

局部单叶对数调和映射的 Bohr 半径

江清华, 袁文俊

(广州大学数学与信息科学学院, 广东 广州 510006)

摘 要: 本文研究了一类局部单叶对数调和映射的若干性质. 利用复分析的方法与技巧, 获得了该类映射的增长定理和两种新的 Bohr 半径, 推广了几何函数的理论研究结果.

关键词: 单叶对数调和映射; Bohr 半径; 增长定理; 估计

MR(2010) 主题分类号: 30C35; 30C45

中图分类号: O174

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2021)01-0088-07

1 引言

假设 $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ 是一类定义在单位圆盘 $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$ 上的解析函数集合. 1914 年, Bohr^[1] 得到了在单位圆盘上的解析自映射 f 级数展开式的模的大小估计. 下面是著名的 Bohr 不等式, 如果

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in \mathcal{A}(\mathbb{D}), \quad |f(z)| < 1, \quad z \in \mathbb{D}$$

那么

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k z^k| \leq 1 \quad \text{对于所有的} \quad |z| \leq \frac{1}{3}.$$

Bohr 实际上得到的半径 $|z| = \frac{1}{6}$, 后来 Wiener, Riesz 和 Schur^[2-4] 分别研究得到了精确的半径 $|z| = \frac{1}{3}$. Bohr 不等式也可以换一种描述, 如果

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{和} \quad \|f\|_{\infty} = \sup_{|z|<1} |f(z)| < \infty$$

那么

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k z^k| \leq \|f\|_{\infty} \quad \text{对所有的} \quad |z| \leq \frac{1}{3}.$$

对于

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

*收稿日期: 2020-07-17

接收日期: 2020-10-14

基金项目: 广州大学研究生基础创新项目基金资助 (2017GDJC-D07).

作者简介: 江清华 (1989-), 男, 江西上饶, 博士, 主要研究方向: 复分析.

Bohr 不等式的一个等价形式

$$d\left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k z^k|, |a_0|\right) = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k z^k| \leq d(f(0), \partial\mathbb{D}),$$

这里的 d 是欧氏距离. 上述不等式描述了解析映射把单位圆盘映射到单位圆盘的边界上的 Bohr 现象. 最近, Defant 等人研究了多维 Bohr 半径与局部 Banach 空间理论之间的关系, 并且获得了关于多圆盘 $\mathbb{D}^n$ [5] 对于 n 维 Bohr 半径的最佳渐近值的估计.

本文的目标是以形如 $f(z) = z|z|^{2\beta}h(z)\overline{g(z)}$ 的局部单叶对数调和映射为研究对象, 扩展了 Bohr 现象的表示公式. 此处的 h, g 在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上解析. 调和映射与对数调和映射的相关性质以及各种记号将在文章第二部分阐述, 文章第三部分是精确的增长定理和新的 Bohr 半径等主要结果的证明.

2 预备知识

这一节, 给出一些相关记号和概念. 单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的调和函数是指复值函数

$$f = u + iv \quad \text{以及} \quad z = x + iy,$$

且满足 Laplace 方程

$$\Delta f = 4f_{z\bar{z}} = 0, \quad f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y), \quad f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y),$$

u, v 均为单位圆盘上的实值调和函数. 由此 f 有规范表示 $f = h + \bar{g}$, 这里的 h, g 均为单位圆盘上的解析函数, 且满足 $f(0) = h(0)$. 我们说 f 在单位圆盘上局部单叶且具有保向性是指其 Jacobian 行列式 $J_f(z) > 0$, 或者等价地说, 在单位圆盘上其第二复特征 $\omega_f := \frac{g'}{h'}$ 有此特性 $|\omega_f(z)| < 1$ [6].

假设 $\mathcal{B}(\mathbb{D})$ 表示一类由函数 $\omega \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ 且满足 $|\omega(z)| < 1$ 的集合. 定义在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的对数调和映射就是一类非线性偏微分方程

$$\frac{\overline{f_z}}{f} = \omega \frac{f_z}{f},$$

的解, 其第二复特征 $\omega \in \mathcal{B}(\mathbb{D})$. 因此 Jacobian 行列式

$$J_f = |f_z|^2(1 - |\omega|^2) > 0.$$

当 f 是一单位圆盘上非退化的对数调和映射, 有下列表达式

$$f(z) = h(z)\overline{g(z)},$$

这里的 h, g 均属于 $\mathcal{A}(\mathbb{D})$. 在文献 [7], 作者 Mao 等人对于非退化的对数调和映射引进了 Schwarz 导数概念, 研究 Schwarz 引理并获得了两种 Landau 型定理.

如果 f 是单位圆盘上的非常数对数调和映射, 其仅在 $z = 0$ 处退化, 那么 f 有下列表达式 [8]

$$f(z) = z^m |z|^{2\beta m} h(z) \overline{g(z)},$$

此处的 m 是非负整数, $\operatorname{Re}\beta > -\frac{1}{2}$, h, g 均为单位圆盘上的解析函数, 满足 $h(0) \neq 0$ 和 $g(0) = 1$, 指数 β 仅依靠 $\omega(0)$, 有如下关系式

$$\beta = \frac{\overline{\omega(0)} + |\omega(0)|^2}{1 - |\omega(0)|^2}.$$

$f(0) \neq 0$, 当且仅当 $m = 0$, 有一类单叶对数调和映射仅在原点退化, 当且仅当 $m = 1$, 也就是说 f 有下列表达形式

$$f(z) = z|z|^{2\beta}h(z)\overline{g(z)} \quad z \in \mathbb{D}, \quad (1)$$

此处像区域 $(hg)(\mathbb{D})$ 不包含 0 且 $g(0) = 1$. 本文中, 用记号 $\mathcal{S}_{Lh}^*$ 表示把单位圆盘映射到星形区域的单叶对数调和映射集合, 且满足 $f(0) = 0$, $h(0) = g(0) = 1$ 这一类对数调和映射近期被广泛研究^[9-12].

3 主要结果及其证明

定理 3.1 假设 $f = z|z|^{2\beta}h(z)\overline{g(z)} \in \mathcal{S}_{Lh}^*$ 是把单位圆盘 $\mathbb{D}$ 映射到复平面 $\mathbb{C}$ 的一星形区域的保向对数调和映射, 那么下面的不等式

$$|z|^{2|\beta|+1} \exp\left(\frac{-4|z|}{1+|z|}\right) \leq |f(z)| \leq |z|^{2|\beta|+1} \exp\left(\frac{4|z|}{1-|z|}\right) \quad (2)$$

成立, 并且不等式 (2) 是精确的.

证 首先由 [8, 定理 5.1] 可得

$$\psi(z) := \frac{zh(z)}{g(z)} \in \mathcal{S}^*,$$

其中 $\mathcal{S}^*$ 星形函数类. 因此

$$h(z) = \psi(z) \frac{g(z)}{z}, \quad f(z) = z|z|^{2\beta} \psi(z) |g(z)|^2.$$

对于 $|z| = r$, 根据星形函数的增长定理和性质可得

$$|\psi(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}, \quad \left| \frac{z\psi'(z)}{\psi(z)} \right| \leq \frac{1+r}{1-r}, \quad \text{以及} \quad \left| \frac{\omega(z)}{z(1-\omega(z))} \right| \leq \frac{1}{1-r}.$$

又根据 [13, 定理 2], $g(z)$ 可以表示为

$$g(z) = \exp\left(\int_0^z \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} \cdot \frac{\omega(t)}{1-\omega(t)} dt\right),$$

所以产生

$$|g(z)| \leq \exp\left(\int_0^r \frac{1+t}{1-t} \cdot \frac{1}{1-t} dt\right) = (1-r) \cdot \exp\left(\frac{2r}{1-r}\right), \quad (3)$$

和

$$|h(z)| = \left| \psi(z) \frac{g(z)}{z} \right| \leq \frac{1}{1-r} \cdot \exp\left(\frac{2r}{1-r}\right). \quad (4)$$

所以结合 (3), (4) 可以得到上界

$$|f(z)| = \left| z|z|^{2\beta} h(z) \overline{g(z)} \right| \leq |z|^{2|\beta|+1} |h(z)| |g(z)| = |z|^{2|\beta|+1} \cdot \exp \left(\frac{4|z|}{1-|z|} \right). \quad (5)$$

对于左边下界的估计, 结合文献 [13, 定理 2],

$$\log |h(z)| \geq \inf_{0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}} \left(\frac{-2r \cos \theta}{1+r \cos \theta} - \log(1+r) \right) \geq \frac{-2r}{1+r} - \log(1+r),$$

经简单运算得出

$$|h(z)| \geq \frac{1}{1+r} \cdot \exp \left(\frac{-2r}{1+r} \right). \quad (6)$$

与此类似 $|g(z)|$ 的下界

$$\log |g(z)| \geq \inf_{0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}} \left(\frac{-2r \cos \theta}{1+r \cos \theta} + \log(1+r) \right) \geq \frac{-2r}{1+r} + \log(1+r),$$

从而有

$$|g(z)| \geq (1+r) \cdot \exp \left(\frac{-2r}{1+r} \right). \quad (7)$$

结合 (6), (7) 可以得出

$$|f(z)| = |z|^{2|\beta|+1} |h(z)| |g(z)| \geq r^{2|\beta|+1} \cdot \exp \left(\frac{-4r}{1+r} \right), \quad (8)$$

再结合 (5), (8) 可以得出不等式 (2) 成立, 为了验证不等式 (2) 的精确性, 可以分别取

$$g(z) = (1-z) \exp \left(\frac{2z}{1-z} \right), \quad h(z) = \frac{1}{1-z} \exp \left(\frac{2z}{1-z} \right).$$

证毕.

定理 3.2 假设 $f \in \mathcal{S}_{Lh}^*$ 是局部单叶保向对数调和映射, 其表达式 $f(z) = z|z|^{2\beta} h(z) \overline{g(z)}$, 把单位圆盘映射到复平面一星形区域, h, g 分别为

$$h(z) = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \right) \quad \text{和} \quad g(z) = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k \right),$$

那么下列两个不等式成立

$$|z|^{\beta+1} \cdot \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| |z|^k \right) \leq d(0, \partial h_{\beta}(\mathbb{D})) \quad (9)$$

对于 $|z| \leq r_{h_{\beta}}$, 这里的 $r_{h_{\beta}}$ 是下面方程

$$\frac{r^{|\beta|+1}}{1-r} \cdot \exp \left(\frac{2r}{1-r} \right) = \frac{1}{2e}$$

在 $(0, 1)$ 的唯一解;

$$|z|^\beta \cdot \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| |z|^k \right) \leq d(0, \partial g_\beta(\mathbb{D})) \quad (10)$$

$|z| \leq r_{g_\beta}$, 这里的 r_{g_β} 是方程

$$r^{|\beta|}(1-r) \cdot \exp \left(\frac{2r}{1-r} \right) = \frac{2}{e}$$

属于区间 $(0, 1)$ 的唯一解.

证 记

$$h_\beta(z) = z^{\beta+1}h(z) = z^{\beta+1} \cdot \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \right) \quad \text{和} \quad g_\beta(z) = z^\beta g(z) = z^\beta \cdot \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k \right).$$

根据文献 [12, 定理 3.3],

$$|a_k| \leq 2 + \frac{1}{k} \quad \text{和} \quad |b_k| \leq 2 - \frac{1}{k},$$

再结合文献 [13, Corollary 1], 有

$$d(0, \partial h_\beta(\mathbb{D})) \geq \frac{1}{2e} \quad \text{和} \quad d(0, \partial g_\beta(\mathbb{D})) \geq \frac{2}{e}.$$

因此

$$\begin{aligned} r^{|\beta|+1} \cdot \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k \right) &\leq r^{|\beta|+1} \cdot \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{k} \right) r^k \right) = r^{|\beta|+1} \cdot \exp \left(\frac{2r}{1-r} - \log(1-r) \right) \\ &\leq d(0, \partial h_\beta(\mathbb{D})) \end{aligned}$$

当且仅当

$$\frac{r^{|\beta|+1}}{1-r} \cdot \exp \left(\frac{2r}{1-r} \right) \leq \frac{1}{2e}.$$

Bohr 半径 r_{h_β} 是下面方程

$$\frac{r^{|\beta|+1}}{1-r} \cdot \exp \left(\frac{2r}{1-r} \right) = \frac{1}{2e}$$

的唯一正解. 与此类似有下列不等式

$$\begin{aligned} r^{|\beta|} \cdot \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| r^k \right) &\leq r^{|\beta|} \cdot \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(2 - \frac{1}{k} \right) r^k \right) = r^{|\beta|} \cdot \exp \left(\frac{2r}{1-r} + \log(1-r) \right) \\ &\leq d(0, \partial g_\beta(\mathbb{D})) \end{aligned}$$

当且仅当

$$r^{|\beta|}(1-r) \cdot \exp \left(\frac{2r}{1-r} \right) \leq \frac{2}{e}.$$

因此 Bohr 半径 r_{g_β} 是下列方程

$$r^{|\beta|}(1-r) \cdot \exp\left(\frac{2r}{1-r}\right) = \frac{2}{e}$$

的唯一正解, 证毕.

定理 3.3 假设 $f(z) = z|z|^{2\beta}h(z)\overline{g(z)} \in \mathcal{S}_{Lh}^*$ 是定义在单位圆盘到复平面上的一星形区域的局部单叶对数调和映射, 那么对于任意的实数 $s \in \mathbb{R}$, 使得

$$|z|^{2\beta+1} \cdot \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k + e^{is}b_k| |z|^k\right) \leq d(0, \partial f(\mathbb{D})).$$

对于 $|z| \leq r_f$, 该 Bohr 半径 r_f 是下面方程

$$r^{2|\beta|+1} \cdot \exp\left(\frac{4r}{1-r}\right) = \frac{1}{e^2}.$$

在区间 $(0, 1)$ 唯一解.

证 首先由文献 [12, 定理 3.3] $|a_k| \leq 2 + \frac{1}{k}$ 和 $|b_k| \leq 2 - \frac{1}{k}$, 再结合文献 [13] 给出

$$d(0, \partial f(\mathbb{D})) \geq \frac{1}{e^2}$$

因此有

$$\begin{aligned} r^{2|\beta|+1} \cdot \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k + \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| r^k\right) &\leq r^{2|\beta|+1} \cdot \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} 4r^k\right) = r^{2|\beta|+1} \cdot \exp\left(\frac{4r}{1-r}\right) \\ &\leq d(0, \partial f(\mathbb{D})), \end{aligned}$$

当且仅当

$$r^{2|\beta|+1} \cdot \exp\left(\frac{4r}{1-r}\right) \leq \frac{1}{e^2}.$$

所以该 Bohr 半径 r_f 是方程

$$r^{2|\beta|+1} \cdot \exp\left(\frac{4r}{1-r}\right) = \frac{1}{e^2}$$

的唯一解, 证毕.

参 考 文 献

- [1] Bohr H. A theorem concerning power series[J]. Proceeding of the London Mathematical Society, 1914, 13(2): 1-5.
- [2] Paulsen V, Popescu G, Singh D. On Bohr's inequality[J]. Proceeding of the London Mathematical Society, 2002, 85(2): 493-512.
- [3] Sidon S. Über einen Satz von Herrn Bohr[J]. Mathematische Zeitschrift, 1927, 26(1): 731-732.

- [4] Tomic M. Sur un théorème de H. Bohr[J]. *Mathematica Scandinavica*, 1962, 11: 103–106.
- [5] Defant A, Frerick L, Ortega-Cerdà J. The Bohnenblust-Hille inequality for homogenous polynomials is hypercontractive[J]. *Annals of Mathematics*, 2011, 174(1): 485–497.
- [6] Lewy H. On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings[J]. *Bulletin American Mathematical Society*, 1936, 42(10): 689–692.
- [7] Mao Z, ponnusamy S, Wang X. Schwarzian derivative and Landau’s theorem for logharmonic mappings[J]. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2013, 58(8): 1093–1107.
- [8] Abdulhadi Z, Ali RM. Univalent logharmonic mappings in the plane[J]. *Abstract and Applied Analysis*, 2012, 30(2): 1–32.
- [9] Abdulhadi Z. Close-to-starlike logharmonic mappings[J]. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 1996, 19(3): 563–574.
- [10] Abdulhadi Z, Bshouty D. Univalent functions in $H\overline{H}(\mathbb{D})$ [J]. *Transactions of American Mathematical Society*, 1988, 305(2): 841–849.
- [11] Abdulhadi Z, Hengartner W. Spirallike logharmonic mappings[J]. *Complex Variables. Theory and Application*, 1987, 9(2): 121–130.
- [12] Abdulhadi Z, Hengartner W. Univalent harmonic mappings on the left half-plane with periodic dilatations[J]. *Ellis Horwood Series in Mathematics and Its Applications*, 1989, 13–28.
- [13] Rosihan M, Abdulhadi Z, Ng Z. The Bohr radius for starlike logharmonic mappings[J]. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2016, 61(1): 1–14.

THE BOHR RADIUS FOR UNIVALENT LOCALLY LOG-HARMONIC MAPPINGS

JIANG Qing-hua , YUAN Wen-jun

(*School of Mathematics and Information Science Guangzhou University, Guangzhou 510006, China*)

Abstract: In this paper, we study some properties of a certain class of univalent locally log-harmonic mappings. By using complex analysis methods and techniques, we obtain the growth theorem and two distinctive sharp Bohr radius for given the certain mappings. These results generalize the theoretical research results of the geometric function theory.

Keywords: univalent log-harmonic mappings; Bohr radius; growth theorem; estimations

2010 MR Subject Classification: 30C35; 30C45