

测度微分方程的 Lipschitz 稳定性

李宝麟, 席 娅

(西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州 730070)

摘 要: 本文研究了测度微分方程的 Lipschitz 稳定性问题. 利用广义常微分方程的 Lipschitz 稳定性结果, 在测度微分方程等价于广义常微分方程的基础上, 获得了测度微分方程的变差一致 Lipschitz 稳定性与一致整体 Lipschitz 稳定性定理, 是对测度微分方程稳定性理论的实质性推广.

关键词: 测度微分方程; 广义常微分方程; Lipschitz 稳定性; 变差一致 Lipschitz 稳定性; 一致整体 Lipschitz 稳定性

MR(2010) 主题分类号: 34D10; 34D20; 34D23

中图分类号: O175.12

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2020)05-0600-11

1 引言

当常微分方程 $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$ 所描述的系统受到扰动时, 对受到扰动的系统导出的常微分方程形式如下

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) + g(x, t).$$

如果扰动项 $g(x, t)$ 是连续可积的, 那么受扰动之后的系统仍旧是常微分方程, 它的解仍旧是连续的, 如果扰动项是脉冲型的, 那么扰动之后系统的状态就不会随着时间连续变化而变化, 而是呈现出一种瞬时状态. 为了研究这类问题, 我们对上述方程加上一种脉冲型的扰动, 这就给出如下形式的方程

$$Dx = f(x, t) + g(x, t)Du, \quad (1.1)$$

其中 Dx 和 Du 分别表示函数 x 和 u 的分布导数. 形如 (1.1) 的方程叫做测度微分方程. 由于测度微分方程的解没有连续性, 又没有随机系统那么复杂, 因此, 我们可以说测度微分方程是一种不同于经典不连续系统的新的不连续系统. 测度微分方程已经被很多学者研究 (见文献 [1-4]).

在文 [5] 中 Dannan 和 Elaydi 研究了常微分方程的 Lipschitz 稳定性; 文 [6] 中作者讨论了一类脉冲微分系统的 Lipschitz 稳定性; 文 [7] 中作者给出了脉冲泛函微分方程的 Lipschitz 稳定性; 文 [8] 中作者建立了广义常微分方程的变差一致 Lipschitz 稳定性, 一致 Lipschitz 稳定性和一致整体 Lipschitz 稳定性, 并通过滞后型脉冲微分方程在一定条件下与广义常微分方程的等价关系, 讨论了滞后型脉冲微分方程的 Lipschitz 稳定性. 本文是在文 [8] 的基础上, 通过测度微分方程与广义常微分方程的等价关系, 定义了测度微分方程

$$Dx = f(x, t)Dg(t) \quad (1.2)$$

*收稿日期: 2019-12-23

接收日期: 2020-06-19

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11761063).

作者简介: 李宝麟 (1963-), 男, 甘肃天水, 教授, 主要研究方向: 常微分方程与动力系统.

和扰动后的测度微分方程

$$Dx = f(x, t)Dg(t) + p(t) \quad (1.3)$$

的变差一致 Lipschitz 稳定性, 一致 Lipschitz 稳定性和一致整体 Lipschitz 稳定性, 并建立了测度微分方程和扰动后的测度微分方程的 Lipschitz 稳定性定理. 方程 (1.2) 和方程 (1.3) 的等价方程为

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x(s), s)dg(s), \quad t \in [t_0, +\infty) \quad (1.4)$$

和

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x(s), s)dg(s) + \int_{t_0}^t p(s)ds, \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (1.5)$$

其中 $f: B_c \times [t_0, +\infty) \rightarrow R^n$, $B_c = \{y \in R^n, \|y\| < c\}$, $g: [t_0, +\infty) \rightarrow R$, $p: [t_0, +\infty) \rightarrow R^n$ 是比 Lebesgue-Stieltjes 可积更广泛的 Kurzweil-Henstock-Stieltjes 可积函数和 Kurzweil-Henstock 可积函数 (见文 [10]).

函数 $x: [a, b] \rightarrow R^n$ 为 $[a, b]$ 上的正则函数是指若函数 x 的左右极限

$$x(t+) = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} x(t+\sigma), \quad t \in [a, b), \quad x(t-) = \lim_{\sigma \rightarrow 0^-} x(t+\sigma), \quad t \in (a, b]$$

分别存在且有限 (正则函数在有限区间上有界, 在无穷区间上不一定有界). 记 $G^*([a, b], R^n)$, $[a, b] \subset [t_0, +\infty)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的正则函数全体, 并且是左连续的. $G^*([t_0, +\infty), R^n)$ 为关于函数 $x: [t_0, +\infty) \rightarrow R^n$ 的一个向量空间, 使得对所有 $[a, b] \subset [t_0, +\infty)$, $x|_{[a, b]}$ 属于空间 $G^*([a, b], R^n)$. $G_0^*([t_0, +\infty), R^n)$ 是关于所有 $x \in G^*([t_0, +\infty), R^n)$ 的一个向量空间, 使得

$$\sup_{s \in [t_0, +\infty)} e^{-(s-t_0)} \|x(s)\| < +\infty.$$

在 $G_0^*([t_0, +\infty), R^n)$ 上定义范数

$$\|x\|_{[t_0, +\infty)} = \sup_{s \in [t_0, +\infty)} e^{-(s-t_0)} \|x(s)\|, \quad x \in G_0^*([t_0, +\infty), R^n),$$

$G_0^*([t_0, +\infty), R^n)$ 为 Banach 空间.

记 $\Omega = B_c \times [t_0, +\infty)$, 本文假定函数 $f: \Omega \rightarrow R^n$, $g: [t_0, +\infty) \rightarrow R$, $p: [t_0, +\infty) \rightarrow R^n$ 满足下列条件

(H₁) 函数 $g: [t_0, +\infty) \rightarrow R$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上是不减的左连续函数.

(H₂) 对每一个 $x \in G^*([t_0, +\infty), R^n)$, $s_1, s_2 \in [t_0, +\infty)$, Kurzweil-Henstock-Stieltjes 积分 $\int_{s_1}^{s_2} f(x(t), t)dg(t)$ 存在.

(H₃) 存在一个关于 g 的局部 Kurzweil-Henstock-Stieltjes 可积函数 $M: [t_0, +\infty) \rightarrow R^+$, 使得对任意的 $x \in G^*([t_0, +\infty), R^n)$, $s_1, s_2 \in [t_0, +\infty)$, $s_1 < s_2$,

$$\left\| \int_{s_1}^{s_2} f(x(s), s)dg(s) \right\| \leq \int_{s_1}^{s_2} M(s)dg(s).$$

(H₄) 存在一个关于 g 的局部 Kurzweil-Henstock-Stieltjes 可积函数 $L: [t_0, +\infty) \rightarrow R^+$, 使得对任意的 $x, z \in G_0^*([t_0, +\infty), R^n)$, $s_1, s_2 \in [t_0, +\infty)$, $s_1 < s_2$,

$$\left\| \int_{s_1}^{s_2} [f(x(s), s) - f(z(s), s)]dg(s) \right\| \leq \|x - z\|_{[t_0, +\infty)} \int_{s_1}^{s_2} L(s)dg(s).$$

(H₅) 对每一个 $x \in G^*([t_0, +\infty), R^n)$, $s_1, s_2 \in [t_0, +\infty)$, Kurzweil-Henstock 积分 $\int_{s_1}^{s_2} p(t)dt$ 存在.

(H₆) 存在一个局部 Kurzweil-Henstock 可积函数 $N : [t_0, +\infty) \rightarrow R^+$, 使得对任意的 $x \in G^*([t_0, +\infty), R^n)$, $s_1, s_2 \in [t_0, +\infty)$, $s_1 < s_2$,

$$\left\| \int_{s_1}^{s_2} p(s)ds \right\| \leq \int_{s_1}^{s_2} N(s)ds.$$

本文主要分为三个部分. 第二部分给出了本文所需要的一些定义和引理, 第三部分定义了测度微分方程和扰动后的测度微分方程的变差一致 Lipschitz 稳定性, 一致 Lipschitz 稳定性和一致整体 Lipschitz 稳定性, 并建立了测度微分方程和扰动后的测度微分方程的 Lipschitz 稳定性定理.

2 预备知识

本节介绍了广义常微分方程的相关定义和引理及测度微分方程与广义常微分方程的等价关系.

定义 2.1 ^[9] 称函数 $U : [a, b] \times [a, b] \rightarrow R^n$ 在区间 $[a, b]$ 上 Kurzweil 可积, 如果存在 $I \in R^n$, 使得对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正值函数 $\delta : [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$, 使得对 $[a, b]$ 上的任何 $\delta(\tau)$ -精细分划 $D = \{(\tau_j, [\alpha_{j-1}, \alpha_j]), j = 1, 2, \dots, k\}$, 其中 $\tau_j \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j] \subset [\tau_j - \delta(\tau_j), \tau_j + \delta(\tau_j)]$, 有

$$\left\| \sum_{j=1}^k [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})] - I \right\| < \varepsilon,$$

称 I 为 U 在 $[a, b]$ 上的 Kurzweil 积分, 记作 $I = \int_a^b DU(\tau, t)$. 特别地, 当 $U(\tau, t) = f(\tau)g(t)$ 时, $\int_a^b DU(\tau, t) = \int_a^b f(s)dg(s)$.

定义 2.2 ^[9] 设函数 $F : \Omega \rightarrow R^n$, 如果对所有 $t \in [\alpha, \beta]$, $(x(t), t) \in \Omega$, 且对任意的 $s_1, s_2 \in [\alpha, \beta]$, 有等式 $x(s_2) - x(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} DF(x, t)$ 成立, 则称 $x : [\alpha, \beta] \rightarrow R^n$ 是广义常微分方程

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x, t) \quad (2.1)$$

在区间 $[\alpha, \beta] \subset [t_0, +\infty)$ 上的解.

定义 2.3 ^[9] 设不减函数 $h : [t_0, +\infty) \rightarrow R$, 函数 $F : \Omega \rightarrow R^n$ 属于函数族 $\mathcal{F}(\Omega, h)$, 是指 F 满足以下条件: 对任意的 $(x, s_1), (x, s_2) \in \Omega$, 有

$$\|F(x, s_2) - F(x, s_1)\| \leq |h(s_2) - h(s_1)|, \quad (2.2)$$

且对任意的 $(x, s_1), (x, s_2), (y, s_1), (y, s_2) \in \Omega$, 有

$$\|F(x, s_2) - F(x, s_1) - F(y, s_2) + F(y, s_1)\| \leq \|x - y\| |h(s_2) - h(s_1)|. \quad (2.3)$$

引理 2.1 ^[9] 设 $F : \Omega \rightarrow R^n$ 满足 (2.2) 式, 如果 $x : [\alpha, \beta] \rightarrow R^n$, $[\alpha, \beta] \subset [t_0, +\infty)$ 是方程 (2.1) 的一个解, 则 x 在 $[\alpha, \beta]$ 上有界变差, 且 $\text{var}_\alpha^\beta x \leq h(\beta) - h(\alpha) < +\infty$, 并且在 $[\alpha, \beta]$ 上 x 与函数 h 具有相同的连续性, 其中 $\text{var}_\alpha^\beta x$ 表示 x 在 $[\alpha, \beta]$ 上的全变差.

引理 2.2^[10] 假设 $f: \Omega \rightarrow R^n$ 满足条件 $(H_2), (H_3), (H_4)$, 并且 $g: [t_0, +\infty) \rightarrow R$ 满足条件 (H_1) , 对任意的 $\tau_0 \in [t_0, +\infty)$, 并且定义函数 $F: \Omega \rightarrow R^n$ 为

$$F(x, t) = \int_{\tau_0}^t f(x(s), s) dg(s), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (2.4)$$

则 $F \in \mathcal{F}(\Omega, h)$, 其中 $h: [t_0, +\infty) \rightarrow R$ 是不减的左连续函数, 且

$$h(t) = \int_{\tau_0}^t (M(s) + L(s)) dg(s), \quad t \in [t_0, +\infty).$$

引理 2.3^[11] 假设 $f: \Omega \rightarrow R^n$ 满足条件 $(H_2), (H_3), (H_4)$, 并且 $g: [t_0, +\infty) \rightarrow R$ 满足条件 (H_1) , 且 $p: [t_0, +\infty) \rightarrow R^n$ 满足条件 (H_5) 和 (H_6) , 对任意的 $\tau_0 \in [t_0, +\infty)$, 并且定义函数 $G: \Omega \rightarrow R^n$ 为

$$G(x, t) = \int_{\tau_0}^t f(x(s), s) dg(s) + \int_{\tau_0}^t p(s) ds, \quad (x, t) \in \Omega, \quad (2.5)$$

则 $G \in \mathcal{F}(\Omega, h)$, 其中 $h: [t_0, +\infty) \rightarrow R$ 是不减的左连续函数, 且

$$h(t) = \int_{\tau_0}^t (M(s) + L(s)) dg(s) + \int_{\tau_0}^t N(s) ds, \quad t \in [t_0, +\infty).$$

引理 2.4^[10] 假设 $f: \Omega \rightarrow R^n$ 满足条件 $(H_2), (H_3), (H_4)$, 并且 $g: [t_0, +\infty) \rightarrow R$ 满足条件 (H_1) , 如果函数 $x: [a, b] \rightarrow R^n, [a, b] \subset [t_0, +\infty)$ 是测度微分方程 (1.2) 的解, 当且仅当 x 是广义常微分方程

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x, t) \quad (2.6)$$

在 $[a, b]$ 上的解, 其中函数 F 由 (2.4) 式给定.

引理 2.5^[11] 假设 $f: \Omega \rightarrow R^n$ 满足条件 $(H_2), (H_3), (H_4)$, 并且 $g: [t_0, +\infty) \rightarrow R$ 满足条件 (H_1) , 且 $p: [t_0, +\infty) \rightarrow R^n$ 满足条件 (H_5) 和 (H_6) , 如果函数 $x: [a, b] \rightarrow R^n, [a, b] \subset [t_0, +\infty)$ 是测度微分方程 (1.3) 的解, 当且仅当 x 是广义常微分方程

$$\frac{dx}{d\tau} = DG(x, t) \quad (2.7)$$

在 $[a, b]$ 上的解, 其中函数 G 由 (2.5) 式给定.

引理 2.6^[9] 设 $F \in \mathcal{F}(\Omega, h)$, 假设 $x: [\alpha, \beta] \rightarrow R^n, [\alpha, \beta] \subset [t_0, +\infty)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上是有界变差函数, 使得对每一个 $s \in [\alpha, \beta], (x(s), s) \in \Omega$, 则积分 $\int_{\alpha}^{\beta} DF(x(\tau), t)$ 存在.

引理 2.7^[9] 设 $F \in \mathcal{F}(\Omega, h)$, 假设 $V: [t_0, +\infty) \times R^n \rightarrow R^+$ 是使得对任意的 $y \in R^n$, 函数 $V(\cdot, y): [t_0, +\infty) \rightarrow R^+$ 在 $(t_0, +\infty)$ 上是左连续的, 假设以下条件成立

- (i) 对任意的 $(t, x), (t, y) \in [t_0, +\infty) \times R^n$, 常数 $L > 0$, 有 $|V(t, x) - V(t, y)| \leq L\|x - y\|$.
- (ii) 存在一个实函数 $\Phi: R^n \rightarrow R$, 使得对于广义常微分方程 (2.6) 在区间 $(a, b) \subset [t_0, +\infty)$ 上的每一个解 $y: (a, b) \rightarrow R^n$, 对于 $t \in (a, b)$, 有

$$\limsup_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{V(t + \eta, y(t + \eta)) - V(t, y(t))}{\eta} \leq \Phi(y(t)). \quad (2.8)$$

若 $\bar{y} : [\alpha, \beta] \rightarrow R^n, t_0 \leq \alpha < \beta < +\infty$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的有界变差函数, 并且在 $(\alpha, \beta]$ 上是左连续的, 则不等式

$$V(\beta, \bar{y}(\beta)) - V(\alpha, \bar{y}(\alpha)) \leq \text{Lvar}_\alpha^\beta[\bar{y}(s) - \int_\alpha^s DF(\bar{y}(\tau), t)] + B(\beta - \alpha)$$

成立, 其中 $B = \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \Phi(\bar{y}(t))$, F 由 (2.4) 式给定.

引理 2.8 [9] 设 $G \in \mathcal{F}(\Omega, h)$, 假设 $V : [t_0, +\infty) \times R^n \rightarrow R^+$ 是使得对任意的 $y \in R^n$, 函数 $V(\cdot, y) : [t_0, +\infty) \rightarrow R^+$ 在 $(t_0, +\infty)$ 上是左连续的, 假设以下条件成立:

- (i) 对任意的 $(t, x), (t, y) \in [t_0, +\infty) \times R^n$, 常数 $L > 0$, 有 $|V(t, x) - V(t, y)| \leq L\|x - y\|$.
- (ii) 存在一个实函数 $\Phi : R^n \rightarrow R$, 使得对于广义常微分方程 (2.7) 在区间 $(a, b) \subset [t_0, +\infty)$ 上的每一个解 $y : (a, b) \rightarrow R^n$, 对于 $t \in (a, b)$, 有

$$\limsup_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{V(t + \eta, y(t + \eta)) - V(t, y(t))}{\eta} \leq \Phi(y(t)). \quad (2.9)$$

若 $\bar{y} : [\alpha, \beta] \rightarrow R^n, t_0 \leq \alpha < \beta < +\infty$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的有界变差函数, 并且在 $(\alpha, \beta]$ 上是左连续的, 则不等式

$$V(\beta, \bar{y}(\beta)) - V(\alpha, \bar{y}(\alpha)) \leq \text{Lvar}_\alpha^\beta[\bar{y}(s) - \int_\alpha^s DG(\bar{y}(\tau), t)] + B(\beta - \alpha)$$

成立, 其中 $B = \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \Phi(\bar{y}(t))$, G 由 (2.5) 式给定.

3 主要结果

本节定义了测度微分方程 (1.2) 及扰动后的测度微分方程 (1.3) 的变差一致 Lipschitz 稳定性, 一致 Lipschitz 稳定性和一致整体 Lipschitz 稳定性. 利用广义常微分方程的 Lipschitz 稳定性结果给出了测度微分方程的变差一致 Lipschitz 稳定性, 一致整体 Lipschitz 稳定性定理及其证明.

定义 3.1 测度微分方程 (1.2) 的平凡解 $x \equiv 0$ 是变差一致 Lipschitz 稳定的, 若存在 $A > 0$, 以及 $\delta > 0$, 使得若 $\bar{x} : [\alpha, \beta] \rightarrow B_c, t_0 \leq \alpha < \beta < +\infty$ 是 $[\alpha, \beta]$ 上的有界变差函数, 并且在 $(\alpha, \beta]$ 上左连续, 当 $\|\bar{x}(\alpha)\| < \delta$ 和

$$\text{var}_\alpha^\beta[\bar{x}(s) - \int_\alpha^s f(\bar{x}(t), t)dg(t)] < \delta \quad (3.1)$$

时, 则有

$$\|\bar{x}(t)\| \leq A\|\bar{x}(\alpha)\|, t \in [\alpha, \beta].$$

定义 3.2 测度微分方程 (1.2) 的平凡解 $x \equiv 0$ 是

- (i) 一致 Lipschitz 稳定的, 若存在 $A > 0, \delta > 0$, 使得若 $\bar{x} : [\alpha, \beta] \rightarrow B_c, t_0 \leq \alpha < \beta < +\infty$ 是测度微分方程 (1.2) 在 $[\alpha, \beta]$ 上的一个解, 当 $\|\bar{x}(\alpha)\| < \delta$ 时, 则 $\|\bar{x}(t)\| \leq A\|\bar{x}(\alpha)\|, t \in [\alpha, \beta]$.

- (ii) 一致整体 Lipschitz 稳定的, 若存在 $A > 0$, 使得若 $\bar{x} : [\alpha, \beta] \rightarrow B_c, t_0 \leq \alpha < \beta < +\infty$ 是测度微分方程 (1.2) 在 $[\alpha, \beta]$ 上的一个解, 则 $\|\bar{x}(t)\| \leq A\|\bar{x}(\alpha)\|, t \in [\alpha, \beta]$.

注 若测度微分方程 (1.2) 的平凡解 $x \equiv 0$ 是变差一致 Lipschitz 稳定的, 则它是一致 Lipschitz 稳定的.

定义 3.3 测度微分方程 (1.3) 的平凡解 $x \equiv 0$ 是变差一致 Lipschitz 稳定的, 若存在 $A > 0$, 以及 $\delta > 0$, 使得若 $\bar{x} : [\alpha, \beta] \rightarrow B_c, t_0 \leq \alpha < \beta < +\infty$ 是 $[\alpha, \beta]$ 上的有界变差函数, 并且在 $(\alpha, \beta]$ 上左连续, 当 $\|\bar{x}(\alpha)\| < \delta$ 和

$$\text{var}_\alpha^\beta[\bar{x}(s) - (\int_\alpha^s f(\bar{x}(t), t)dg(t) + \int_\alpha^s p(t)dt)] < \delta \quad (3.2)$$

时, 则有

$$\|\bar{x}(t)\| \leq A\|\bar{x}(\alpha)\|, t \in [\alpha, \beta].$$

定义 3.4 测度微分方程 (1.3) 的平凡解 $x \equiv 0$ 是

(i) 一致 Lipschitz 稳定的, 若存在 $A > 0, \delta > 0$, 使得若 $\bar{x} : [\alpha, \beta] \rightarrow B_c, t_0 \leq \alpha < \beta < +\infty$ 是测度微分方程 (1.3) 在 $[\alpha, \beta]$ 上的一个解, 当 $\|\bar{x}(\alpha)\| < \delta$ 时, 则

$$\|\bar{x}(t)\| \leq A\|\bar{x}(\alpha)\|, t \in [\alpha, \beta].$$

(ii) 一致整体 Lipschitz 稳定的, 若存在 $A > 0$, 使得若 $\bar{x} : [\alpha, \beta] \rightarrow B_c, t_0 \leq \alpha < \beta < +\infty$ 是测度微分方程 (1.3) 在 $[\alpha, \beta]$ 上的一个解, 则

$$\|\bar{x}(t)\| \leq A\|\bar{x}(\alpha)\|, t \in [\alpha, \beta].$$

注 若测度微分方程 (1.3) 的平凡解 $x \equiv 0$ 是变差一致 Lipschitz 稳定的, 则它是一致 Lipschitz 稳定的.

定理 3.1 设 $V : [t_0, +\infty) \times \bar{B}_\rho \rightarrow R^+$, 其中 $\bar{B}_\rho = \{y \in R^n, \|y\| \leq \rho\}, 0 < \rho < c$, 假设 V 满足以下条件

- (i) 对所有的 $t \in [t_0, +\infty)$, 有 $V(t, 0) = 0$.
- (ii) 对所有的 $x \in \bar{B}_\rho$, 有 $V(\cdot, x) : [t_0, +\infty) \rightarrow R^+$ 在 $(t_0, +\infty)$ 上是左连续的.
- (iii) 存在一个常数 $K > 0$, 使得

$$|V(t, z) - V(t, y)| \leq K\|z - y\|, t \in [t_0, +\infty), z, y \in \bar{B}_\rho.$$

(iv) 存在一个单调递增函数 $b : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 满足 $b(0) = 0$, 使得对所有的 $t \in [t_0, +\infty), x \in \bar{B}_\rho$, 有 $V(t, x) \geq b(\|x\|)$.

(v) 对于方程 (1.2) 的所有解 $x : [\alpha, \beta] \rightarrow \bar{B}_\rho$, 有

$$D^+V(t, x(t)) = \limsup_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{V(t+\eta, x(t+\eta)) - V(t, x(t))}{\eta} \leq 0, t \in [\alpha, \beta].$$

则方程 (1.2) 的平凡解 $x \equiv 0$ 是变差一致 Lipschitz 稳定的.

证 根据引理 2.2, 需验证 $F \in \mathcal{F}(\Omega, h), F$ 由 (2.4) 式给定, $\Omega = B_c \times [t_0, +\infty)$. 因为 $f : \Omega \rightarrow R^n$ 满足条件 $(H_2), (H_3), (H_4)$, 并且 $g : [t_0, +\infty) \rightarrow R$ 满足条件 (H_1) , 使得对任意的 $(x, s_2), (x, s_1) \in \Omega$, 有

$$\begin{aligned} \|F(x, s_2) - F(x, s_1)\| &= \left\| \int_{\tau_0}^{s_2} f(x, s)dg(s) - \int_{\tau_0}^{s_1} f(x, s)dg(s) \right\| = \left\| \int_{s_1}^{s_2} f(x, s)dg(s) \right\| \\ &\leq \int_{s_1}^{s_2} M(s)dg(s) \leq h(s_2) - h(s_1), \end{aligned}$$

且对任意的 $(x, s_2), (x, s_1), (z, s_2), (z, s_1) \in \Omega$, 由条件 (H_4) , 有

$$\begin{aligned} & \|F(x, s_2) - F(x, s_1) - F(z, s_2) + F(z, s_1)\| \\ &= \left\| \int_{s_1}^{s_2} f(x, s) dg(s) - \int_{s_1}^{s_2} f(z, s) dg(s) \right\| = \left\| \int_{s_1}^{s_2} [f(x, s) - f(z, s)] dg(s) \right\| \\ &\leq \|x - z\|_{[t_0, +\infty)} \int_{s_1}^{s_2} L(s) dg(s) \leq \|x - z\|_{[t_0, +\infty)} [h(s_2) - h(s_1)]. \end{aligned}$$

所以 $F \in \mathcal{F}(\Omega, h)$, 其中 $h(t) = \int_{\tau_0}^t [M(s) + L(s)] dg(s)$, $\tau_0 \in [t_0, +\infty)$, 且 $h: [t_0, +\infty) \rightarrow R$ 是不减的左连续函数.

由引理 2.4 可知, 测度微分方程 (1.2) 的解也是广义常微分方程 (2.6) 的解, 因此它们的解都是有界变差函数.

以下证明测度微分方程 (1.2) 的平凡解 $x \equiv 0$ 是变差一致 Lipschitz 稳定的.

设 $\bar{x}: [\alpha, \beta] \rightarrow \overline{B}_\rho, [\alpha, \beta] \subset [t_0, +\infty)$ 是 $[\alpha, \beta]$ 上的有界变差函数, 并且在 (α, β) 上是左连续的. 由条件 (iii), (v) 及引理 2.4 和引理 2.7, 其中 $\Phi \equiv 0$. 对任意的 $t \in [\alpha, \beta]$, 有

$$\begin{aligned} V(t, \bar{x}(t)) - V(\alpha, \bar{x}(\alpha)) &\leq K \text{var}_\alpha^t[\bar{x}(s) - \int_\alpha^s DF(\bar{x}(\tau), r)] + B(t - \alpha) \\ &= K \text{var}_\alpha^t[\bar{x}(s) - \int_\alpha^s f(\bar{x}(r), r) dg(r)] + B(t - \alpha) \\ &= K \text{var}_\alpha^t[\bar{x}(s) - \int_\alpha^s f(\bar{x}(r), r) dg(r)] \\ &\leq K \text{var}_\alpha^\beta[\bar{x}(s) - \int_\alpha^s f(\bar{x}(r), r) dg(r)], \end{aligned} \tag{3.3}$$

因为 $\Phi \equiv 0$, 所以 $B = \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \Phi(\bar{x}(t)) = 0$. 且由条件 (i) 和 (iii), 有 $|V(\alpha, \bar{x}(\alpha)) - V(\alpha, 0)| \leq K\|\bar{x}(\alpha)\|$, 即

$$V(\alpha, \bar{x}(\alpha)) \leq K\|\bar{x}(\alpha)\|. \tag{3.4}$$

对于 $\varepsilon > 0$, 使得不等式 $0 < b(\varepsilon) \leq b(\|\bar{x}(\alpha)\| + \varepsilon)$ 成立. 设 $\delta > 0$, 使得 $2K\delta < b(\varepsilon)$. 若

$$\|\bar{x}(\alpha)\| < \delta, \text{var}_\alpha^\beta[\bar{x}(s) - \int_\alpha^s f(\bar{x}(r), r) dg(r)] < \delta.$$

因此由 (3.3) 和 (3.4) 式, 有

$$V(t, \bar{x}(t)) \leq V(\alpha, \bar{x}(\alpha)) + K \text{var}_\alpha^\beta[\bar{x}(s) - \int_\alpha^s f(\bar{x}(r), r) dg(r)] \leq K\|\bar{x}(\alpha)\| + K\delta \leq 2K\delta.$$

由于 $2K\delta < b(\varepsilon)$, 则有

$$V(t, \bar{x}(t)) \leq 2K\delta < b(\varepsilon) \leq b(\|\bar{x}(\alpha)\| + \varepsilon), \quad t \in [\alpha, \beta]. \tag{3.5}$$

另外, 由条件 (iv), 有

$$b(\|\bar{x}(t)\|) \leq V(t, \bar{x}(t)), \quad t \in [\alpha, \beta]. \tag{3.6}$$

则由 (3.5) 和 (3.6) 式, 有 $b(\|\bar{x}(t)\|) \leq V(t, \bar{x}(t)) \leq b(\|\bar{x}(\alpha)\| + \varepsilon)$. 由于 b 是增函数, 则

$$\|\bar{x}(t)\| \leq \|\bar{x}(\alpha)\| + \varepsilon, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

由定义 3.1, 取 $A = 1$, 并且由 ε 的任意性, 则 $\|\bar{x}(t)\| \leq A\|\bar{x}(\alpha)\|$ 满足, 则测度微分方程 (1.2) 的平凡解 $x \equiv 0$ 是变差一致 Lipschitz 稳定的.

定理 3.2 设 $V[t_0, +\infty) \times \bar{B}_\rho \rightarrow R^+$ 满足定理 3.1 中的条件 (i),(ii),(iii) 和 (v), 并且满足条件

(iv') 对所有的 $(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \bar{B}_\rho$, 有 $V(t, x) \geq \|x\|$.

则方程 (1.2) 的平凡解 $x \equiv 0$ 是一致整体 Lipschitz 稳定的.

证 设 $\bar{x} : [\alpha, \beta] \rightarrow \bar{B}_\rho$, $[\alpha, \beta] \subset [t_0, +\infty)$ 是测度微分方程 (1.2) 在 $[\alpha, \beta]$ 上的解. 由条件 (iii),(v) 及引理 2.4 和引理 2.7, 其中 $\Phi \equiv 0$, 所以 $B = \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \Phi(\bar{x}(t)) = 0$, 对任意的 $t \in [\alpha, \beta]$, 有

$$\begin{aligned} \|\bar{x}(t)\| &\leq V(t, \bar{x}(t)) \leq V(\alpha, \bar{x}(\alpha)) + K \text{var}_\alpha^t[\bar{x}(s) - \int_\alpha^s DF(\bar{x}(\tau), r)] + B(t - \alpha) \\ &= V(\alpha, \bar{x}(\alpha)) + K \text{var}_\alpha^t[\bar{x}(s) - \int_\alpha^s f(\bar{x}(r), r)dg(r)] + B(t - \alpha) \\ &= V(\alpha, \bar{x}(\alpha)) + K \text{var}_\alpha^t[\bar{x}(s) - \int_\alpha^s f(\bar{x}(r), r)dg(r)] \\ &\leq V(\alpha, \bar{x}(\alpha)) + K \text{var}_\alpha^\beta[\bar{x}(s) - \int_\alpha^s f(\bar{x}(r), r)dg(r)] \\ &\leq V(\alpha, \bar{x}(\alpha)) \\ &\leq K\|\bar{x}(\alpha)\|. \end{aligned}$$

因为 $\text{var}_\alpha^\beta[\bar{x}(s) - \int_\alpha^s f(\bar{x}(r), r)dg(r)] = 0$, 并且 $V(\alpha, \bar{x}(\alpha)) \leq K\|\bar{x}(\alpha)\|$ (见 (3.4) 式), 则 $\|\bar{x}(t)\| \leq K\|\bar{x}(\alpha)\|$ 满足定义 3.2 中的 (ii), 则测度微分方程 (1.2) 的平凡解 $x \equiv 0$ 是一致整体 Lipschitz 稳定的.

定理 3.3 设 $V : [t_0, +\infty) \times \bar{B}_\rho \rightarrow R^+$, 其中 $\bar{B}_\rho = \{y \in R^n, \|y\| \leq \rho\}$, $0 < \rho < c$, 假设 V 满足以下条件

- (i) 对所有的 $t \in [t_0, +\infty)$, 有 $V(t, 0) = 0$.
- (ii) 对所有的 $x \in \bar{B}_\rho$, 有 $V(\cdot, x) : [t_0, +\infty) \rightarrow R^+$ 在 $(t_0, +\infty)$ 上是左连续的.
- (iii) 存在一个常数 $K > 0$, 使得

$$|V(t, z) - V(t, y)| \leq K\|z - y\|, \quad t \in [t_0, +\infty), z, y \in \bar{B}_\rho.$$

(iv) 存在一个单调递增函数 $b : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 满足 $b(0) = 0$, 使得对所有的 $t \in [t_0, +\infty)$, $x \in \bar{B}_\rho$, 有 $V(t, x) \geq b(\|x\|)$.

(v) 对于方程 (1.3) 的所有解 $x : [\alpha, \beta] \rightarrow \bar{B}_\rho$, 有

$$D^+V(t, x(t)) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \sup \frac{V(t + \eta, x(t + \eta)) - V(t, x(t))}{\eta} \leq 0, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

则方程 (1.3) 的平凡解 $x \equiv 0$ 是变差一致 Lipschitz 稳定的.

证 根据引理 2.3, 需验证 $G \in \mathcal{F}(\Omega, h)$, G 由 (2.5) 式给定, $\Omega = B_c \times [t_0, +\infty)$. 因为 $f: \Omega \rightarrow R^n$ 满足条件 $(H_2), (H_3), (H_4)$, 并且 $g: [t_0, +\infty) \rightarrow R$ 满足条件 (H_1) , $p: [t_0, +\infty) \rightarrow R^n$ 满足条件 (H_5) 和 (H_6) , 使得对任意的 $(x, s_2), (x, s_1) \in \Omega$, 有

$$\begin{aligned} \|G(x, s_2) - G(x, s_1)\| &= \left\| \int_{\tau_0}^{s_2} f(x, s) dg(s) + \int_{\tau_0}^{s_2} p(s) ds - \int_{\tau_0}^{s_1} f(x, s) dg(s) - \int_{\tau_0}^{s_1} p(s) ds \right\| \\ &= \left\| \int_{s_1}^{s_2} f(x, s) dg(s) + \int_{s_1}^{s_2} p(s) ds \right\| \\ &\leq \int_{s_1}^{s_2} M(s) dg(s) + \int_{s_1}^{s_2} N(s) ds \\ &\leq h(s_2) - h(s_1), \end{aligned}$$

且对任意的 $(x, s_2), (x, s_1), (z, s_2), (z, s_1) \in \Omega$, 由条件 (H_4) , 有

$$\begin{aligned} &\|G(x, s_2) - G(x, s_1) - G(z, s_2) + G(z, s_1)\| \\ &= \left\| \int_{s_1}^{s_2} f(x, s) dg(s) - \int_{s_1}^{s_2} f(z, s) dg(s) \right\| = \left\| \int_{s_1}^{s_2} [f(x, s) - f(z, s)] dg(s) \right\| \\ &\leq \|x - z\|_{[t_0, +\infty)} \int_{s_1}^{s_2} L(s) dg(s) \leq \|x - z\|_{[t_0, +\infty)} [h(s_2) - h(s_1)]. \end{aligned}$$

所以 $G \in \mathcal{F}(\Omega, h)$, 其中 $h(t) = \int_{\tau_0}^t [M(s) + L(s)] dg(s) + \int_{\tau_0}^t N(s) ds$, $\tau_0 \in [t_0, +\infty)$, 且 $h: [t_0, +\infty) \rightarrow R$ 是不减的左连续函数.

由引理 2.5 可知, 测度微分方程 (1.3) 的解也是广义常微分方程 (2.7) 的解, 因此它们的解都是有界变差函数.

以下证明测度微分方程 (1.3) 的平凡解 $x \equiv 0$ 是变差一致 Lipschitz 稳定的.

设 $\bar{x}: [\alpha, \beta] \rightarrow \bar{B}_\rho$, $[\alpha, \beta] \subset [t_0, +\infty)$ 是 $[\alpha, \beta]$ 上的有界变差函数, 并且在 $(\alpha, \beta]$ 上是左连续的. 由条件 (iii), (v) 及引理 2.5 和引理 2.8, 其中 $\Phi \equiv 0$, 对任意的 $t \in [\alpha, \beta]$, 有

$$\begin{aligned} V(t, \bar{x}(t)) - V(\alpha, \bar{x}(\alpha)) &\leq K \text{var}_\alpha^t[\bar{x}(s) - \int_\alpha^s DG(\bar{x}(\tau), r)] + B(t - \alpha) \\ &= K \text{var}_\alpha^t[\bar{x}(s) - (\int_\alpha^s f(\bar{x}(r), r) dg(r) + \int_\alpha^s p(r) dr)] + B(t - \alpha) \\ &= K \text{var}_\alpha^t[\bar{x}(s) - (\int_\alpha^s f(\bar{x}(r), r) dg(r) + \int_\alpha^s p(r) dr)] \\ &\leq K \text{var}_\alpha^\beta[\bar{x}(s) - (\int_\alpha^s f(\bar{x}(r), r) dg(r) + \int_\alpha^s p(r) dr)], \end{aligned} \tag{3.7}$$

因为 $\Phi \equiv 0$, 所以 $B = \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \Phi(\bar{x}(t)) = 0$. 且由条件 (i) 和 (iii), 有 $|V(\alpha, \bar{x}(\alpha)) - V(\alpha, 0)| \leq K \|\bar{x}(\alpha)\|$, 即

$$V(\alpha, \bar{x}(\alpha)) \leq K \|\bar{x}(\alpha)\|. \tag{3.8}$$

对于 $\varepsilon > 0$, 使得不等式 $0 < b(\varepsilon) \leq b(\|\bar{x}(\alpha)\| + \varepsilon)$ 成立. 设 $\delta > 0$, 使得 $2K\delta < b(\varepsilon)$. 若

$$\|\bar{x}(\alpha)\| < \delta, \text{var}_\alpha^\beta[\bar{x}(s) - (\int_\alpha^s f(\bar{x}(r), r) dg(r) + \int_\alpha^s p(r) dr)] < \delta.$$

因此由 (3.7) 和 (3.8) 式, 有

$$\begin{aligned} V(t, \bar{x}(t)) &\leq V(\alpha, \bar{x}(\alpha)) + K \text{var}_{\alpha}^{\beta} [\bar{x}(s) - (\int_{\alpha}^s f(\bar{x}(r), r) dg(r) + \int_{\alpha}^s p(r) dr)] \\ &\leq K \|\bar{x}(\alpha)\| + K\delta \leq 2K\delta. \end{aligned}$$

由于 $2K\delta < b(\varepsilon)$, 则有

$$V(t, \bar{x}(t)) \leq 2K\delta < b(\varepsilon) \leq b(\|\bar{x}(\alpha)\| + \varepsilon), \quad t \in [\alpha, \beta]. \quad (3.9)$$

另外, 由条件 (iv), 有

$$b(\|\bar{x}(t)\|) \leq V(t, \bar{x}(t)), \quad t \in [\alpha, \beta]. \quad (3.10)$$

则由 (3.9) 和 (3.10) 式, 有 $b(\|\bar{x}(t)\|) \leq V(t, \bar{x}(t)) \leq b(\|\bar{x}(\alpha)\| + \varepsilon)$. 由于 b 是增函数, 则

$$\|\bar{x}(t)\| \leq \|\bar{x}(\alpha)\| + \varepsilon, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

由定义 3.3, 取 $A = 1$, 并且由 ε 的任意性, 则 $\|\bar{x}(t)\| \leq A\|\bar{x}(\alpha)\|$ 满足, 则测度微分方程 (1.3) 的平凡解 $x \equiv 0$ 是变差一致 Lipschitz 稳定的.

定理 3.4 设 $V : [t_0, +\infty) \times \bar{B}_{\rho} \rightarrow R^+$ 满足定理 3.3 中的条件 (i), (ii), (iii) 和 (v), 并且满足条件:

(iv') 对所有的 $(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \bar{B}_{\rho}$, 有 $V(t, x) \geq \|x\|$.

则方程 (1.3) 的平凡解 $x \equiv 0$ 是一致整体 Lipschitz 稳定的.

证 设 $\bar{x} : [\alpha, \beta] \rightarrow \bar{B}_{\rho}$, $[\alpha, \beta] \subset [t_0, +\infty)$ 是测度微分方程 (1.3) 在 $[\alpha, \beta]$ 上的解. 由条件 (iii), (v) 及引理 2.5 和引理 2.8, 其中 $\Phi \equiv 0$, 所以 $B = \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \Phi(\bar{x}(t)) = 0$, 对任意的 $t \in [\alpha, \beta]$, 有

$$\begin{aligned} \|\bar{x}(t)\| &\leq V(t, \bar{x}(t)) \\ &\leq V(\alpha, \bar{x}(\alpha)) + K \text{var}_{\alpha}^t [\bar{x}(s) - \int_{\alpha}^s DG(\bar{x}(\tau), r)] + B(t - \alpha) \\ &= V(\alpha, \bar{x}(\alpha)) + K \text{var}_{\alpha}^t [\bar{x}(s) - (\int_{\alpha}^s f(\bar{x}(r), r) dg(r) + \int_{\alpha}^s p(r) dr)] + B(t - \alpha) \\ &= V(\alpha, \bar{x}(\alpha)) + K \text{var}_{\alpha}^t [\bar{x}(s) - (\int_{\alpha}^s f(\bar{x}(r), r) dg(r) + \int_{\alpha}^s p(r) dr)] \\ &\leq V(\alpha, \bar{x}(\alpha)) + K \text{var}_{\alpha}^{\beta} [\bar{x}(s) - (\int_{\alpha}^s f(\bar{x}(r), r) dg(r) + \int_{\alpha}^s p(r) dr)] \\ &\leq V(\alpha, \bar{x}(\alpha)) \leq K \|\bar{x}(\alpha)\|. \end{aligned}$$

因为 $\text{var}_{\alpha}^{\beta} [\bar{x}(s) - (\int_{\alpha}^s f(\bar{x}(r), r) dg(r) + \int_{\alpha}^s p(r) dr)] = 0$, 并且 $V(\alpha, \bar{x}(\alpha)) \leq K \|\bar{x}(\alpha)\|$ (见 (3.8) 式), 则 $\|\bar{x}(t)\| \leq K \|\bar{x}(\alpha)\|$ 满足定义 3.4 中的 (ii), 则测度微分方程 (1.3) 的平凡解 $x \equiv 0$ 是一致整体 Lipschitz 稳定的.

参 考 文 献

- [1] Schmaedeke W W. Optimal control theory for nonlinear vector differential equations containing measures [J]. Siam. Control, 1965, 3(2): 231–280.
- [2] Rao M R M, Rao V S H. Stability of impulsively perturbed systems [J]. Bull. Austral. Math. Soc., 1977, 16(1): 99–110.
- [3] Pandit S G. Differential systems with impulsive perturbations [J]. J. Pacific Math., 1980, 86(2): 553–560.
- [4] 徐远通. 泛函微分方程与测度微分方程 [M]. 广州: 中山大学出版社, 1988.
- [5] F M Dannan, S Elaydi. Lipschitz stability of nonlinear systems of differential equations [J]. J. Math. Anal. Appl., 1986, 113(2): 562–577.
- [6] G K Kulev, D D Bainov. Lipschitz stability of impulsive systems of differential equations [J]. International Journal of Theoretical Physics, 1991, 30(5): 737–756.
- [7] D D Bainov, I M Stamova. Lipschitz stability of impulsive functional differential equations [J]. Anziam J., 2001, 42(4): 504–514.
- [8] Suzete M Afonso, Márcia R Da Silva. Lipschitz stability of generalized ordinary differential equations and impulsive retarded differential equations [J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2019, 2019(18): 1–18.
- [9] Schwabik Š. Generalized ordinary differential equations [M]. Singapore: World Scientific, 1992.
- [10] Federson M, Grau R, Mesquita J G, Toon E. Boundedness of solutions of measure differential equations and dynamic equations on time scales [J]. Journal of Differential Equations, 2017, 63(1): 26–56.
- [11] 李宝麟, 张海燕. 一类测度微分方程的有界性 [J]. 西北师范大学 (自然科学版), 2019, 55(2): 11–16.
- [12] Schwabik Š. Variational stability for generalized ordinary differential equations [J]. Časopis Pro Pěstování Matematiky, 1984, 109(4): 389–420.
- [13] 李宝麟, 张珍珍. 测度微分方程的变差稳定性 [J]. 四川师范大学 (自然科学版), 2015, 40(3): 328–333.

LIPSCHITZ STABILITY OF MEASURE DIFFERENTIAL EQUATIONS

LI Bao-lin, XI Ya

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, we study the Lipschitz stability of measure differential equations. By using the Lipschitz stability of generalized ordinary differential equations, under the condition that the measure differential equations is equivalent to the generalized ordinary differential equations, the theorems of variational uniformly Lipschitz stability and uniformly globally Lipschitz stability of measure differential equations are obtained, which is an essential generalization of the stability theorem of measure differential equations.

Keywords: measure differential equations; generalized ordinary differential equations; Lipschitz stability; variational uniformly Lipschitz stability; uniformly globally Lipschitz stability

2010 MR Subject Classification: 34D10; 34D20; 34D23