Vol. 40 (2020)
No. 5

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

随机环境中马氏链函数的极限性质

黄 敏[1,2], 万成高[3]

(1. 武汉学院信息工程学院, 湖北 武汉 430212)

(2. 中南财经政法大学统计与数学学院, 湖北 武汉 430073)

(3. 湖北大学数学与统计学学院, 湖北 武汉 430062)

摘 要: 本文研究了随机环境中马氏链函数的极限性质的问题. 利用构造鞅差序列的方法, 获得了随机环境中马氏链函数强大数定律的一系列充分条件, 即当函数列 $\{g_n(x), n \geq 0\}$ 中 x 的取值范围不同时, 可取适合的函数得到相应的结论, 从而推广了已有结论的适用范围.

关键词: 随机环境; 马氏链; 强大数定律

MR(2010) **主题分类号:** 60F05; 60J10 **中图分类号:** O211.62

文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2020)05-0585-08

1 引言

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一概率空间, $(X, \mathcal{A})$ 和 $(\Theta, \mathcal{B})$ 均为任意的可测空间, $\vec{\xi} = \{\xi_n : n \geq 0\}$ 和 $\vec{X} = \{X_n : n \geq 0\}$ 分别是 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上取值于 Θ 和 X 的随机序列, $\{P(\theta) : \theta \in \Theta\}$ 是 $(X, \mathcal{A})$ 上的一族转移函数, 且假设对任意的 $A \in \mathcal{A}$, $P(\cdot;\cdot, A)$ 是 $\mathcal{B} \times \mathcal{A}$ 可测的, $\{K(\cdot, \cdot)\}$ 是 $(\Theta, \mathcal{B})$ 上的转移函数, 且假设对任意 $B \in \mathcal{B}$, $K(\cdot, B)$ 是关于 $\mathcal{B}$ 可测的. 对任意序列 $\vec{\eta} = \{\eta_n : n \geq 0\}$, 记 $\vec{\eta}_k^r = \{\eta_n : k \leq n \leq r\}$, $0 \leq k \leq r \leq \infty$. 设 $\Xi = \prod\limits_{j=0}^{\infty} \Theta_j$, $\vec{\mathcal{B}} = \prod\limits_{j=0}^{\infty} \mathcal{B}_j$, 这里 $\Theta_j = \Theta$, $\mathcal{B}_j = \mathcal{B}$, $j \geq 0$.

如果对任意 $A \in \mathcal{A}$, $n \geq 0$, 有

$$P(X_0 \in A | \vec{\xi}) = P(X_0 \in A | \xi_0), \quad P(X_{n+1} \in A | \vec{X}_0^n, \vec{\xi}) = P(\xi_n; X_n, A), \tag{1.1}$$

则称 $\vec{X}$ 为随机环境 $\vec{\xi}$ 中的马氏链, 称 $\vec{\xi}$ 为随机环境序列. 若 $\vec{\xi}$ 是一马氏序列, 则称 $\vec{X}$ 为马氏环境 $\vec{\xi}$ 中的马氏链.

本文假设 $\vec{\xi}$ 是一步转移概率为 $K(\theta, B)$ 的马氏链, 对任意的 $E \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, 记 $P^n(E) = P((X_n, \xi_n) \in E)$. 约定: 文中出现的 C 总表示正常数, 它在不同的地方可以代表不同的值. 集合 A 的示性函数记为 I_A.

20 世纪 80 年代初, Cogburn 等人开始研究随机环境中马氏链的一般理论, 取得了一系列深刻的结果 [1–3]. Orey[4] 在 Cogburn 等人的研究基础上对随机环境中马氏链进行了深入的研究, 并提出了一系列的问题, 引起了众多概率论学者的广泛关注, 使得随机环境中马氏链一般理论的研究成为国际上又一新的研究方向. 国内学者对这一领域进行了深入的研究

*收稿日期: 2019-10-29 接收日期: 2020-02-21
基金项目: 国家自然科学基金资助 (71974204)
作者简介: 黄敏 (1985–), 女, 湖北黄石, 讲师, 主要研究方向: 随机过程的极限理论, 金融统计.

[5−9]. 目前, 随机环境中马氏链的强大数定律这方面研究的相关文献比较多 [10−13], 如由李应求 (2003) 首先提出具有离散参量的马氏环境中马氏链函数的强大数定律, 并且给出了直接加于链和过程样本函数上的充分条件. 随后, 郭明乐 (2004) 同样也研究了随机环境中马氏链的强大数定律. 近年来, 不同于李应求和郭明乐等人所研究的, 吴艳蕾等人 (2011) 和宋明珠等人 (2016) 又分别研究了随机环境中马氏链的强大数定律成立的一系列充分条件. 大家知道, 极限定理一直是经典马氏链理论研究中的热门课题, 取得的结果已十分深入. 鉴于此, 本文研究了随机环境中马氏链函数的极限性质, 给出了随机环境中马氏链函数强大数定律成立的一系列充分条件. 本文结构安排如下: 首先, 本文定理 1 给出了马氏序列的强大数定律成立的两个充分条件且得到了之前学者的相似结论; 然后, 在定理 1 的基础上对偶函数列 $g_n(x)$ 取适合的函数, 即可得到之前学者的一系列充分条件, 故此充分条件较已有结论相对弱一些, 从而推广了之前学者的一系列充分条件; 最后, 利用本文所给出的充分条件重新给出了随机环境中马氏链函数强大数定律成立的一系列充分条件. 因此, 本文拓宽了已有结论的适用范围.

2 主要结果及证明

引理 1[11] 设 $\vec{X}$ 为随机环境 $\vec{\xi}$ 中的马氏链, 则 $\{(X_n, \vec{\xi}_n^\infty) : n \geq 0\}$ 是马氏链.

定理 1 设 $\{(X_n, Y_n) : n \geq 0\}$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上取值于 $X \times Y$ 上的马氏序列, $\{f_n : n \geq 0\}$ 是 $(X, \mathcal{A})$ 可测函数列. $\{g_n(x), n \geq 0\}$ 为 R 上的偶函数序列, 在区间 $(0, \infty)$ 上取正值, 且对任意的 $n \geq 0$, 存在 $\lambda > 0$, 使得下述条件之一成立

(i) $g_n(x)$ 在 $(0, \infty)$ 内单调不减, 当 $0 < x \leq 1$ 时, $g_n(x) \geq \lambda x^\theta (0 < \theta \leq 1)$, 且 $Ef_n(X_n) = 0$, $n \geq 0$;

(ii)

$$g_n(x) \geq \begin{cases} \lambda x^\alpha (0 < \alpha \leq 2), & 0 < x \leq 1, \\ \lambda x^\beta (\beta \geq 1), & x > 1. \end{cases}$$

同时对于正常数序列 $\{a_n, n \geq 0\}$, 满足 $a_n \uparrow \infty$, 有

$$\sum_{m=0}^{\infty} Eg_m\Big(\frac{f_m(X_m)}{a_m}\Big) < \infty, \tag{2.2}$$

则对任意的 $k \geq 1$, 有

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f_m(X_m) - E(f_m(X_m)|X_{m-k}, Y_{m-k})}{a_m} \text{ a.s. 收敛}, \tag{2.3}$$

及

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{m=0}^{n} (f_m(X_m) - E(f_m(X_m)|X_{m-k}, Y_{m-k})) = 0 \text{ a.s.}. \tag{2.4}$$

这里约定: 对任意的 $k \geq 1$, $X_{-k} \equiv 0$, $Y_{-k} \equiv 0$.

证 先考虑 $k=1$ 的情况. 在条件 (i) 下, 当 $|f_n(X_n)|>a_n$ 时, 由于 $g_n(x)$ 在 $(0,\infty)$ 内单调不减, 且有 $g_n(1)\ge\lambda$. 从而

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{\infty}P(|f_m(X_m)|>a_m)=\sum_{m=0}^{\infty}EI_{\{|f_m(X_m)|>a_m\}}\le C\sum_{m=1}^{\infty}Eg_m(1)I_{\{|f_m(X_m)|>a_m\}}\\
\le\ & C\sum_{m=1}^{\infty}Eg_m\Big(\frac{|f_m(X_m)|}{a_m}\Big)I_{\{|f_m(X_m)|>a_m\}}\le C\sum_{m=1}^{\infty}Eg_m\Big(\frac{|f_m(X_m)|}{a_m}\Big)<\infty. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&E\Big(\sum_{m=0}^{\infty}\Big|E\Big(\frac{f_m(X_m)}{a_m}I_{\{|f_m(X_m)|>a_m\}}\Big|X_{m-1},Y_{m-1}\Big)\Big|\Big)\\
=\ & E\Big(\sum_{m=0}^{\infty}\Big|E\Big(\frac{f_m(X_m)}{a_m}I_{\{|f_m(X_m)|\le a_m\}}\Big|X_{m-1},Y_{m-1}\Big)\Big|\Big)\\
\le\ & E\Big(\sum_{m=0}^{\infty}E\Big(\frac{|f_m(X_m)|}{a_m}I_{\{|f_m(X_m)|\le a_m\}}\Big|X_{m-1},Y_{m-1}\Big)\Big)\\
=\ & \sum_{m=0}^{\infty}E\Big(\frac{|f_m(X_m)|}{a_m}I_{\{|f_m(X_m)|\le a_m\}}\Big)\le\sum_{m=1}^{\infty}E\Big(\frac{|f_m(X_m)|^{\theta}}{a_m^{\theta}}\Big)I_{\{|f_m(X_m)|\le a_m\}}\\
\le\ & C\sum_{m=1}^{\infty}Eg_m\Big(\frac{|f_m(X_m)|}{a_m}\Big)I_{\{|f_m(X_m)|\le a_m\}}\le C\sum_{m=1}^{\infty}Eg_m\Big(\frac{|f_m(X_m)|}{a_m}\Big)<\infty. \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

在条件 (ii) 下, 当 $|f_n(X_n)|>a_n$ 时, 利用 $g_n(x)\ge\lambda x^{\beta}(\beta\ge1,\ x>1)$, 可知

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{\infty}P(|f_m(X_m)|>a_m)=\sum_{m=0}^{\infty}EI_{\{|f_m(X_m)|>a_m\}}\le C\sum_{m=1}^{\infty}E\Big(\frac{|f_m(X_m)|^{\beta}}{a_m^{\beta}}\Big)I_{\{|f_m(X_m)|>a_m\}}\\
\le\ & C\sum_{m=1}^{\infty}Eg_m\Big(\frac{|f_m(X_m)|}{a_m}\Big)I_{\{|f_m(X_m)|>a_m\}}\le C\sum_{m=1}^{\infty}Eg_m\Big(\frac{|f_m(X_m)|}{a_m}\Big)<\infty. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&E\Big(\sum_{m=0}^{\infty}\Big|E\Big(\frac{f_m(X_m)}{a_m}I_{\{|f_m(X_m)|>a_m\}}\Big|X_{m-1},Y_{m-1}\Big)\Big|\Big)\\
\le\ & E\Big(\sum_{m=0}^{\infty}E\Big(\frac{|f_m(X_m)|}{a_m}I_{\{|f_m(X_m)|>a_m\}}\Big|X_{m-1},Y_{m-1}\Big)\Big)=\sum_{m=0}^{\infty}E\Big(\frac{|f_m(X_m)|}{a_m}I_{\{|f_m(X_m)|>a_m\}}\Big)\\
\le\ & \sum_{m=1}^{\infty}E\Big(\frac{|f_m(X_m)|^{\beta}}{a_m^{\beta}}\Big)I_{\{|f_m(X_m)|>a_m\}}\le C\sum_{m=1}^{\infty}Eg_m\Big(\frac{|f_m(X_m)|}{a_m}\Big)I_{\{|f_m(X_m)|>a_m\}}\\
\le\ & C\sum_{m=1}^{\infty}Eg_m\Big(\frac{|f_m(X_m)|}{a_m}\Big)<\infty. \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

由 (2.5) 式或 (2.7) 式知

$$\sum_{m=0}^{\infty}I_{\{|f_m(X_m)|>a_m\}}<\infty\ \text{ a.s.},$$

即 $P(|f_m(X_m)|>a_m:\ \text{i.o.})=0$, 因而

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f_m(X_m)}{a_m}I_{\{|f_m(X_m)|>a_m\}}\ \text{a.s. 收敛.}\tag{2.9}$$

由 (2.6) 式或（2.8）式知

$$\sum_{m=0}^{\infty}E\Big(\frac{f_m(X_m)}{a_m}I_{\{|f_m(X_m)|>a_m\}}\Big|X_{m-1},Y_{m-1}\Big)\ \text{a.s. 收敛.}\tag{2.10}$$

记

$$Z_m=\frac{f_m(X_m)I_{\{|f_m(X_m)|\le a_m\}}}{a_m}-\frac{E(f_m(X_m)I_{\{|f_m(X_m)|\le a_m\}}|X_{m-1},Y_{m-1})}{a_m};$$

$$\mathcal{B}_m=\sigma(\vec{X}_0^m,\vec{Y}_0^m).$$

由 $\{(X_n,Y_n),n\ge 0\}$ 的马氏性, 易知 $\{Z_n,\mathcal{B}_n,n\ge 0\}$ 为鞅差序列. 在条件 (i) 下, 由鞅差序列的正交性知

$$\begin{aligned}&E\Big|\sum_{m=0}^{n}Z_m\Big|^2=\sum_{m=0}^{n}EZ_m^2\\ \le\ & C\sum_{m=0}^{n}E\Big(\frac{f_m^2(X_m)}{a_m^2}I_{\{|f_m(X_m)|\le a_m\}}\Big)\le C\sum_{m=0}^{n}E\Big(\frac{|f_m(X_m)|^\theta}{a_m^\theta}I_{\{|f_m(X_m)|\le a_m\}}\Big)\\ \le\ & C\sum_{m=1}^{\infty}Eg_m\Big(\frac{|f_m(X_m)|}{a_m}\Big)I_{\{|f_m(X_m)|\le a_m\}}\le C\sum_{m=1}^{\infty}Eg_m\Big(\frac{|f_m(X_m)|}{a_m}\Big).\end{aligned}\tag{2.11}$$

在条件 (ii) 下, 同样有

$$\begin{aligned}&E\Big|\sum_{m=0}^{n}Z_m\Big|^2=\sum_{m=0}^{n}EZ_m^2\\ \le\ & C\sum_{m=0}^{n}E\Big(\frac{f_m^2(X_m)}{a_m^2}I_{\{|f_m(X_m)|\le a_m\}}\Big)\le C\sum_{m=0}^{n}E\Big(\frac{|f_m(X_m)|^\alpha}{a_m^\alpha}I_{\{|f_m(X_m)|\le a_m\}}\Big)\\ \le\ & C\sum_{m=1}^{\infty}Eg_m\Big(\frac{|f_m(X_m)|}{a_m}\Big)I_{\{|f_m(X_m)|\le a_m\}}\le C\sum_{m=1}^{\infty}Eg_m\Big(\frac{|f_m(X_m)|}{a_m}\Big).\end{aligned}\tag{2.12}$$

由 (2.2) 式知 $\sup\limits_{n\ge 0}E\Big|\sum\limits_{m=0}^{n}Z_m\Big|^2<\infty$, 即 $\Big\{\sum\limits_{m=0}^{n}Z_m,\mathcal{B}_n,n\ge 0\Big\}$ 为 L^2 有界鞅, 从而 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}Z_m$ a.s. 收敛. 结合 (2.9), (2.10) 两式知 (2.3) 式成立, 再由 Kronecker 引理易知 (2.4) 式成立.

下面再考虑 $k>1$ 的情形. 由 $\{(X_n,Y_n):n\ge 0\}$ 的马氏性易知, 对任意的 $n=1,\ 2,\ 3,\cdots,k-1$, $\{(X_{mk+n},Y_{mk+n}):m\ge 0\}$ 是马氏链, 由 (2.2) 式显然有

$$\sum_{m=1}^{\infty}Eg_{mk+n}\Big(\frac{f_{mk+n}(X_{mk+n})}{a_{mk+n}}\Big)<\infty,$$

因此对任意的 $n=1,\ 2,\ 3,\cdots,k-1$, 有

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f_{mk+n}(X_{mk+n})-E(f_{mk+n}(X_{mk+n})|X_{mk+n-k},Y_{mk+n-k})}{a_{mk+n}}\ \text{a.s. 收敛},$$

从而

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f_m(X_m)-E(f_m(X_m)|X_{m-k},Y_{m-k})}{a_m}\\=\ &\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k-1}\frac{f_{mk+n}(X_{mk+n})-E(f_{mk+n}(X_{mk+n})|X_{mk+n-k},Y_{mk+n-k})}{a_{mk+n}}\\=\ &\sum_{n=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f_{mk+n}(X_{mk+n})-E(f_{mk+n}(X_{mk+n})|X_{mk+n-k},Y_{mk+n-k})}{a_{mk+n}}\ \text{a.s. 收敛},\end{aligned}$$

亦即 (2.3) 式对 $k>1$ 成立, 又由 Kronecker 引理知 (2.4) 式对 $k>1$ 也成立.

注 本文定理 1 的充分条件中, 对偶函数列 $g_n(x)$ 取适合的函数时, 例如当 $0<r<1$ 时, $g_n(x)=|x|^r/(1+|x|^r)$; 当 $1\le r\le 2$ 时，$g_n(x)=|x|^r/(1+|x|^{r-1})$, 即可得到类似于之前学者已有结论. 较之前学者已有结论, 如文献 [12] 的定理 1 和文献 [13] 的定理 1, 本文的推论 1 和推论 2 都是在定理 1 的基础上对 $g_n(x)$ 取不同的函数, 即可得已有结论. 因此本文所给出的随机环境中马氏链函数强大数定律成立的两个充分条件拓宽了已有结论的适用范围.

推论 1 设 $\{(X_n,Y_n):n\ge 0\}$ 是 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上取值于 $X\times Y$ 上的马氏序列, $\{f_n:n\ge 0\}$ 是 $(X,\mathcal{A})$ 可测函数列. $\{\varphi_n(x),n\ge 0\}$ 为 R 上的偶函数序列, 在区间 $(0,\ \infty)$ 上取正值, 且对任意的 $n\ge 0$, 下述条件之一成立

(iii) $\varphi_n(x),\ x/\varphi_n(x)$ 在 $(0,\ \infty)$ 内不减, 且 $Ef_n(X_n)=0,\ n\ge 0$;

(iv) $\varphi_n(x)/x,\ x^2/\varphi_n(x)$ 在 $(0,\ \infty)$ 内不减.

同时对于正常数序列 $\{a_n,n\ge 0\}$, 满足 $a_n\uparrow\infty$, 若有 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}E\varphi_m(f_m(X_m))/\varphi_m(a_m)<\infty$, 则有 (2.3) 和 (2.4) 式成立.

证 取 $g_n(y)=\varphi_n(xy)/\varphi_n(x)$, 对任意的 $x\in(0,\ \infty)$, $y\in R$, 则有

$$g_n(f_n(X_n)/a_n)=\varphi_n(f_n(X_n))/\varphi_n(a_n),$$

且 $g_n(y)$ 为在 $(0,\ \infty)$ 内取正值的偶函数.

同时, 在条件 (iii) 下, $g_n(y)$ 满足定理 1 的条件 (i), 在条件 (iv) 下, $g_n(y)$ 满足定理 1 的条件 (ii), 而且 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}Eg_m(f_m(X_m)/a_m)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}E\varphi_m(f_m(X_m))/\varphi_m(a_m)<\infty$, 于是由定理 1 知, 推论 1 的结论成立.

推论 2 设 $\{(X_n,Y_n):n\ge 0\}$ 是 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上取值于 $X\times Y$ 上的马氏序列, $\{f_n:n\ge 0\}$ 是 $(X,\mathcal{A})$ 可测函数列. $\{a_n,n\ge 0\}$ 是正常数列, 满足 $a_n\uparrow\infty$, 若有下述条件之一成立

(v) $\sum\limits_{m=0}^{\infty}E\Big(|f_m(X_m)|^r/(a_m^r+|f_m(X_m)|^r)\Big)<\infty$, 其中 $0<r<1$ 且 $Ef_n(X_n)=0,\ n\ge 0$;

(vi) $\sum\limits_{m=0}^{\infty}E\Big(|f_m(X_m)|^r/(a_m^r+a_m|f_m(X_m)|^{r-1})\Big)<\infty$, 其中 $1\le r\le 2$,

则有 (2.3) 和 (2.4) 式成立.

证 当条件 (v) 成立时, 取 $g_n(x)=|x|^r/(1+|x|^r)$, $0<r<1$; 当条件 (vi) 成立时, 取 $g_n^{'}(x)=|x|^r/(1+|x|^{r-1})$, $1\le r\le 2$. 那么对任意的 $n\ge 0$, $g_n(x)$, $g_n^{'}(x)$ 均为偶函数, 且在 $(0,\infty)$ 内取正值, 不减. 同时分别有

$$g_n(x)\ge \frac{1}{2}x^r,\ 0<x\le 1,\ 0<r<1,$$

$$g'_n(x)\ge \begin{cases} \frac{1}{2}x^r, & 0<x\le 1,\ 1\le r\le 2,\\ \frac{1}{2}x, & x>1. \end{cases}$$

若条件 (v) 被满足, 则

$$\sum_{m=0}^{\infty} Eg_n\Big(\frac{f_m(X_m)}{a_m}\Big)=\sum_{m=0}^{\infty} E\Big(\frac{|f_m(X_m)|^r}{|a_m|^r+|f_m(X_m)|^r}\Big)<\infty.$$

若条件 (vi) 被满足, 则

$$\sum_{m=0}^{\infty} Eg_m^{'}\Big(\frac{f_m(X_m)}{a_m}\Big)=\sum_{m=0}^{\infty} E\Big(\frac{|f_m(X_m)|^r}{|a_m|^r+a_m|f_m(X_m)|^{r-1}}\Big)<\infty.$$

于是由定理 1 知推论 2 成立.

定理 2 设 $\vec{X}$ 为随机环境 $\vec{\xi}$ 中的马氏链, $\{f_n: n\ge 0\}$ 是 $(X,\mathcal{A})$ 上可测函数序列, $0<a_n\uparrow\infty$, 如果定理 1(或推论 1、推论 2) 条件成立, 则对任意的 $k\ge 1$, 有

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f_m(X_m)-E(f_m(X_m)|X_{m-k},\vec{\xi}_{m-k}^{\infty})}{a_m}\ \text{a.s. 收敛}, \tag{2.13}$$

及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{m=0}^{n}(f_m(X_m)-E(f_m(X_m)|X_{m-k},\vec{\xi}_{m-k}^{\infty}))=0\ \ \text{a.s.}. \tag{2.14}$$

证 由引理 1 知 $\{(X_n,\vec{\xi}_n^{\infty}),n\ge 0\}$ 是马氏链, 从而由定理 1(或推论 1、推论 2) 知 (2.13) 和 (2.14) 式均成立.

定理 3 在定理 2 的条件下, 则对任意的 $k\ge 1$, 有

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f_m(X_m)-E(f_m(X_m)|X_{m-k},\xi_{m-k})}{a_m}\ \text{a.s.收敛}, \tag{2.15}$$

及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{m=0}^{n}(f_m(X_m)-E(f_m(X_m)|X_{m-k},\xi_{m-k}))=0\ \ \text{a.s.}. \tag{2.16}$$

证 同文献 [11] 中推论 2 的证明.

定理 4 在定理 3 的条件下, 若存在 $C>0$, 对任意的 $n\geq 0$, 都有 $n/a_n\leq C$, 且

$$\limsup_{k\to\infty}\sup_{\substack{m\\(x,\theta_1)}}\Big|\int(Q^k(x,\theta_1;dz,d\theta)-P^{m+k}(dz,d\theta))f_{m+k}(z)\Big|=0,\tag{2.17}$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{m=0}^{n}(f_m(X_m)-E(f_m(X_m))=0\ \text{ a.s..}\tag{2.18}$$

证 由于定理 3 的条件满足, 从而 (2.16) 式成立. 又由于

$$\begin{aligned}\Big|\frac{1}{a_n}\sum_{m=0}^{n}(f_m(X_m)-E(f_m(X_m))\Big| &\leq \Big|\frac{1}{a_n}\sum_{m=0}^{n}(f_m(X_m)-E(f_m(X_m)|X_{m-k},\xi_{m-k}))\Big|\\ &\leq \Big|\frac{1}{a_n}\sum_{m=0}^{n}(E(f_m(X_m)|X_{m-k},\xi_{m-k})-E(f_m(X_m))\Big|.\end{aligned}$$

因此欲证 (2.18) 式成立, 只需证

$$\limsup_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\Big|\frac{1}{a_n}\sum_{m=0}^{n}(E(f_m(X_m)|X_{m-k},\xi_{m-k})-E(f_m(X_m))\Big|=0\ \text{ a.s..}\tag{2.19}$$

由于 $\{(X_n,\xi_n):n\geq 0\}$ 是一步转移概率为 $Q(x,\theta;A\times B)=K(\theta,B)P(\xi;x,A)$ 的马氏链, 故有

$$\begin{aligned}&\limsup_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\Big|\frac{1}{a_n}\sum_{m=0}^{n}(E(f_m(X_m)|X_{m-k},\xi_{m-k})-E(f_m(X_m))\Big|\\ =\ &\limsup_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\Big|\frac{1}{a_n}\sum_{m=0}^{n-k}(E(f_{m+k}(X_{m+k})|X_m,\xi_m)-E(f_{m+k}(X_{m+k}))\Big|\\ =\ &\limsup_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\Big|\frac{1}{a_n}\sum_{m=0}^{n-k}\int(Q^k(X_m,\xi_m;dz,d\theta)-P^{m+k}(dz,d\theta))f_{m+k}(z)\Big|\\ \leq\ &\limsup_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\frac{n}{a_n}\sup_{\substack{m\\(x,\theta_1)}}\Big|\int(Q^k(x,\theta_1;dz,d\theta)-P^{m+k}(dz,d\theta))f_{m+k}(z)\Big|\\ \leq\ &C\limsup_{k\to\infty}\sup_{\substack{m\\(x,\theta_1)}}\Big|\int(Q^k(x,\theta_1;dz,d\theta)-P^{m+k}(dz,d\theta))f_{m+k}(z)\Big|\ \text{ a.s..}\end{aligned}$$

上述第一个等式是由于 $m<k$ 时, 有 $E(f_m(X_m)|X_{m-k},\xi_{m-k})=E(f_m(X_m)$ a.s.. 从而由 (2.17) 式知 (2.19) 式成立, 继而 (2.18) 式成立.

参 考 文 献

[1] Cogburn R. The ergodic theory of Markov chains in random environments[J]. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 1984, 66(2): 109–128.

[2] Cogburn R. Markov chains in random environments: the case of Markovian environment[J]. Ann. Prob., 1980, 8(3): 908–916.

[3] Cogburn R. On the central limit theorem for Markov chains in random environments[J]. Ann. Prob., 1991, 19(2): 587–604.

[4] Orey S. Markov Chains with stochastically stationary transition probabilities[J]. Ann. Prob., 1999, 19(4): 907–928.

[5] 王汉兴, 戴永隆. 马氏环境中马氏链的 Poisson 极限律 [J]. 数学学报, 1997, 40(2): 265–270.

[6] 方大凡. 马氏环境中马氏链的 Shannon-McMillan-Breiman 定理 [J]. 应用概率统计, 2000, 16(3): 295–298.

[7] 李应求. 双无限随机环境中马氏链的瞬时性与不变函数 [J]. 数学年刊, 2003, 24A(4): 515–520.

[8] 刘莉, 万成高. 双无限随机环境中马氏链函数加权和的强收敛性 [J]. 应用概率统计, 2012, 28(1): 12–20.

[9] 万成高. 随机环境中马氏链函数加权和的极限定理 [J]. 数学物理学报, 2015, 35A(1): 163–171.

[10] 李应求. 状态可数的马氏环境中马氏链函数的强大数定律 [J]. 数学杂志, 2003, 23(4): 489–490.

[11] 郭明乐. 随机环境中马氏链的强大数定律 [J]. 应用概率统计, 2004, 12(2): 154–160.

[12] 吴艳蕾, 吴小太. 随机环境中马氏链函数的强大数定律 [J]. 应用概率统计, 2011, 27(6): 579–586.

[13] 宋明珠, 吴永锋. 随机环境中马氏链函数的强大数定律 [J]. 数学杂志, 2016, 36(6): 1245–1252.

THE LIMIT PROPERTIES FOR FUNCTION OF MARKOV CHAINS IN RANDOM ENVIRONMENTS

HUANG Min[1,2], WAN Cheng-gao[3]

(*1. Faculty of Information and Engineering, Wuhan College, Wuhan 430212, China*)

(*2. College of Statistics and Mathematics, Zhongnan University of Economics and Law, Wuhan 430073, China*)

(*3. Faculty of Mathematics and Statistics, Hubei University, Wuhan 430062, China*)

Abstract: In this paper, we study the limit properties of Markov chain functions in random environments. By using the method of constructing martingale difference sequence, a series of sufficient conditions of the strong law of large numbers for Markov chain functions in random environment are obtained. That is, when the value range of x in the function sequence $\{g_n(x), n \geq 0\}$ is different, the appropriate function can be taken to obtain the corresponding conclusion, thus extending the scope of application of the existing conclusions.

Keywords: random environments; Markov chains; strong law of large numbers

2010 MR Subject Classification: 60F05; 60J10