(y):=\frac{1}{2\tau}|y|^{-\frac{1}{p}}\chi_{\left[-\frac{1}{2},-r\right]\cup\left[r,\frac{1}{2}\right]}, r:=\frac{e^{-\tau}}{2}$ 直接计算可得

$$\|f\|_{L_p}^p=\frac{2}{(2\tau)^p}\int_r^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{y}=\frac{1}{(2\tau)^{p-1}}.$$

令 $u=u_\tau\in\widetilde{H}^{\frac{1}{2p},2}(I)$ 为下列方程的解

$$\begin{cases}(-\Delta)^{\frac{1}{2p}}u=f, & \text{当}x\in I\\ u\equiv 0, & \text{当}x\in I^c\end{cases}$$

第二步 证明 $u\in\widetilde{H}^{\frac{1}{p},p}(I)$. 这里的证明与 [9] 中类似, 这里省略.

第三步 当 $x\in I$ 时,

$$\begin{aligned}u(x)&=\int_I G_{\frac{1}{2p}}(x,y)f(y)dy\\ &=\frac{1}{2\tau\left(2\alpha_p\right)^{\frac{p-1}{p}}}\int_{r<|y|<\frac{1}{2}}\frac{dy}{|x-y|^{1-\frac{1}{p}}|y|^{\frac{1}{p}}}-\int_{r<|y|<\frac{1}{2}}H_{\frac{1}{2p}}(x,y)f(y)dy\\ &=: u_1(x)+u_2(x)\end{aligned}$$

其中 $H_{\frac{1}{2p}}(x,\cdot)\in\tilde{H}^{\frac{1}{2p},2}(I)+g_x$ 是下述方程的解

$$\begin{cases}(-\Delta)^s H_s(x,\cdot)=0, & \text{当}x\in I\\ H_s(x,\cdot)=g_x, & \text{当}x\in I^c\end{cases}$$

其中 $g_x\in C^\infty(\mathbb{R})$ 且当 $y\in I^c$ 时,

$$g_x(y)=F_{\frac{1}{2p}}(x-y)=\frac{1}{2\cos\left(\frac{1}{2p}\pi\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)|x-y|^{1-\frac{1}{p}}}.$$

类似于 [9], 可以得到 u 在 $[-r,r]$ 上的一个下界估计.

$$
\begin{aligned}
u_1(x) =& \frac{1}{2\tau\left(2\alpha_p\right)^{\frac{p-1}{p}}}\left(\int_r^{1/2}\frac{dy}{|x-y|^{1-\frac{1}{p}}|y|^{\frac{1}{p}}}+\int_{-1/2}^{-r}\frac{dy}{|y-x|^{1-\frac{1}{p}}|y|^{\frac{1}{p}}}\right)\\
\geq& \frac{1}{2\tau\left(2\alpha_p\right)^{\frac{p-1}{p}}}\left(\int_r^{1/2}\frac{dy}{y}+\int_r^{1/2}\frac{dy}{y+x}\right)\\
=& \frac{1}{2\tau\left(2\alpha_p\right)^{\frac{p-1}{p}}}\left(2\tau+\log\left(\frac{1+2x}{1+\frac{x}{r}}\right)\right)\\
=& \frac{1}{\left(2\alpha_p\right)^{\frac{p-1}{p}}}+O\left(\tau^{-1}\right).
\end{aligned}
$$

因为 $H_{\frac{1}{2p}}$ 在 $[-r,r]\times\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上有界, 可知

$$
|u_2(x)|\leq C\int_r^{\frac{1}{2}}f(y)dy\leq C\tau^{-1}\int_0^{\frac{1}{2}}|y|^{-\frac{1}{p}}dy=O\left(\tau^{-1}\right),\quad x\in[-r,r].
$$

于是, 对于任意的 $x\in[-r,r]$, 当 $\tau\to\infty$ 时,

$$
u=u_\tau\geq\frac{1}{\left(2\alpha_p\right)^{\frac{p-1}{p}}}+O\left(\tau^{-1}\right).
$$

令 $w_\tau:=(2\tau)^{\frac{p-1}{p}}u_\tau\in\widetilde{H}^{\frac{1}{p},p}(I)$, 不难验证 $\|(-\Delta)^{\frac{1}{2p}}w_\tau\|_{L_p(I)}=1$, 于是

$$
\begin{aligned}
\int_I\frac{\exp\left[(1-\beta)\alpha\left|w_\tau\right|^{p'}\right]}{|x|^\beta}dx\geq&\int_{-r}^{r}\frac{\exp\left[(1-\beta)\frac{\alpha}{\alpha_p}(\tau+O(1))\right]}{|x|^\beta}dx\\
=&2\int_0^r\frac{\exp\left[(1-\beta)\frac{\alpha}{\alpha_p}(\tau+O(1))\right]}{x^\beta}dx\\
=&\frac{2}{1-\beta}r^{1-\beta}\exp\left[(1-\beta)\frac{\alpha}{\alpha_p}(\tau+O(1))\right]\\
=&\frac{2^\beta}{1-\beta}\exp\left[(1-\beta)\tau\left(\frac{\alpha}{\alpha_p}-1\right)+(1-\beta)\frac{\alpha}{\alpha_p}O(1)\right]\\
\to&\infty\quad(\tau\to\infty)
\end{aligned}
$$

参 考 文 献

[1] Moser J. A sharp form of an inequality by N. Trudinger[J]. Indiana Univ. math. j., 1970–1971, 20: 1077–1092.

[2] Adimurthi, Sandeep K. A singular Moser-Trudinger embedding and its applications[J]. Nodea Nonlinear Differential Equations and Applications, 2007, 13(5): 585–603.

[3] Li Yuxiang, Ruf B. A sharp Trudinger-Moser type inequality for unbounded domains in R^N[J]. Indiana University Mathematics Journal, 2008, 57(1): 451–480.

[4] Lam N, Lu Guozhen. A new approach to sharp Moser-Trudinger and Adams type inequalities: A rearrangement-free argument[J]. Journal of Differential Equations, 2013, 255(3): 298–325.

[5] Adachi S, Tanaka K. Trudinger type inequalities in R–N and their best exponent[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2000, 128(7): 2051–2058.

[6] Calanchi M, Ruf B. Trudinger-Moser type inequalities with logarithmic weights in dimension[J]. Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications, 2015.

[7] Cassani D, Tarsi C. A Moser-type inequality in Lorentz-Sobolev spaces for unbounded domains in R^N[J]. Asymptotic Analysis, 2009, 64(1-2): 29–51.

[8] Alberico A. Moser type inequalities for higher-order derivatives in lorentz spaces[J]. Potential Analysis, 2008, 28(4): 389–400.

[9] Feller W. An introduction to probability theory and its applications (3rd ed.)[M]. New York: Wiley, 1969.

[10] O'Neil R. Convolution operators and $L(p,q)$ spaces[J]. Duke Mathematical Journal, 1963, 30(1): 129–142.

[11] Lu Guozhen, Tang Hanli. Sharp singular trudinger-moser inequalities in Lorentz-Sobolev spaces[J]. Advanced Nonlinear Studies, 2016, 16(3): 581–601.

[12] Iwaniec, Nolder C A. Hardy-Littlewood inequality for quasi-regular mappings in certain domains in R[J]. R. N., 1985, 10: 267–282.

A FRACTIONAL SINGULAR TRUDINGER-MOSER INEQUALITY IN DIMENSION ONE

ZHU Mao-chun , LIU Jie

(*School of Mathematical Sciences, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China*)

Abstract: This paper is devoted to studying a singular fractional Trudinger-Moser inequality in dimension one. By the Green representation formula for functions in the fractional Sobolev spaces, we get a singular fractional Trudinger-Moser type inequality. Furthermore, by using a suitable test functions sequence, we can show that the constant in the inequality is optimal. This result extends the singular Trudinger-Moser inequality in the high-dimensional spaces to the space of dimension one.

Keywords: Trudinger-Moser inequality; fractional Sobolev space; rearrangement; optimal constant

2010 MR Subject Classification: 46E35; 46E30; 26A33