Vol. 41 ( 2021 )
No. 1

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

# 一类带记忆项的非经典热方程的爆破问题

吴少华, 吴迎东, 程 新
(武汉大学数学与统计学院, 湖北 武汉 430072)

**摘 要**: 本文考虑了一类带记忆项的非经典热方程, 证明解会在有限时间爆破, 而且爆破只会发生在边界. 主要结论是: 首先利用 Green 函数与 Banach 压缩映射定理, 建立了问题的经典解; 其次, 利用经典解, 证明了解是有限时间爆破的; 最后, 证明了一个关于非经典热方程解的性质, 利用这个性质, 证明了解是在边界上爆破的.

**关 键 词**: 非经典热方程; 记忆边界; 爆破
MR(2010) **主题分类号**: 35C15 ; 35K05 **中 图 分 类 号**: O175.2
**文 献 标 识 码**: A **文 章 编 号**: 0255-7797(2021)01-0071-08

## 1 引言

在本文中, 我们考虑如下模型:

$$\begin{cases} v_t = \Delta v + \phi(x) + v, & x \in \Omega, |\phi(x)| \le M, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \vec{n}} = \displaystyle\int_0^t e^{v(x,s)} ds, & x \in \partial\Omega, \\ v(x,0) = 0, & x \in \overline{\Omega}, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界区域, 它的边界 $\partial\Omega \subset C^{1+\mu}(0 < \mu < 1)$, $\vec{n}$ 是单位法向量, 其指向向外.

在过去几十年中, 抛物型方程的研究取得了丰硕的成果, 其中以美国科学院院士 Avner Friedman 为首的数学家, 更是将这一领域的研究推向了极高的水平. 在文献 [1] 中, Friedman 院士利用先验估计证明了抛物组解的可微性, 随后, 他在文献 [2] 中证明了, 各种不同的积分增长条件下, 一般抛物组的唯一性定理. Mizohata[3] 则用半群的方法给出了 Cauchy 问题的存在性, Tychonov[4] 则对热传导方程首先建立了 Cauchy 问题解的唯一性. 在 Friedman 的论文 [5–8] 中, 集中解决了关于抛物型方程的自由边界问题, 即

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t, & 0 < x < s(t), t > 0, \\ u(0,t) = f(t), & 0 \le f(t), t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), & 0 < x \le b, \phi(b) = 0, \\ u(s(t),t) = 0, & 0 < t, s(0) = b, \\ u_x(s(t),t) = -\dfrac{ds(t)}{dt}, & 0 < t, \end{cases} \tag{1.2}$$

*收稿日期: 2020-09-23 接收日期: 2020-11-03
作者简介: 吴少华 (1963–), 男, 湖北汉川, 副教授, 主要研究方向: 偏微分方程. Email:s.h.wu@163.com.
通讯作者: 吴迎东 (1995–), 男, 安徽安庆, 硕士, 主要研究方向: 偏微分方程.

其中 $x=s(t)$ 不是已经给定的边界, 而是和 $u(x,t)$ 一起寻找的自由边界. 在此基础上, 自由边界的问题得到较为充分的研究, Douglas[9] 与 Kyner[10] 则发展了 Friedman 研究自由边界的方法, 考虑了非经典的热方程.

近年来, 学者们则开始研究关于热传导方程带记忆项边界问题的研究 [11, 12], 记忆项即带有时间积分边界条件. 带记忆项的自由边界问题, 有核反应堆动力学相关问题 [13], 人口流动问题 [14]. 关于这类模型的局部 (或整体) 解的存在性, 稳定性, 有限时间爆破都被 Y. Yamada, P. Souplet 和 P. Vernole 等人讨论清楚了.

粘弹性模型中也研究了扩散中的记忆项非牛顿流体中的力 [15], 还有涉及带有记忆项的 Fisher 方程形式的模型的研究 [16, 17]. 在这里需要指出的是, 分数阶时间导数作为记忆算子已经在 D'Arcy 定律和分子传输的记忆形式学中进行了研究 [18], 关于气候模型中扩散和反应, 我们也引入了记忆条件 [19].

有两个原因, 促使我们研究问题 (1.1). 第一, 在文献 [20] 中, 模型 (1.3)

$$\begin{cases} u_t=\Delta u, & x\in\Omega, t>0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}=e^u, & x\in\partial\Omega, t>0, \\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\overline{\Omega}, \end{cases} \tag{1.3}$$

已经被证明, 所有非负解都会在有限时间爆破, 爆破只会发生在边界.

第二, 在文献 [11] 中, 邓铿研究了带记忆边界条件的热方程 (1.4), 证明了解的全局存在性与爆破性质.

$$\begin{cases} u_t=\Delta u, & \text{on} \quad \Omega_T, \\ \nabla u\cdot\vec{n}=u^q\displaystyle\int_0^t u^p(\cdot,s)ds, & \text{on} \quad (\partial\Omega)_T, \\ u=u_0, & \text{on} \quad \overline{\Omega}\times\{0\}, \end{cases} \tag{1.4}$$

式子中, $p\geqslant 0, q\geqslant 0$, and $\Omega_T=\Omega\times(0,T)$, 其中 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^N$ 上的有界区域, 具有光滑的边界 $\partial\Omega$, $\vec{n}$ 是单位法向量, 指向向外. 初始值 $u_0$ 是一个在 $\overline{\Omega}$ 上非负连续的函数. 他的主要结论是：如果 $0\leqslant p+q\leqslant 1$, 则 (1.4) 的解是全局的. 另一方面, 如果 $p+q>1$, 则所有非负, 平凡的解是在有限时间爆破的.

## 2 解的最值性质

在这一节, 我们将证明一个定理, 它将辅助证明定理 4.1, 这个定理刻画的是解的最大值属性, 证明主要通过构造两个函数.

**定理 2.1** 如果 $u(x,t)$ 是 $\overline{\Omega}\times(0,T)(T<1)$ 上的连续函数, 满足

$$\begin{cases} u_t=\Delta u+u, & (x,t)\in\Omega\times(0,T), \\ u\leq\dfrac{C}{(T-t)^q}, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), q>0, \\ u(x,0)=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

则对任意的 $\Omega' \subset\subset \Omega$, 我们有$\sup\{u(x,t);(x,t)\in\Omega'\times(0,T)\}<\infty$.

**证** 不失一般性, 我们认为 $\partial\Omega$ 是光滑的, 且是 $C^2$ 的.

设 $d(x)=dist(x,\partial\Omega)$,$v(x)=d^2(x)$,这里$x\in N_\epsilon(\partial\Omega)$, 其中 $N_\epsilon(\partial\Omega)=\{x\in\Omega,d(x)<\epsilon\}$. 因为边界 $\partial\Omega$ 是 $C^2$ 的, 所以只要 $\epsilon$ 充分小, 则函数 $v(x)\in C^2\overline{N_\epsilon(\partial\Omega)}$. 由于 $|\nabla d(x)|=1,|\nabla v|^2=4d^2(x)|\nabla d|^2,\Delta v=2d(x)\Delta d+2(\nabla d(x))^2$, 从而在边界 $\partial\Omega$ 上 $\Delta v-\frac{(q+1)|\nabla v|^2}{v}=2-4(q+1)$. 因为 $v(x)\in C^2\overline{N_\epsilon(\partial\Omega)}$, 如果 $\epsilon_0$ 充分小, 则在 $\overline{N_{\epsilon_0}(\partial\Omega)}$ 上, 我们有

$$\Delta v-\frac{(q+1)|\nabla v|^2}{v}>-4(q+1).$$

接下来, 我们将 $v(x)$ 的定义域延拓到 $\overline{\Omega}$ 上, 使得 $v\in C^2(\overline{\Omega})$, 而且在 $\overline{\Omega\backslash N_{\epsilon_0}\partial\Omega}$ 上 $0<c_0\le v$. 那么, 在 $\overline{\Omega}$ 上, 对于某些 $C^*>0$, 我们可以得到,

$$\Delta v-\frac{(q+1)|\nabla v|^2}{v}>-C^*.$$

设 $w(x,t)=\frac{C_1 t}{[v(x)+C^*(T-t)]^q}$, 于是有

$$w_t-\Delta w-w=w(\frac{1}{t}-1)+\frac{C_1 qt}{[v+C^*(T-t)]^{q+1}}(C^*+\Delta v-\frac{(q+1)|\nabla v|^2}{v+C^*(T-t)})>0.$$

如果 $C_1$ 充分大, 使得 $(C^*)^q\le C_1 t$, 那么根据比较原理, 我们有 $u(x,t)\le w(x,t)$, 而且

$$\sup\{u(x,t);(x,t)\in\Omega'\times[0,T)\}\le C_1\sup\{\frac{1}{v(x)^q};x\in\Omega'\}<\infty.$$

## 3 有限时间爆破

下面, 我们通过格林函数方法构造一个关于 $v(x,t)$ 的表达式, 然后利用 Banach 不动点定理, 我们可以证明该表达式是问题 (1.1) 的局部经典解.

**定理 3.2** 设 $G_N(x,y,t,\tau)$ 是表示带有齐次 Neumann 边界条件的热方程的格林函数, 则在问题 (1.1) 的条件下我们有：

$$\Gamma[v](x,t)=\int_0^t\int_{\partial\Omega}G_N(x,y,t,\tau)\int_0^\tau e^{v(y,s)}dsdS_y d\tau+\int_0^t\int_\Omega G_N(x,y,t,\tau)(\phi(x)+v)dyd\tau \tag{3.1}$$

对较小的 $t$ 是一个压缩映射.

**证** 根据文献 [21], 令

$$\kappa(t)=\sup_{\overline{\Omega},0\le\tau\le t}\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}G_N(x,y,\tau,\eta)dS_y d\eta,\quad \varpi(t)=\sup_{\overline{\Omega},0\le\tau\le t}\int_0^\tau\int_\Omega G_N(x,y,\tau,\eta)dS_y d\eta.$$

取定 $\widehat{T} < \epsilon_0$ 且 $M > 0$, 使得

$$\max\left\{e^M \widehat{T} k(\widehat{T}), M^m \varpi(\widehat{T})\right\} \leq \frac{M}{3}.$$

根据文献 [14], 对任意的 $\epsilon_0, \widetilde{C_0}, \widetilde{C} > 0$, 取 $t < \epsilon_0$, 有 $\kappa(t) \leq 2\widetilde{C_0}\sqrt{t}, \varpi(t) \leq \widetilde{C}t$. 若 $|v| \leq M, 0 < t \leq \widehat{T} < 1$, 则

$$\begin{aligned}|\Gamma[v]| \leq & \left|\int_0^t \int_{\partial\Omega} G_N(x,y,t,\tau) \int_0^\tau e^{v(y,s)} ds dS_y d\tau\right| + \left|\int_0^t \int_\Omega G_N(x,y,t,\tau)(\phi(x)+v) dy d\tau\right| \\ \leq & \frac{M}{3} + \frac{2M}{3} = M.\end{aligned}$$

因此, $\Gamma$ 是 $\chi$ 到自身的一个映射, 其中 $\chi = \left\{v \in C(\overline{\Omega} \times [0, \widehat{T}]) : \|v\|_\infty \leq M\right\}$. 对任意的 $v_1, v_2 \in \chi$, 我们有

$$\begin{aligned}&\|\Gamma[v_1] - \Gamma[v_2]\|_\infty \\ \leq & \left|\int_0^t \int_{\partial\Omega} G_N(x,y,t,\tau) \int_0^\tau e^{v_1(y,s)} ds dS_y d\tau - \int_0^t \int_{\partial\Omega} G_N(x,y,t,\tau) \int_0^\tau e^{v_2(y,s)} ds dS_y d\tau\right| \\ & + \left|\int_0^t \int_\Omega G_N(x,y,t,\tau)(v_1(y,\tau) - v_2(y,\tau)) dy d\tau\right| \\ = & \left|\int_0^t \int_{\partial\Omega} G_N(x,y,t,\tau) \int_0^\tau (v_1(y,\tau) - v_2(y,\tau)) e^{v(y_0,s)} ds dS_y d\tau\right| \\ & + \left|\int_0^t \int_\Omega G_N(x,y,t,\tau)(v_1(y,\tau) - v_2(y,\tau)) dy d\tau\right| \\ \leq & (\widetilde{C}\widehat{T} + 2\widetilde{C_0}\widehat{T} e^M)\|v_1 - v_2\|_\infty.\end{aligned}$$

取 $\widehat{T} < \min\left\{1/(\widetilde{C} + 2\widetilde{C_0} e^M), 1, \epsilon_0\right\}$, 则存在 $0 < \alpha < 1$, 使得 $\|\Gamma[v_1] - \Gamma[v_2]\|_\infty \leq \alpha\|v_1 - v_2\|_\infty$, 所以 $\Gamma$ 是一个压缩映射. 于是, 我们可以得到一个局部的经典解:

$$\begin{aligned}v(x,t) = & \int_0^t \int_{\partial\Omega} G_N(x,y,t,\tau) \int_0^\tau e^{v(y,s)} ds dS_y d\tau \\ & + \int_0^t \int_\Omega G_N(x,y,t,\tau)(\phi(x)+v) dy d\tau.\end{aligned} \tag{3.2}$$

**定理 3.3** 问题 (1.1) 的非负, 非平凡解在有限时间内爆破.

**证** 后文中, 在不引起任何混淆的情况下. 我们使用 $c_i$ 或 $C_i (i = 0, 1, 2, ...)$ 表示各种正常数. 如文献 [22] 中所示, 我们有

$$\int_{\partial\Omega} G_N(x,y,t,\tau) dS_x \geq c_0 \quad 其中 y \in \overline{\Omega}, t > \tau \geq 0. \tag{3.3}$$

根据 (3.2), (3.3) 和詹森不等式得到

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} v(x,t)dS_x &\ge \int_{\partial\Omega}\left(\int_0^t\int_{\partial\Omega} G_N(x,y,t,\tau)\int_0^\tau e^{v(y,s)}dsdS_yd\tau\right)dS_x\\ &\ge c_0\int_0^t\int_0^\tau\int_{\partial\Omega} e^{v(y,s)}dS_ydsd\tau\\ &\ge c_1\int_0^t\int_0^\tau e^{\int_{\partial\Omega} v(y,s)dS_y}dsd\tau. \end{aligned}\tag{3.4}$$

另一方面, 根据 (3.2), (3.3), 我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Omega} v(x,t)dS_x\\ \ge&\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^t\int_\Omega G_N(x,y,t,\tau)\phi(y)dyd\tau\right)dS_x=\int_0^t\int_\Omega\phi(y)\left(\int_{\partial\Omega} G_N(x,y,t,\tau)dS_x\right)dyd\tau\\ \ge& c_0\int_0^t\int_\Omega\phi(y)dyd\tau=c_0t\int_\Omega\phi(y)dy\ge c_2t,\end{aligned}\tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Omega} v(x,t)dS_x\\ \ge&\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^t\int_\Omega G_N(x,y,t,\tau)v(y,\tau)dyd\tau\right)dS_x=\int_0^t\int_\Omega v(y,\tau)\left(\int_{\partial\Omega} G_N(x,y,t,\tau)dS_x\right)dyd\tau\\ \ge& c_0\int_0^t\int_\Omega v(y,\tau)dyd\tau\ge c_3tK(t),\end{aligned}\tag{3.6}$$

其中 $K(t)=\int_{\partial\Omega} v(x,t)dS_x$. 结合 (3.2), (3.4), (3.5), (3.6) 得到

$$K(t)\ge\frac{c_2t}{1-c_3t}+\frac{c_1}{1-c_3t}\int_0^t\int_0^\tau e^{K(s)}dsd\tau\quad t>0,$$

令 $\widetilde{c_2}(t)=\dfrac{c_2}{1-c_3t},\widetilde{c_1}(t)=\dfrac{c_1}{1-c_3t}$, 现在用反证法证明.

假设问题 (1.1) 有全局解 $v$, 则对任意的正数 $T$, 有 $K(t)\ge\widetilde{c_2}(T)T+\widetilde{c_1}(T)\int_T^t\int_T^\tau e^{K(s)}dsd\tau$, $T\le t\le 2T$. 因此, 在区间 $[T,2T]$ 上 $K(t)\ge k(t)$, 其中

$$k(t)=\widetilde{c_2}(T)T+\widetilde{c_1}(T)\int_T^t\int_T^\tau e^{k(s)}dsd\tau,\qquad T\le t\le 2T.$$

显然, $k(t)$ 满足

$$\begin{cases}k^{''}(t)=\widetilde{c_1}(T)e^{k(t)}, & T<t<2T,\\ k(T)=\widetilde{c_2}(T)T, & k^{'}(T)=0.\end{cases}\tag{3.7}$$

将 (3.7) 中的方程乘以 $k^{'}(t)$ 并从 $T$ 到 $t$ 积分, 我们得到

$$k^{'}(t)=\sqrt{\frac{2c_1}{1-c_3T}}\left[e^{k(t)}-e^{k(T)}\right]^{1/2}.$$

令 $c=\ln 2+\widetilde{c_2}(T)T, c_4=\sqrt{\dfrac{2c_1}{1-c_3T}}$, 将上述等式在区间 $[T,2T]$ 上积分, 得到

$$\begin{aligned}c_4T&=\int_{k(T)}^{k(2T)}\frac{dz}{\sqrt{e^z-e^{k(T)}}}\le\int_{\widetilde{c_2}(T)T}^{c}\frac{dz}{\sqrt{e^z-e^{\widetilde{c_2}(T)T}}}+\int_c^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{e^z-e^{\widetilde{c_2}(T)T}}}\\&\le\frac{1}{\sqrt{e^{\widetilde{c_2}(T)T}}}\int_{\widetilde{c_2}(T)T}^{c}\frac{dz}{\sqrt{z-\widetilde{c_2}(T)T}}+\sqrt{2}\int_c^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{e^z}}\\&=\frac{2}{\sqrt{e^{\widetilde{c_2}(T)T}}}\sqrt{\ln 2}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{e^c}}=\frac{2}{\sqrt{e^{\widetilde{c_2}(T)T}}}\left(\sqrt{\ln 2}+1\right),\end{aligned}$$

或等价的

$$\sqrt{\frac{2c_1}{1-c_3T}}T\sqrt{e^{\widetilde{c_2}(T)T}}\le 2\left(\sqrt{\ln 2}+1\right). \tag{3.8}$$

对于足够大的 T, 不等式 (3.8) 产生矛盾.

## 4 边界爆破

在文献 [10] 中表明, 对于带有记忆边界条件的热方程 $\partial u/\partial\vec{n}=\int_0^t u^p(x,s)ds\quad(p>1)$, 仅在边界上发生爆破. 基于更一般的思想, 在本节中, 我们证明了对于问题 (1.1), 在区域的内部不会发生爆破. 为了确定起见, 我们假定 $T$ 为爆破时间.

**定理 4.4** 对于任何非平凡, 非负的初始值, 问题 (1.1) 的解只可能在边界上爆破.

**证** 令 $J(t)=\int_0^t\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}e^{v(y,s)}dS_ydsd\tau$, 由 (3.4), 有 $\int_{\partial\Omega}v(y,t)dS_y\ge c_0J(t)$, 由詹森不等式推出 $J^{''}(t)=\int_{\partial\Omega}e^{v(y,t)}dS_y\ge c_4e^{c_0J(t)}$. 将上述不等式乘以 $J^{'}(t)$, 并在 $(0,t)$ 上积分, 我们得到

$$J^{'}(t)\ge c_5\sqrt{e^{c_0J(t)}-1}.$$

将上式在 $(t,T)$ 上积分, 得到

$$\int_{c_0J(t)}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{e^z-1}}\ge c_6(T-t).$$

由 $e^z-1\ge z^4/24$, $\frac{1}{c_0J(t)}=\int_{c_0J(t)}^{\infty}\frac{dz}{z^2}\ge c_7(T-t)$, 或等价的

$$J(t)=\frac{C_0}{T-t}. \tag{4.1}$$

取 $\Omega^{'}\subset\subset\Omega$, 满足 $d(\partial\Omega,\Omega^{'})=\epsilon>0$, 对于这样的 $\Omega^{'}$, 我们再取 $\Omega^{''}\subset\subset\Omega$, 满足 $\Omega^{'}\subset\subset$

$\Omega^{''}, d(\partial\Omega^{''}, \Omega^{'}) \geq \epsilon/3, d(\partial\Omega, \Omega^{'}) \geq \epsilon/3$, 对 $\forall \epsilon > 0$, 下式成立

$$0 \leq G_N(x, y, t, \tau) \leq C_\epsilon, \quad |x - y| \geq \frac{\epsilon}{3}, x, y \in \overline{\Omega}, 0 < \tau < t < T. \tag{4.2}$$

根据 (3.2), (4.1), (4.2) 得到

$$\max_{\overline{\Omega''}} v(x, t) \leq C_1 T + C_\epsilon J(t) \leq \frac{C_2}{T - t}.$$

根据定理 2.1, 我们得到

$$v(x, t) \leq \frac{C_3}{[\psi(X) + C_4(T - t)]}, \quad \overline{\Omega''} \times [0, T). \tag{4.3}$$

对于某些 $C_4 > 0$, 我们的 $\psi \in C_2(\overline{\Omega''})$ 满足

$$\begin{cases} \psi > 0, & x \in \Omega^{''}, \\ \psi = 0, & x \in \partial\Omega^{''}, \\ \Delta\psi - \frac{2|\nabla\psi|^2}{\psi} \geq -C_4, & x \in \Omega^{''}. \end{cases} \tag{4.4}$$

不等式 (4.3) 表明在 $\overline{\Omega^*} \times (0, T)$ 内, $v(x, t)$ 不会发生爆破. 其中 $\Omega^* \subset\subset \Omega^{''}$, 满足 $\Omega^{'} \subset\subset \Omega^*, d(\partial\Omega^*, \Omega^{'}) \geq \epsilon/9, d(\partial\Omega^{''}, \Omega^*) \geq \epsilon/9$, 特别的

$$v(x, t) \leq C_5, \quad x \in \partial\Omega^*, \quad 0 < t < T. \tag{4.5}$$

## 参 考 文 献


[1] Friedman Avner. Interior estimates for parabolic systems of partial differential equations[J]. Journal of Mathematics and Mechanics, 1958, 7(3): 393–417 .

[2] Friedman Avner. On the uniqueness of the cauchy problem for parabolic equations[J]. American Journal of Mathematics, 1959, 81(2): 503–511.

[3] Mizohata Sigeru. Le problème de cauchy pour les équations paraboliques[J]. Journal of the Mathematical Society of Japan, 1956, 8(4): 269–299.

[4] Tychonoff A N. A uniqueness theorem for the heat equation[J]. Mat. Sb., 1935, 42(1): 199–216.

[5] Friedman Avner. Free boundary problems for parabolic equations i. melting of solids[J]. Journal of Mathematics and Mechanics, 1959, 8(4): 499–517.

[6] Friedman Avner. Free boundary problems for parabolic equations ii. evaporation or condensation of a liquid drop[J]. Journal of Mathematics and Mechanics, 1960, 9(1): 19–66.

[7] Friedman Avner. Remarks on stefan-type free boundary problems for parabolic equations[J]. Journal of Mathematics and Mechanics, 1960, 9(6): 885–903.

[8] Friedman Avner. Free boundary problems for parabolic equations iii. dissolution of a gas bubble in liquid[J]. Journal of Mathematics and Mechanics, 1960, 9(3): 327–345.

[9] Douglas Jim. A uniqueness theorem for the solution of a stefan problem[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1957, 8(2): 402–408.

[10] Kyner W T. An existence and uniqueness theorem for a nonlinear stefan problem[J]. Journal of Mathematics and Mechanics, 1959, 8(4): 483–498.
[11] Anderson Jeffrey, Deng Keng, Dong Zhihua. Global solvability for the heat equation with boundary flux governed by nonlinear memory[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 2011, 69(4): 759–770.
[12] Deng Keng, Wang Qian. Blow-up rate for the heat equation with a memory boundary condition[J]. Applicable Analysis, 2015, 94(2): 308–317.
[13] CV Pao. Solution of a nonlinear integrodifferential system arising in nuclear reactor dynamics[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1974, 48(2): 470–492.
[14] Aleksandr Kozhanov Ivanovich. Parabolic equations with nonlocal nonlinear source[J]. Siberian Mathematical Journal, 1994, 35(5): 945–956.
[15] Grasselli Maurizio, Pata Vittorino. A reaction-diffusion equation with memory[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2006, 15(4): 1079.
[16] Araújo A, Ferreira JAf, Oliveira P de. The effect of memory terms in diffusion phenomena[J]. Journal of Computational Mathematics, 2006, 24(1): 91–102.
[17] Araújo A, Ferreira JA, Oliveira P de. Qualitative behavior of numerical traveling solutions for reaction–diffusion equations with memory[J]. Applicable Analysis, 2005, 84(12): 1231–1246.
[18] Caputo Michele. 3-dimensional physically consistent diffusion in anisotropic media with memory[J]. Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, 1998, 9(2): 131–143.
[19] Hetzer Georg. A quasilinear functional reaction-diffusion equation from climate modeling[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 1997, 30(5): 2547–2556.
[20] Julián López Gómez, Márquez Viviana, Wolanski Noemí. Blow up results and localization of blow up points for the heat equation with a nonlinear boundary condition[J]. Journal of Differential Equations, 1991, 92(2): 384–401.
[21] Deng Keng, Man Kam Kwong, A Howard Levine. The influence of nonlocal nonlinearities on the long time behavior of solutions of burgers equation[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1992, 50(1): 173–200.
[22] Hu Bei, Ming Yin Hong. Critical exponents for a system of heat equations coupled in a non-linear boundary condition[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 1996, 19(14): 1099–1120.

# BLOW-UP PROBLEM FOR A CLASS OF NON-CLASSICAL HEAT EQUATION WITH MEMORY TERM

WU Shao-hua, WU Ying-dong, CHENG Xin

(*Department of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China*)

**Abstract:** In this article, we consider a non-classical heat equation with a memory boundary condition. We have proved that our solutions blow-up in the finite time, and blow-up only occur on the boundary. Firstly, we construct the classical solution by using the Green function and Banach fixed point theorem.And then we prove the solution blow-up in the finite time. Lastly, we prove the solution only occur on the boundary by using the theorem 2.1.

**Keywords:** non-classical heat equation; memory boundary condition; blow-up

**2010 MR Subject Classification:** 35C15; 35K05