Vol. 40 (2020)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

有穷平坦维数的同调转换刻画

熊 涛
(西华师范大学数学与信息学院, 四川 南充 637002)

摘 要: 本文研究了环的有穷平坦维数 FFD(R). 利用同调转换, 获得了 FFD(R) 的计算方法. 从而给出了 FFD(R) 的换环定理和凝聚环上该维数的计算方法.

关 键 词: 有穷平坦维数; 换环定理; 凝聚环
MR(2010) **主题分类号:** 16E05; 16E10 **中 图 分 类 号:** O153.3; O154
文 献 标 识 码: A **文 章 编 号:** 0255-7797(2020)04-0461-12

1 引言

本文规定, R 恒指有单位元的交换环. 对 R - 模 N, $\mathrm{fd}_R N$ (resp. $\mathrm{pd}_R N$) 代表 N 的平坦 (resp. 投射) 维数. 用 $\mathcal{F}_n$ 表示平坦维数不超过 n 的 R - 模簇, 用 $w.\mathrm{gl.dim}(R)$ 表示 R 的弱整体维数. 对于未解释的概念和符号, 参考文献 [1, 2].

文献 [3] 引入的 FFD(R) 维数受到了广泛关注. 例如, 文献 [4, 推论 5.3] 表明, 一个 Noether 环 R, 总有 $\mathrm{FFD}(R) \le \dim(R) \le \mathrm{FFD}(R)+1$ 成立, 这里 $\dim(R)$ 是 R 的 Krull 维数; 特别地, 如果 R 是局部环, 则 $\mathrm{FFD}(R)=\dim(R)$ 当且仅当 R 是 Cohen-Macaulay 环.

称 R 是 chain 环是指其理想按包含关系所构成的格是全序的, R 称为 arithmetical 是指对 R 的每个极大理想 $\mathfrak{m}$, $R_{\mathfrak{m}}$ 是 chain 环. R 称为半凝聚环是指对任何一对内射模 E, F, $\mathrm{Hom}_R(E,F)$ 是某个平坦模的子模. 文献 [5, 定理 1] 证明了对每个交换的 arithmetical 环 R, 总有 $\mathrm{FFD}(R) \le 2$ 成立. 更确切地说, 当 R 为局部 IF (locally IF) 环时, $\mathrm{FFD}(R)=0$ 成立; 当 R 是局部半凝聚 (locally semicoherent) 环但不是局部 IF 环时, 都有 $\mathrm{FFD}(R)=1$, 这里环 R 称为 IF 环是指每个内射 R - 模是平坦模, (见文献 [6]). 文献 [5, 定理 2] 证明了当 R 既是 IF 环又是 chain 环时, 则 $\mathrm{FFD}(R)=0$; 当 R 是非半凝聚的 chain 环时, 都有 $\mathrm{FFD}(R)=2$.

在经典同调理论中, 环 R 的整体维数是所有模的投射维数 (或者内射维数) 的上确界; 弱整体维数 $w.\mathrm{gl.dim}(R)$ 是模的平坦维数的上确界. 在相对同调理论中, 环 R 的 Gorenstein 整体维数也是所有模的 Gorenstein 投射维数的上确界, 或者 Gorenstein 内射维数的上确界; Gorenstein 弱整体维数是所有模的 Gorenstein 平坦维数的上确界.

然而, 环的有穷平坦维数 FFD(R) 不是像经典同调理论和相对同调理论那样, 建立在整个 R - 模范畴上, 而是建立在平坦维数有限的子范畴上. 对任给一个模 M, 在判定其平坦维数是否有限时, 存在技术上的困难. 本文借助文献 [7] 中提出的 n - 无挠模, 建立了整个 R - 模范

*收稿日期: 2019-08-19 接收日期: 2020-02-27
基金项目: 西华师范大学 2017 年度博士科研启动专项项目基金资助 (11671283); 教育部博士点基金资助 (20125134110002); 国家自然科学基金青年科学基金项目基金资助 (11701398); 国家自然科学基金资助 (11671283).
作者简介: 熊涛 (1982–), 男, 四川巴中, 讲师, 主要研究方向: 交换代数和同调代数.

畴上的 n - 无挠分解, 任何模的 n - 无挠维数, 以及环 R 的 n - 无挠弱整体维数 $w.\mathcal{TF}_{\rm n}.{\rm D}(R)$. 证明了环 R 有 ${\rm FFD}(R)\le n$ 当且仅当 $w.\mathcal{TF}_{\rm n+1}.{\rm D}(R)\le n$, 通过这个结果, 将对 ${\rm FFD}(R)$ 的计算转换成了对 $w.\mathcal{TF}_{\rm n+1}.{\rm D}(R)$ 的计算.

2 环的有穷平坦维数

定义 2.1 对 R - 模 M, 用 $tf_n{\rm d}_RM$ 表示这样的最小整数 $m\ge 0$, 存在正合列 $0\to D_m\to D_{m-1}\to\cdots\to D_1\to D_0\to M\to 0$, 这里每个 D_i 是 n - 无挠模. 如果这样的整数 m 不存在, 则记 $tf_n{\rm d}_RM=\infty$. 相应地, 环 R 的 n - 无挠弱整体维数 $w.\mathcal{TF}_{\rm n}.{\rm D}(R)$ 定义为 $\sup\{tf_n{\rm d}_RM\,|\,M$ 是 R - 模$\}$.

作为余挠模的深层次发展, 文献 [8] 在整环上引入 Warfield - 余挠模的概念. 设 R 是整环, R - 模 U 称为 Warfield - 余挠模是指对任何无挠 R - 模 D, 都有 ${\rm Ext}^1_R(D,U)=0$. 文献 [9] 证明了整环上每个挠的 Warfield - 余挠模, 简称 UT - 模, 内射维数不超过 1. 对非负整数 n, 本文在任意环上引入 n -Warfield 余挠模. R - 模 U 称为 n-Warfield 余挠模是指对任何 n - 无挠 R - 模 D, 恒有 ${\rm Ext}^1_R(D,U)=0$ 成立. 显然, 0 -Warfield 余挠模就是内射模. 由文献 [8, 引理 2.3] 可知, 整环上的无挠模是 1 - 无挠模, 从而整环上的 Warfield 余挠模就是 1-Warfield 余挠模.

下文中, 对 R - 模 M, 其特征模 ${\rm Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 记为 M^+. 现在来刻画模的 n - 无挠维数.

定理 2.2 对 R - 模 M 及非负整数 m, 以下陈述等价

(1) $tf_n{\rm d}_RM\le m$;

(2) 对任何 R - 模 $N\in\mathcal{F}_n$, ${\rm Tor}^R_{m+1}(M,N)=0$;

(3) 对任何 n -Warfield 余挠 R - 模 U, 恒有 ${\rm Ext}^{m+1}_R(M,U)=0$ 成立.

进而, 对任何 $n\ge 0$, 任何 R - 模 M, 恒有 $tf_n{\rm d}_RM\le n$ 成立. 从而,$w.\mathcal{TF}_{\rm n}.{\rm D}(R)\le n$ 对任何环 R 都成立.

证 (2)$\Leftrightarrow$(1)$\Rightarrow$(3). 显然.

(3)$\Rightarrow$(2). 设 $0\to D_m\to D_{m-1}\to\cdots\to D_1\to D_0\to M\to 0$ 正合列, 这里 $D_0,D_1,\cdots,D_{m-1}$ 是 n - 无挠模. 设 $N\in\mathcal{F}_n$ 是任何 R - 模, X 是任何 n - 无挠 R - 模. 取正合列 $0\to A\to P\to X\to 0$, 这里 P 是投射模. 则序列 $0\to A\bigotimes_RN\to P\bigotimes_RN\to X\bigotimes_RN\to 0$ 是正合列. 其诱导序列 $0\to(X\bigotimes_RN)^+\cong{\rm Hom}_R(X,N^+)\to(P\bigotimes_RN)^+\cong{\rm Hom}_R(P,N^+)\to(A\bigotimes_RN)^+\cong{\rm Hom}_R(A,N^+)\to 0$ 也是正合列. 由正合列 ${\rm Hom}_R(P,N^+)\to{\rm Hom}_R(A,N^+)\to{\rm Ext}^1_R(X,N^+)\to{\rm Ext}^1_R(P,N^+)=0$, 可得 ${\rm Ext}^1_R(X,N^+)=0$. 从而 N^+ 是 n -Warfield 余挠模. 由假设 ${\rm Ext}^1_R(D_m,N^+)\cong{\rm Ext}^{m+1}_R(M,N^+)=0$ 成立. 由正合列 $0\to K\to F\to D_m\to 0$, 这里 F 是平坦模, 得到正合列 $0\to{\rm Hom}_R(D_m,N^+)\cong(D_m\bigotimes_RN)^+\to{\rm Hom}_R(F,N^+)\cong(F\bigotimes_RN)^+\to{\rm Hom}_R(K,N^+)\cong(K\bigotimes_RN)^+\to 0$. 再由其诱导序列 $0={\rm Tor}^R_1(F,N)\to{\rm Tor}^R_1(D_m,N)\to K\bigotimes_RN\to F\bigotimes_RN\to D\bigotimes_RN\to 0$, 可得 ${\rm Tor}^R_{m+1}(M,N)\cong{\rm Tor}^R_1(D_m,N)=0$, 即 ${\rm Tor}^R_{m+1}(M,N)=0$.

现在来刻画环的 $w.\mathcal{TF}_{\rm n}.{\rm D}(R)$ 维数.

定理 2.3 对环 R 及非负整数 $m\le n$, 以下陈述等价

(1) $w.\mathcal{TF}_{\rm n}.{\rm D}(R)\le m$;

(2) $\mathcal{F}_m=\mathcal{F}_n$;

(3) 对 R 的任何理想 I, $tf_n\mathrm{d}_R R/I \leq m$ 成立. 换言之, 如果 M 是循环 R - 模, $tf_n\mathrm{d}_R M \leq m$ 成立;

(4) 对 R 的任何有限生成理想 I, $tf_n\mathrm{d}_R R/I \leq m$;

(5) 如果 M 是有限生成 R - 模, $tf_n\mathrm{d}_R M \leq m$ 成立;

(6) 如果 M 是有限表现 R - 模, $tf_n\mathrm{d}_R M \leq m$ 成立;

(7) 如果 U 是 n -Warfield 余挠 R - 模, $\mathrm{id}_R U \leq m$ 成立.

证 由定理 2.2 可得 (7)⇒(1)⇔(2), 而 (1)⇒(5)⇒(3)⇒(4) 与 (5)⇒(6)⇒(4) 是显然的.

(4)⇒(1) 设 $m_1 = w.\mathcal{TF}_{\rm n}.\mathrm{D}(R)$. 则存在 R - 模 M 满足 $tf_n\mathrm{d}_R M = m_1$, 同时存在模 $N \in \mathcal{F}_n$ 满足 $\mathrm{Tor}^R_{m_1+1}(M,N) \neq 0$. 记 $s = \mathrm{fd}_R N$. 则 $m_1 \leq s \leq n$. 从而存在 R 的有限生成理想 I 满足 $\mathrm{Tor}^R_s(R/I,N) \neq 0$. 因此 $m \geq tf_n\mathrm{d}_R R/I \geq s \geq m_1$.

(3)⇒(7) 设 I 是 R 的理想. 则由假设, $tf_n\mathrm{d}_R R/I \leq m$ 成立. 由定理 2.2 可得 $\mathrm{Ext}^{m+1}_R(R/I,U) = 0$. 因此 $\mathrm{id}_R U \leq m$.

现在借助 $w.\mathcal{TF}_{\rm n}.\mathrm{D}(R)$, 来刻画 $\mathrm{FFD}(R)$.

定理 2.4 对环 R, 以下各条等价

(1) $\mathrm{FFD}(R) \leq n$;

(2) $w.\mathcal{TF}_{\rm n+1}.\mathrm{D}(R) \leq n$;

(3) $\mathrm{FFD}(R) = w.\mathcal{TF}_{\rm n}.\mathrm{D}(R)$.

证 (1) ⇒ (2) 设 $N \in \mathcal{F}_{n+1}$ 是任意 R - 模. 由假设, $\mathrm{fd}_R N \leq n$ 成立. 因此由定理 2.3 可得 $w.\mathcal{TF}_{\rm n+1}.\mathrm{D}(R) \leq n$.

(2)⇒(1) 设 N 是 R - 模满足 $\mathrm{fd}_R N = s < \infty$. 不失一般性, 可设 $s = n+1$. 则由定理 2.3, $\mathrm{fd}_R N \leq n$ 成立. 从而 $\mathrm{FFD}(R) \leq n$.

(3) ⇒ (1) 运用定理 2.3 即可.

(1) ⇒ (3) 设 $\mathrm{FFD}(R) = k < \infty$. 对任何模 $N \in \mathcal{F}_n$, 则 $\mathrm{fd}_R N \leq k$. 因此对任何 R - 模 M, 都有 $\mathrm{Tor}^R_{k+1}(M,N) = 0$ 成立. 故由定理 2.3, $w.\mathcal{TF}_{\rm n}.\mathrm{D}(R) \leq \mathrm{FFD}(R)$ 成立. 现在仍设 $w.\mathcal{TF}_{\rm n}.\mathrm{D}(R) = k$, N 是 R - 模满足 $\mathrm{fd}_R N < \infty$. 则由假设 $\mathrm{fd}_R N \leq n$ 成立. 故对任何 R - 模 M, 由定理 2.3 可得 $\mathrm{Tor}^R_{k+1}(M,N) = 0$. 因此 $\mathrm{fd}_R N \leq k$. 从而 $\mathrm{FFD}(R) \leq k$.

对 R - 模 M, 记满足对任何有限表现模 F, 都有 $\mathrm{Ext}^1_R(F,M) = 0$ 成立的最小非负整数 n 为 $\text{FP-id}_R M$. 如果这样的 n 不存在, 则记 $\text{FP-id}_R M = \infty$. 一个凝聚环 R 称为 n -FC 环是指 $\text{FP-id}_R R \leq n$. 由文献 [10, 命题 4.2.4], 有

命题 2.5 设 R 是 n -FC 环, 则 $\mathrm{FFD}(R) = n$.

推论 2.6 对环 R, 以下陈述等价

(1) $\mathrm{FFD}(R) \leq 1$;

(2) 2 - 无挠 R - 模的子模是 2 - 无挠模;

(3) 平坦 R - 模的子模是 2 - 无挠模;

(4) 对任何 R - 模 $N \in \mathcal{F}_2$, 都有 $\mathrm{fd}_R N \leq 1$;

(5) R 的每个(有限生成)理想 I 是 2 - 无挠模.

推论 2.7 $\mathrm{FFD}(R) = 0$ 当且仅当 $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0$, 当且仅当每个 R - 模是 1 - 无挠模.

文献 [5, 定理 1 &定理 2] 表明, 对局部 IF 环或者 chain IF 环 R, 恒有 $\mathrm{FFD}(R) = 0$. 事实上, 可以将这个结果推广到任意 IF 环上.

命题 2.8 设 R 是 IF 环, 则 $\mathrm{FFD}(R)=0$ 成立. 因此一个 IF 环 R 或者是 VN 正则环, 或者 $w.\mathrm{gl.dim}(R)=\infty$.

证 设 $M\in\mathcal{F}_1$ 是任意 R - 模, 且设 $0\to F_1\to F_0\to M\to 0$ 是正合列, 这里 F_0,F_1 是平坦模. 则 $0\to M^+\to F_0^+\to F_1^+\to 0$ 也是正合的, 且 F_0^+,F_1^+ 是内射模. 由假设, R 是 IF 环, 故 F_0^+,F_1^+ 是平坦模. 从而 M^+ 是平坦模. 如此则 M^{++} 也是平坦的. 注意 R 是凝聚环, 可由文献 [11] 推出 M 是平坦模. 从而由推论 2.7 有 $\mathrm{FFD}(R)=0$.

对于一个完全环 R, 由文献 [12] 及文献 [13, 定理 2.2] 可知, $\mathrm{FFD}(R)=0$ 成立. 但是满足 $\mathrm{FFD}(R)=0$ 的环, 却未必是 IF 环, 也未必是完全环. 现在给出一个满足 $\mathrm{FFD}(R)=0$, 但它既不是完全环, 也不是 IF 环的例子.

例 2.9 设 x_i 是有理数域 $\mathbb{Q}$ 的未定元. 取 $T=\mathbb{Q}[x_1,\cdots,x_n,\cdots]$, $\mathfrak{m}=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)$. 则 $R_1=T/\mathfrak{m}^2$ 是以 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 为唯一极大理想的局部环. 由于对任何 $\overline{x}_1\in R_1$, 其零化子 $\mathrm{ann}(\overline{x}_1)=\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. 因此 R_1 不是凝聚环, 从而也就不是 IF 环. 设 R_2 是非 Neother 的 IF 环. 则由文献 [6, 定理 3.2], R_2 不是完全环. 构造环 $R=R_1\times R_2$. 显然, $\mathrm{FFD}(R)=0$ 成立. 但 R 既不是完全环, 也不是 IF 环.

3 有穷平坦维数的换环定理

文献 [7] 中称 R - 模 C 是 n - 余挠模是指对任何 R - 模 $N\in\mathcal{F}_n$, 都有 $\mathrm{Ext}_R^1(N,C)=0$. 下文中, 用 $\mathcal{C}_n$ 与 $\mathcal{TF}_n$ 分别表示 n - 余挠 R - 模簇与 n - 无挠 R - 模簇. 现设 $\mathcal{A}$ 是一个 R - 模簇. 其左, 右正交类分别是 $\mathcal{A}^\perp=\{B\,|\,$对所有 $A\in\mathcal{A}$, 都有 $\mathrm{Ext}_R^1(A,B)=0\}$ 和 ${}^\perp\mathcal{A}=\{B\,|\,$对所有 $A\in\mathcal{A}$, 都有 $\mathrm{Ext}_R^1(B,A)=0\}$. 对两个 R - 模簇 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$, 模簇对 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 称为一个余挠理论, 或者余挠对文献 [1] 是指 $\mathcal{A}^\perp=\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{A}={}^\perp\mathcal{B}$ 同时满足. 文献 [14] 表明 $(\mathcal{F}_n,\mathcal{C}_n)$ 是余挠理论.

定理 3.1 对任意 R - 模 M 和 N, 存在正合列 $0\to A\to F\to M\to 0$ 与 $0\to N\to W\to B\to 0$, 这里 $F,B\in\mathcal{F}_n$, $A,W\in\mathcal{C}_n$.

证 运用文献 [14, 引理 1.11& 定理 2.8] 和文献 [15, 引理 2.1.1& 引理 2.1.2] 即可.

对任何 $n\geq 1$ 及任何环, 总有 $\mathcal{TF}_{n-1}\supseteq\mathcal{TF}_n$. 但一般情况下, 却未必有 $\mathcal{TF}_{n-1}=\mathcal{TF}_n$. 现在举一个环的例子, 满足对任何 $n\geq 1$, 都有 $\mathcal{TF}_{n-1}\supset\mathcal{TF}_n$.

例 3.2 设 F 是域, $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 是 F 上的未定元. 设 C 是 $R=F[x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots]$ 的 $(n-1)$ 阶上合冲. 则存在正合列 $0\to C\to C_{n-1}(C)\to B\to 0$, 这里 $C_{n-1}(C)\in\mathcal{C}_{n-1}$. 对任何 $n\geq 1$, 记 $J=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 由于 R 是凝聚整环, 则 $\mathrm{pd}_R R/J\leq n$. 从而存在一个投射分解 $0\to P_n\to P_{n-1}\to\cdots\to P_1\to R\to R/J\to 0$, 这里每个 P_i 是有限生成投射模. 取对偶, 可得正合列 $0\to R^*\to P_1^*\to\cdots\to P_{n-1}^*\to P_n^*\to\mathrm{Ext}_R^n(R/J,R)\to 0$. 记 $T=\mathrm{Ext}_R^n(R/J,R)$. 再取对偶. $0\to P_n^{**}\to P_{n-1}^{**}\to\cdots\to P_1^{**}\to R^{**}\to\mathrm{Ext}_R^n(T,R)\to 0$ 也是正合列. 由于对每个 $1\leq i\leq n$, 都有 $P_i\cong P_i^{**}$, 从而 $\mathrm{Ext}_R^n(T,R)\cong R/J\neq 0$. 构造商环 $R_1=R/(x_1)$. 则 $\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_n$ 是 R_1 的正则序列. 由于 R/J 是挠模, 由 Ress 定理可得 $\mathrm{Ext}_R^1(R/J,R)=\mathrm{Hom}_{R_1}(R/J,R_1)=0$. 当 $1<k<n$ 时, 对 k 用归纳法, 得到 $\mathrm{Ext}_R^k(R/J,R)=\mathrm{Ext}_{R_1}^{k-1}(R/J,R_1)=0$. 从而 $k<n$ 时, $\mathrm{Ext}_R^k(R/J,R)=0$ 成立. 注意 T 也是 R/J - 模. 设 $0\to A\to\bigoplus R/J\to T\to 0$ 是正合列. 从而由正合列 $0=\prod\mathrm{Ext}_R^{k-1}(R/J,R)\to\mathrm{Ext}_R^{k-1}(A,R)\to\mathrm{Ext}_R^k(T,R)\to\prod\mathrm{Ext}_R^k(R/J,R)=0$ 有 $\mathrm{Ext}_R^k(T,R)\cong\mathrm{Ext}_R^{k-1}(A,R)$. 下面证明, 对任何 R/J - 模 A 及 $s\leq n-1$, 都有 $\mathrm{Ext}_R^s(A,R)=0$.

对 s 用归纳法, 假设对任何 R/J - 模 A, 都有 $\mathrm{Ext}_R^{s-1}(A,R)=0$. 考虑正合列 $0\to K\to\bigoplus R/J\to A\to 0$, 由上述方法, 可得 $\mathrm{Ext}_R^s(A,R)\cong\mathrm{Ext}_R^{s-1}(K,R)=0$. 因此对任何 $k\le n-1$, 都有 $\mathrm{Ext}_R^k(T,R)=0$ 成立. 从而 $T\neq 0$. 设 K 是 R/J 的 $(n-1)$ 阶合冲. 由于 $K\in\mathcal{F}_n$, 故可由正合列 $\mathrm{Ext}_R^n(R/J,C_{n-1}(C))\to T\cong\mathrm{Ext}_R^n(R/J,C)\to\mathrm{Ext}_R^{n+1}(R/J,B)=0$ 得到 $\mathrm{Ext}_R^n(K,C_{n-1}(C))\cong\mathrm{Ext}_R^n(R/J,C_{n-1}(C))\neq 0$. 从而 $C_{n-1}(C)\notin\mathcal{C}_n$, 即是说 $\mathcal{C}_{n-1}\supset\mathcal{C}_n$. 由文献 [14, 引理 1.11& 定理 2.8], $(\mathcal{F}_n,\mathcal{C}_n)$ 是余挠理论, 故 $\mathcal{F}_{n-1}\subset\mathcal{F}_n$. 从而 $\mathcal{TF}_{n-1}\supset\mathcal{TF}_n$. 序列 $\mathcal{TF}_1\supset\mathcal{TF}_2\supset\cdots\supset\mathcal{TF}_n\supset\cdots$ 是严格递减的模簇序列.

现在给出有穷平坦维数的换环定理.

定理 3.3 设 $u\in R$ 既不是零因子也不是单位, 记 $\overline{R}=R/(u)$. 则

(1) $w.\mathcal{TF}_{\mathrm{n}}.\mathrm{D}(R)\ge w.\mathcal{TF}_{\mathrm{n-1}}.\mathrm{D}(\overline{R})+1$;

(2) $\mathrm{FFD}(R)\ge\mathrm{FFD}(\overline{R})+1$.

证 (1) 设 $m=w.\mathcal{TF}_{\mathrm{n-1}}.\mathrm{D}(\overline{R})$. 则存在 $\overline{R}$ - 模 $A\neq 0$ 满足 $tf_{n-1}\mathrm{d}_{\overline{R}}A=m$. 由定理 2.2, 存在 $\overline{R}$ - 模 B 满足 $\mathrm{fd}_{\overline{R}}B\le n-1$ 及 $\mathrm{Tor}_m^{\overline{R}}(A,B)\neq 0$. 运用定理 3.1 可得到两个正合列 $0\to B\to C\to C/B\to 0$ 满足 C 是 $(n-1)$ - 余挠 $\overline{R}$ - 模, 且 $\mathrm{fd}_{\overline{R}}C/B\le n-1$, 以及 $0=\mathrm{Tor}_{m+1}^{\overline{R}}(A,C/B)\to\mathrm{Tor}_m^{\overline{R}}(A,B)\to\mathrm{Tor}_m^{\overline{R}}(A,C)$. 从而有 $\mathrm{Tor}_m^{\overline{R}}(A,C)\neq 0$ 及 $\mathrm{fd}_{\overline{R}}C\le n-1$. 因此 $\mathrm{fd}_RC\le n$. 再由定理 3.1 可得正合列 $0\to C\to E\to E/C\to 0$ 满足 E 是 n - 余挠 R - 模, 且 $\mathrm{fd}_RE/C\le n$. 从而 $\mathrm{fd}_RE\le n$. 因为 $aC=0$, 所以 $C\subseteq E_u=\{x\in E\,|\,ux=0\}$ 成立. 由此可得行是正合列的交换图

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, equal] & E_u \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{cok}(\phi) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d, "u"] & E/C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & E \arrow[r, equal] \arrow[d] & E \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

如果 $\mathrm{cok}(\phi)\neq 0$, 则可由 $0=\mathrm{Tor}_{n+2}^R(E,Y)\to\mathrm{Tor}_{n+1}^R(\mathrm{cok}(\phi),Y)\to\mathrm{Tor}_{n+1}^R(E/C,Y)=0$ 得到 $\mathrm{fd}_R\mathrm{cok}(\phi)\le n$, 这里 Y 是任意 R - 模. 对任意 $\overline{R}$ - 模 X, 由于 $E=uE$, 则 $X\bigotimes_RE=0$ 成立, 且 $0\to E_u\to E\xrightarrow{u}E\to 0$ 是正合列. 从而自然有正合列 $\mathrm{Tor}_1^R(X,E)\xrightarrow{u}\mathrm{Tor}_1^R(X,E)\to X\bigotimes_RE_u\to 0$. 由于 $\mathrm{Tor}_1^R(X,E)\xrightarrow{u}\mathrm{Tor}_1^R(X,E)$ 是零同态, 从而序列 $0\to\mathrm{Tor}_1^R(X,E)\to X\bigotimes_RE_u\to 0$ 是正合列. 故有 $X\bigotimes_{\overline{R}}E_u=X\bigotimes_RE_u\cong\mathrm{Tor}_1^R(X,E)$. 现在设 F 是平坦 R - 模. 则它自然是 u - 无挠模且 $\mathrm{fd}_RF/uF=1$. 从而对任何 $n\ge 2$, 恒有 $\mathrm{Tor}_n^R(F/uF,E)=0$. 设 $0\to B\to P\to X\to 0$ 是 $\overline{R}$ - 模正合列, 这里 P 是自由 $\overline{R}$ - 模. 以下是行是正合列的交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^{\overline{R}}(X,E_u) \arrow[r] \arrow[d] & B\bigotimes_{\overline{R}}E_u \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & P\bigotimes_{\overline{R}}E_u \arrow[d, "\cong"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_2^R(X,E) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^R(B,E) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^R(P,E)
\end{tikzcd}$$

从而 $\mathrm{Tor}_2^R(X,E)\cong\mathrm{Tor}_1^{\overline{R}}(X,E_u)$. 当 $m>1$ 时, 对 n 用归纳法及同构关系 $\mathrm{Tor}_n^{\overline{R}}(X,E_u)\cong\mathrm{Tor}_{n+1}^R(X,E)=0$, 可得 $\mathrm{fd}_{\overline{R}}E_u\le n-1$. 因此 $\mathrm{fd}_{\overline{R}}\mathrm{cok}(\phi)<\infty$. 因此 $\mathrm{fd}_{\overline{R}}\mathrm{cok}(\phi)=\mathrm{fd}_R\mathrm{cok}(\phi)-$

$1 \le n-1$. 则有 $\mathrm{Ext}^1_{\overline{R}}(\mathrm{cok}(\phi), C) = 0$. 存在 E_u 的子模 A' 满足 $A' \cong \mathrm{cok}(\phi)$, 且 $E_u \cong A' \bigoplus C$. 由定理 3.1, $E/E_u \cong E$, 且 $\mathrm{fd}_R E/E_u \le n$. 设 $\pi: E_u \to E_u/A'$ 是自然同态, 则 $\pi\phi: C \to E_u/A'$ 是单的, 且 $\mathrm{cok}(\pi\phi) = E_u/(A' \bigoplus C) = 0$. 从而 $C \cong E_u/A'$. 再由定理 3.1, 存在正合列 $0 \to E_u/A' \xrightarrow{\phi'} B \to \mathrm{cok}(\phi') \to 0$, 这里 B 是 n - 余挠模, 且 $\mathrm{fd}_R\mathrm{cok}(\phi') \le n$. 则可得如下行是正合列的交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E_u/A' \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "\pi\phi"] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{cok}(\phi') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "\phi'\pi\phi"] & B \arrow[r] & \mathrm{cok}(\phi'\pi\phi) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

从而 $\mathrm{cok}(\phi'\pi\phi) \cong \mathrm{cok}(\phi')$, 且 $\mathrm{fd}_R\mathrm{cok}(\phi'\pi\phi) \le n$. 设 B 是 $\overline{R}$ - 模, 且 A 是 B 的子模, 满足 $\mathrm{fd}_{\overline{R}} B/A \le n-1$. 则由平坦维数的换环定理, 有 $\mathrm{fd}_R B/A \le n$. 对任何同态 $f: A \to E_u$, 考察如下交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, dashed, "g"] \\
& E_u \arrow[r] & E
\end{tikzcd}$$

注意, E 是 n - 余挠 R - 模, 则存在同态 $g: B \to E$ 满足 $f = gh$. 由于对任何 $x \in B$, 均有 $ux = 0$, 则 $g(ux) = ug(x) = 0$ 且 $\mathrm{Im}(g) \subseteq E_u$. 所以 E_u 是 $(n-1)$ - 余挠 $\overline{R}$ - 模. 注意到 $\mathrm{fd}_R E_u = \mathrm{fd}_{\overline{R}} E_u + 1 \le n$, 则存在同态 $g: B \to E_u$ 满足 $g\phi'\pi\phi = \phi$. 因此 $g\phi'\pi$ 是同构, π 是单同态. 故 $A' = 0$, 即 $C = E_u$. 从而 $\mathrm{Tor}^R_{m+1}(A, E) \cong \mathrm{Tor}^{\overline{R}}_m(A, E_u) = \mathrm{Tor}^{\overline{R}}_m(A, C) \ne 0$. 由定理 2.2, $k := tf_n\mathrm{d}_R A \ge m+1$ 成立. 假如 $k > m+1$, 由上面的证明过程可知, 存在 n - 余挠模 E 且 $\mathrm{fd}_R E \le n$ 保证 $\mathrm{Tor}^R_k(A, E) \cong \mathrm{Tor}^{\overline{R}}_{k-1}(A, E_u) \ne 0$ 成立. 这与 $tf_{n-1}\mathrm{d}_{\overline{R}} A = m$ 的事实是矛盾的. 这说明 $tf_n\mathrm{d}_R A = m+1$. 从而 $w.\mathcal{TF}_{\mathrm{n}}.\mathrm{D}(R) \ge m+1$ 成立.

(2) 记 $n = \mathrm{FFD}(R)$. 由定理 2.4, $w.\mathcal{TF}_{\mathrm{n+1}}.\mathrm{D}(R) \le n$ 成立. 由 (1), $w.\mathcal{TF}_{\mathrm{n}}.\mathrm{D}(\overline{R}) \le n-1$ 成立. 从而再由定理 2.4 可得 $\mathrm{FFD}(\overline{R}) \le n-1$.

定理 3.4 设 R 是整环, 则 $\mathrm{FFD}(R) \le 1$ 当且仅当对每个非单位元 $0 \ne u \in R$, 都有 $\mathrm{FFD}(R/(u)) = 0$.

证 设 $I \ne 0$ 是 R 的任何理想, 记 $M = R/I$. 任取 $0 \ne u \in I$, 由于 $uM = 0$, 则 M 是 $\overline{R}$ - 模. 记 $\overline{R} = R/(u)$. 由假设, $\mathrm{FFD}(R/(u)) = 0$ 成立. 运用定理 2.4, 可得 $w.\mathcal{TF}_1.\mathrm{D}(R/(u)) = \mathrm{FFD}(R/(u)) = 0$. 则 $tf_1\mathrm{d}_{\overline{R}} M = 0$ 也成立. 由定理 3.3, $tf_2\mathrm{d}_R M \le 1$. 由定理 2.3 可得 $w.\mathcal{TF}_2.\mathrm{D}(R) \le 1$. 再次运用定理 2.4, $\mathrm{FFD}(R) \le 1$ 成立. 运用定理 3.3, 另一个方向是显然的.

命题 3.5 设 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 是 R 上的未定元, 这里 $m \ge 1$. 则 $\mathrm{FFD}(R[x_1, \cdots, x_m]) = \mathrm{FFD}(R) + m$.

证 只需证 $\mathrm{FFD}(R[x_1]) = \mathrm{FFD}(R) + 1$. 设 $\mathrm{FFD}(R) = s$, N 是 $R[x_1]$ - 模满足 $\mathrm{fd}_{R[x_1]} N \le s+2$. 考察文献 [2, 引理 9.29] 中出现过的正合列 $0 \to N[x_1] \to N[x_1] \to N \to 0$, 有 $\mathrm{fd}_R N \le \mathrm{fd}_{R[x_1]} N \le 1 + \mathrm{fd}_{R[x_1]} N[x_1] = 1 + \mathrm{fd}_R N$, 从而 $\mathrm{fd}_R N \le s+2 < \infty$. 因此 $\mathrm{fd}_{R[x_1]} N \le s+1$. 则由定理 2.3 可得 $w.\mathcal{TF}_{\mathrm{s+2}}.\mathrm{D}(R[x_1]) \le s+1$. 运用定理 2.4, $\mathrm{FFD}(R[x_1]) \le s+1$ 成立. 另一方面, 由于 $R \cong R[x_1]/x_1R[x_1] = \overline{R[x_1]}$, 从而由定理 3.3, $\mathrm{FFD}(R[x_1]) \ge \mathrm{FFD}(\overline{R[x_1]}) + 1 = \mathrm{FFD}(R) + 1 = s+1$ 成立. 至此, 有 $\mathrm{FFD}(R[x_1]) = \mathrm{FFD}(R) + 1$.

定理 3.6 设 S 是 R 的乘法封闭集. 则 $\mathrm{FFD}(R_S) \leq \mathrm{FFD}(R)$.

证 不失一般性, 设 $m = \mathrm{FFD}(R) < \infty$. 设 N 是 R_S - 模, 且 $\mathrm{fd}_{R_S} N < \infty$, 从而 $\mathrm{fd}_R N = \mathrm{fd}_{R_S} N < \infty$, 有 $\mathrm{fd}_{R_S} N \leq m$. 从而有 $\mathrm{FFD}(R_S) \leq m$.

命题 3.7 设 R 是环, $\mathrm{Max}(R)$ (resp. $\mathrm{Spec}(R)$) 是 R 的极大 (resp. 素) 理想的集合. 则 $\mathrm{FFD}(R) = \sup\{\mathrm{FFD}(R_{\mathfrak{m}}) \mid \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)\} = \sup\{\mathrm{FFD}(R_{\mathfrak{p}}) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)\}$

证 只需证 $\mathrm{FFD}(R) = \sup\{\mathrm{FFD}(R_{\mathfrak{m}}) \mid \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)\}$, 另一个断语类似可得. 不失一般性, 设 $t = \mathrm{FFD}(R) < \infty$, $s = \sup\{\mathrm{FFD}(R_{\mathfrak{m}}) \mid \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)\} < \infty$. 对任何 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$, 由定理 3.6, $\mathrm{FFD}(R_{\mathfrak{m}}) \leq t$ 成立. 所以有 $s \leq t$. 另一方面, 设 N 是 R - 模满足 $k = \mathrm{fd}_R N < \infty$. 则存在正合列 $0 \to F_k \to F_{k-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to N \to 0$, 这里每个 F_i 是平坦模. 对任何 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$, 序列 $0 \to (F_k)_{\mathfrak{m}} \to (F_{k-1})_{\mathfrak{m}} \to \cdots \to (F_1)_{\mathfrak{m}} \to (F_0)_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}} \to 0$ 是正合的, 且每个 $(F_i)_{\mathfrak{m}}$ 是平坦 $R_{\mathfrak{m}}$ - 模. 则由假设, $\mathrm{fd}_{R_{\mathfrak{m}}} N_{\mathfrak{m}} \leq s$ 成立. 则 $\mathrm{fd}_R N = \sup\{\mathrm{fd}_{R_{\mathfrak{m}}} N_{\mathfrak{m}} \mid \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)\} \leq s$. 故 $t = \mathrm{FFD}(R) \leq s$. 因此 $s = t$, 即 $\mathrm{FFD}(R) = \sup\{\mathrm{FFD}(R_{\mathfrak{m}}) \mid \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)\}$.

4 凝聚环的有穷平坦维数

凝聚环 R 的弱整体维数 $w.\mathrm{gl.dim}(R)$ 一直备受学者们关注. 本节中, 将研究凝聚环的有穷平坦维数.

定义 4.1 R - 模 Q 称为 n - 投射模是指对任何内射维数不超过 n 的模 H, 都有 $\mathrm{Ext}_R^1(Q, H) = 0$.

自然地, 任何 R - 模都是 0 - 投射模; 投射 R - 模都是 n - 投射模, 这里 $n \geq 1$.

引理 4.2 (1) 当 $n \geq 1$ 时, 每个 n - 投射模是 n - 无挠模;

(2) 设 R 是凝聚环. 当 $n \geq 1$ 时, 每个有限生成的 n - 无挠 R - 模是 n - 投射模.

证 (1) 设 M 是 n - 投射模, N 是 R - 模且满足 $\mathrm{fd}_R N \leq n$. 则存在正合列 $0 \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \to N \to 0$, 这里 $F_0, \cdots, F_{n-1}, F_n$ 是平坦 R - 模. 从而 $0 \to N^+ \to F_0^+ \to \cdots \to F_{n-1}^+ \to F_n^+ \to 0$ 也是正合列, 每个 F_i^+ 是内射模. 从而 $\mathrm{id}_R N^+ \leq n$. 由文献 [16, 定理 4.6.9], $\mathrm{Tor}_1^R(M, N)^+ \cong \mathrm{Ext}_R^1(M, N^+) = 0$ 成立. 从而 $\mathrm{Tor}_1^R(M, N) = 0$. 故 M 是 n - 无挠模.

(2) 设 M 是有限生成的 n - 无挠模, N 是 R - 模且满足 $\mathrm{id}_R N \leq n$. 则存在正合列 $0 \to N \to E_0 \to \cdots \to E_{n-1} \to E_n \to 0$, 这里每个 E_i 是内射 R - 模. 从而 $0 \to E_n^+ \to E_{n-1}^+ \to \cdots \to E_0^+ \to N^+ \to 0$ 也是正合列, 且由文献 [10, 定理 2.2.13], 每个 E_i^+ 是平坦模. 从而 $\mathrm{fd}_R N^+ \leq n$. 再由文献 [10, 定理 2.2.13], $\mathrm{Ext}_R^1(M, N)^+ \cong \mathrm{Tor}_1^R(M, N^+) = 0$ 成立. 从而 $\mathrm{Ext}_R^1(M, N) = 0$. 故 M 是 n - 投射模.

为了刻画 $\mathrm{FFD}(R) \leq 2$ 的凝聚环, 先做如下定义.

定义 4.3 设 M 是 R - 模. M 的 n - 投射维数 $m \geq 0$, 记为 $n\text{-}\mathrm{pd}_R M \leq m$, 是指存在这样的最小整数 m, 满足序列 $0 \to Q_m \to Q_{m-1} \to Q_{m-2} \to \cdots \to Q_0 \to M \to 0$ 是正合列, 这里每个 Q_i 是 n - 投射模. 如果这样的 m 不存在, 则记 $n\text{-}\mathrm{pd}_R M = \infty$.

引理 4.4 设 R 是凝聚环. 对任何整数 $n \geq 1$, 都有

(1) 若 M 是有限生成 R - 模, 则 $n\text{-}\mathrm{pd}_R M = tf_n\mathrm{d}_R M$;

(2) $w.\mathcal{TF}_{\mathrm{n}}.\mathrm{D}(R) = \sup\{ n\text{-}\mathrm{pd}_R M \mid M \text{ 是有限表现模} \}$.

证 (1) 设 $tf_n\mathrm{d}_R M = k$. 从而有正合列 $0 \to F_k \to F_{k-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$, 其中 $F_0, F_1, \cdots, F_{k-1}$ 是有限生成投射模. 注意 F_k 是 M 的第 $k-1$ 个合冲. 则 F_k 是 n - 无

挠模. 由于 R 是凝聚环, 有 F_k 是有限表现的. 因此由引理 4.2, F_k 是 n - 投射模. 于是有 n -$\mathrm{pd}_R M \leq tf_n\mathrm{d}_R M$. 再由引理 4.2, n -$\mathrm{pd}_R M \geq tf_n\mathrm{d}_R M$ 成立. 故 n -$\mathrm{pd}_R M = tf_n\mathrm{d}_R M$.

(2) 由 (1) 即得.

定理 4.5 设 R 是凝聚环. 对任何整数 $n \geq 0$, 以下等价

(1) $\mathrm{FFD}(R) \leq n$; (2) 对每个有限生成 R - 模 M, 都有 $(n+1)$ -$\mathrm{pd}_R M \leq n$; (3) 对 R 的任何有限生成理想 I, 都有 $(n+1)$ -$\mathrm{pd}_R R/I \leq n$.

证 (1)⇔(2) 由定理 2.4 和引理 4.4 即可得证.

(2)⇒(3) 显然.

(3)⇒(1) 设 I 是 R 的有限生成理想. 则 R/I 是有限表现模. 由条件, $(n+1)$ -$\mathrm{pd}_R R/I \leq n$ 成立. 运用引理 4.4, $tf_{n+1}\mathrm{d}_R R/I = (n+1)$ -$\mathrm{pd}_R R/I \leq n$ 成立. 由此运用定理 2.3 可得 $w.\mathcal{TF}_{\mathrm{n+1}}.\mathrm{D}(R) \leq n$. 故由定理 2.4, $\mathrm{FFD}(R) \leq n$ 成立.

命题 4.6 设 R 是凝聚环. 对任何整数 $n \geq 0$, 都有

(1) 如果 $\mathrm{FFD}(R) = n$, 则对任何有限表现自反 R - 模 M 都有 $(n+1)$ -$\mathrm{pd}_R M \leq n-2$;

(2) 如果 $\mathrm{FFD}(R) \leq 2$, 则任何有限生成自反 R - 模 M 都是 3 - 投射模.

证 (1) 运用文献 [16, 定理 5.1.4], M^* 是有限表现的. 设 $F_1 \to F_0 \to M^* \to 0$ 是正合列, 其中 F_1, F_0 是有限生成自由模. 考虑正合列 $0 \to M^{**} = M \to F_0^* \to F_1^* \to X \to 0$, 其中 F_0^* 与 F_1^* 也是有限生成自由模, X 是同态 $F_0^* \to F_1^*$ 的上核. 注意, X 是也是有限表现模. 由定理 4.5 可得 $(n+1)$ -$\mathrm{pd}_R X \leq n$, 有 $(n+1)$ -$\mathrm{pd}_R M \leq n-2$.

(2) 由 (1) 即得.

定理 4.7 设 R 是凝聚环, 则以下各条等价

(1) $\mathrm{FFD}(R) \leq 2$; (2) 设 M 是有限表现 R - 模, 则 M^* 是有限生成 3 - 投射模; (3) 对投射模 P 的任意有限生成子模 M, 则 $tf_3\mathrm{d}_R M \leq 1$; (4) 对 R 的任意有限生成理想 I, 则 $tf_3\mathrm{d}_R I \leq 1$.

证 (1)⇒(2) 设 M 是有限表现 R - 模. 则存在正合列 $F_1 \to F_0 \to M \to 0$, 这里 F_0,F_1 是有限生成自由 R - 模. 则 $0 \to M^* \to F_0^* \to F_1^* \to C \to 0$ 也是正合列, 这里 $C = \mathrm{cok}(F_0^* \to F_1^*)$. 由条件, $\mathrm{FFD}(R) \leq 2$ 成立, 则由定理 2.4 可得 $w.\mathcal{TF}_3.\mathrm{D}(R) \leq 2$. 故 $tf_3\mathrm{d}_R C \leq 2$. 注意, F_0^*, F_1^* 均是有限生成投射模, 故 M^* 是 3 - 无挠模. 注意, R 是凝聚环, 从而 M^* 是有限表现模. 由引理 4.2, M^* 是有限生成 3 - 投射模.

(2)⇒(1) 设 M 是任意 R - 模. 则 $M = \varinjlim M_i$, 这里每个 M_i 是 M 的有限表现子模, 对每个 M_i, 存在有限生成自由模 F_{i0},F_{i1} 满足序列 $F_{i1} \to F_{i0} \to M_i \to 0$ 是正合列. 记 $K_i = \ker(F_{i1} \to F_{i0})$. 注意 $0 \to M_i^* \to F_{i0}^* \to F_{i1}^* \to C \to 0$ 是正合列, 这里 $C = \mathrm{cok}(F_{i0}^* \to F_{i1}^*)$. 从而 C 是有限表现模. 由条件, C^* 是有限生成 3 - 投射模. 由文献 [17, 引理 3] 可得 $K \cong C^*$ 是有限生成 3 - 投射模. 故由引理 4.4 可得 $tf_3\mathrm{d}_R M_i = 3$ -$\mathrm{pd}_R M_i \leq 2$. 故对任何 R - 模 N 满足 $\mathrm{fd}_R N \leq 3$, 由定理 2.2 有 $\mathrm{Tor}_3^R(M = \varinjlim M_i, N) \cong \varinjlim \mathrm{Tor}_3^R(M_i, N) = 0$. 再由定理 2.2 可得 $tf_3\mathrm{d}_R M \leq 2$. 故 $w.\mathcal{TF}_3.\mathrm{D}(R) \leq 2$. 则由定理 2.4 可得 $\mathrm{FFD}(R) \leq 2$.

(1)⇔(3)⇔(4) 运用定理 4.5 和引理 4.4 即可.

正如人们把满足 $w.\mathrm{gl.dim}(R) \leq 1$ 的凝聚环 R 称为半遗传环, 在文献 [18] 中把满足 G -$w.\mathrm{gl.dim}(R) \leq 1$ 的凝聚环 R 称为 G - 半遗传环一样, 现在将满足 $\mathrm{FFD}(R) \leq 1$ 的凝聚环 R 称为 finitistic 半遗传环, 并且遵循把半遗传整环称为 Prüfer 整环, G - 半遗传整环称为 G -Prüfer 整环 (见文献 [19]) 的习惯, 也将 finitistic 半遗传整环称为 finitistic Prüfer 整环. 知

道环 R 是半遗传环当且仅当投射模的有限生成子模是投射模当且仅当 R 的每个有限生成理想是投射理想. 自然地, 要问, 对于 finitistic 半遗传环, 是否也有对应的表述? 对此, 有以下定理.

定理 4.8 对环 R, 以下陈述等价

(1) R 是 finitistic 半遗传环;

(2) R 的每个有限生成理想是有限表现的 2 - 投射模;

(3) 投射模的每个有限生成子模是有限表现的 2 - 投射模;

(4) R 是凝聚环, 且平坦模的子模是 2 - 无挠模;

(5) R 是凝聚环, 且对每个有限表现模 M, 都有 $2\text{-pd}_R M \le 1$;

(6) R 是凝聚环, 且对每个有限表现模 M, 都有 $tf_2\text{d}_R M \le 1$.

证 运用推论 2.6 可得 (1)⇒(4), 运用引理 4.2 可得 (4)⇒(3), 运用引理 4.4 可得 (5)⇔(6), 而 (3)⇒(5)⇒(2) 是显然的. 现只证 (2)⇒(1). 设 I 是 R 的任何有限生成理想. 由假设, I 是 2 - 投射模, 从而 $tf_2\text{d}_R R/I \le 1$. 由定理 2.3, $w.\mathcal{TF}_2.\text{D}(R) \le 1$ 成立. 再由定理 2.4 可得 $\text{FFD}(R) \le 1$. 注意, 由条件, I 是有限表现的, 故是凝聚环. 从而 R 是 finitistic 半遗传环.

设 R 是交换环. 称 R - 模 M 是无挠模是指对 $x \in M$ 及非零因子非单位 $a \in R$, 能由 $ax = 0$ 推出 $x = 0$. 注意, 平坦模是无挠模. 众所周知, 整环 R 是 Prüfer 整环 (即 $w.\text{gl.dim}(R) \le 1$) 当且仅当无挠 R - 模是平坦模. 对于满足 $\text{FFD}(R) \le 1$ 的整环 R 上的无挠模, 有如下定理

定理 4.9 对整环 R, 以下陈述等价

(1) $\text{FFD}(R) \le 1$; (2) 如果 A 是无挠 R - 模满足 $\text{fd}_R A < \infty$, 则 A 是平坦模; (3) 如果 A 是无挠 R - 模满足 $\text{fd}_R A \le 1$, 则 A 是平坦模.

证 (1) ⇒ (2) 记 $K = Q/R$, 这里 Q 是 R 的商域. 由于 A 是无挠模, 存在正合列 $0 \to A \to B = K \bigotimes_R A \cong \bigoplus\limits_i K_i \to C = (K \bigotimes_R A)/A \to 0$, 这里每个 $K_i \cong K$. 由于 B 是平坦 R - 模且 $\text{fd}_R A < \infty$, 故 $\text{fd}_R C < \infty$. 由条件, $\text{FFD}(R) \le 1$, 故 $\text{fd}_R C \le 1$. 所以 A 是平坦模.

(2) ⇒ (3) 显然.

(3) ⇒ (1) 设 N 是 R - 模满足 $\text{fd}_R N \le 2$. 则存在正合列 $0 \to A \to F \to N \to 0$, 这里 F 是平坦模, 且 $\text{fd}_R A \le 1$. 注意, A 是无挠 R - 模. 由条件, A 是平坦模, 即 $\text{fd}_R N \le 1$. 因此由推论 2.6, $\text{FFD}(R) \le 1$ 成立.

知道, 整环 R 是 Prüfer 整环当且仅当有限生成无挠 R - 模是投射模. 对于 finitistic Prüfer 整环, 有如下定理.

定理 4.10 对凝聚整环 R, 以下陈述等价

(1) R 是 finitistic Prüfer 整环; (2) 每个无挠 R - 模是 2 - 无挠模; (3) 每个有限生成无挠 R - 模是 2 - 投射模.

证 (1)⇒(2) 设 D 是无挠 R - 模. 则由文献 [8, 引理 2.3], D 是 1 - 无挠模. 运用定理 2.4 与定理 2.3 可得 D 是 2 - 无挠模.

(2)⇒(1) 设 I 是 R 的理想. 从而 I 是无挠 R - 模. 由条件, I 是 2 - 无挠的. 由推论 2.6 可得 $\text{FFD}(R) \le 1$.

(2)⇒(3) 设 M 是有限生成无挠 R - 模, 自然也是无挠模. 由条件, M 是 2 - 无挠模. 注意, R 是凝聚整环, 运用引理 4.2, M 是 2 - 投射模.

(3)⇒(2) 设 M 是无挠 R - 模. 则 $M=\varinjlim M_i$, 这里每个 M_i 是 M 的有限生成子模, 自然也是无挠 R - 模. 由条件, M_i 是 2 - 投射模. 由引理 4.2 可知 M_i 是 2 - 无挠模. 故对任何 R - 模 N 满足 $\mathrm{fd}_R N\le 2$, 有 $\mathrm{Tor}_1^R(M=\varinjlim M_i,N)\cong\varinjlim\mathrm{Tor}_1^R(M_i,N)=0$. 故 M 是 2 - 无挠模.

正如所有满足 $w.\mathrm{gl.dim}(R)\le 1$ 的环 R 不一定是凝聚环一样, 满足 $\mathrm{FFD}(R)\le 1$ 的环 R 也未必是凝聚环.

例 4.11 设 $\mathbb{C}$ 是复数域, X 是 $\mathbb{C}$ 的未定元. 构造环 $R=\mathbb{Q}+X\mathbb{C}[X]$. 则由文献文献 [20], 文献 [21, 命题 3.2]及文献 [22, 命题 6]及文献 [23, 定理 4.11]可知 $\mathrm{FFD}(R)\le 1$ 成立, 但 R 不是凝聚环.

设 R 是整环, 商域是 K. 设 $F(R)$ 是 R 的所有非零分式理想的集合, $f(R)$ 是 $F(R)$ 中所有有限生成元的集合. 对任何 $0\ne I\in F(R)$, 其逆 I^{-1} 定义为 $\{x\in K\,|\,xI\subseteq R\}$. 理想 $I\in f(R)$ 称为 GV - 理想是指 $I^{-1}=R$. 记 $\mathrm{GV(R)}=\{I\in f(R)\,|\,\mathrm{I}$ 是 R 的 GV - 理想$\}$. 在文献 [24] 中, 整环 R 称为 DW - 整环是指 $\mathrm{GV(R)}=\{R\}$. 众所周知, Prüfer 整环是 DW - 整环.

命题 4.12 设 R 是 finitistic Prüfer 整环. 则 R 是DW- 整环.

证 设 $J\ne 0$ 是 R 的有限生成真理想. 取 $0\ne a\in J$, 记 $T=R/(a)$. 由定理 3.4, $\mathrm{FFD}(T)=0$ 成立. 则 $I=J/(a)$ 是 T 的有限生成真理想. 记 $I=(b_1,\cdots,b_n)$, 这里 $b_1,\cdots,b_n\in T$. 如果 $\mathrm{ann}(I)=0$, 则同态映射 $f:T\to T^s$, $f(r)=(b_1r,\cdots,b_nr)$, $r\in T$ 是单射. 从而序列 $0\to T\xrightarrow{f}T^s\to\mathrm{cok}(f)\to 0$ 是正合列, 且 $\mathrm{cok}(f)$ 是有限表现模. 注意, $\mathrm{fd}_T\mathrm{cok}(f)\le 1$ 且 $\mathrm{FFD}(T)=0$, 则 $\mathrm{cok}(f)$ 是投射模, 且 $\mathrm{Tor}_1^T(T/I,\mathrm{cok}(f))=0$. 则 $\overline{f}:T/I\to T^s/IT^s$ 也是单射. 由 $\mathrm{Im}(f)\subseteq IT^s$ 可得到 $\overline{f}=0$ 与 $I=T$. 显然这是一个矛盾. 因此 $\mathrm{ann}(I)\ne 0$. 从而存在元素 $b\in R-(a)$ 满足 $I(b+(a))=0$, 故 $Jb\subseteq(a)$. 则 $\frac{b}{a}\notin R$ 与 $J\frac{b}{a}\subseteq R$ 成立. 因此 $\mathrm{GV(R)}=\{R\}$, 即 R 是 DW - 整环.

现在来研究满足 $\mathrm{FFD}(R)=0$ 的整环. 设 R 是整环. 对内射 R - 模 E, E 自然是可除模, 即对非单位元 $0\ne a\in R$, 都有 $E=aE$. 从而乘法同态 $a:E\to E$ 是满的, 且序列 $0\to E_a\to E\xrightarrow{a}E\to 0$ 是正合列. 确切地, 乘法同态 a 是同构当且仅当 E 是 a - 无挠的.

定理 4.13 对整环 R, 以下陈述等价

(1) R 是域; (2) 每个 Warfield 余挠模是内射模; (3) 每个 UT 模是内射模; (4) $\mathrm{FFD}(R)=0$.

证 (1)⇒(4) 与 (2)⇒(3) 是显然的. 在定理 2.4 中取 $n=0$ 可得 (4)⇒(2). 现证 (3)⇒(1). 假如 R 不是域. 则存在挠的内射 R - 模 $E\ne 0$. 从而也存在非单位元 $0\ne a\in R$ 满足 E 不是 a - 无挠的. 则 $E_a\ne 0$. 由如下行是正合列的交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E_a \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\cong"] & E \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(R/(a),E) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(R,E) \arrow[r, "a"] & \mathrm{Hom}_R(R,E) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

可得 $E_a\cong\mathrm{Hom}_R(R/(a),E)$. 设 X 是任何无挠 R - 模. 取正合列 $0\to A\to P\to X\to 0$, 这里 P 是投射模. 注意, $\mathrm{fd}_R R/(a)\le 1$ 成立, 则由文献 [8, 引理 2.3] 可得正合列 $0=\mathrm{Tor}_1^R(R/(a),X)\to A/aA\to P/aP\to X/aX\to 0$. 从而序列 $0\to\mathrm{Hom}_R(X/aX,E)\cong\mathrm{Hom}_R(X,E_a)\to\mathrm{Hom}_R(P/aP,E)\cong\mathrm{Hom}_R(P,E_a)\to\mathrm{Hom}_R(A/aA,E)\cong\mathrm{Hom}_R(A,E_a)\to 0$ 是正合列. 故由正合列 $\mathrm{Hom}_R(P,E_a)\to\mathrm{Hom}_R(A,E_a)\to\mathrm{Ext}_R^1(X,E_a)\to 0$ 可得 $\mathrm{Ext}_R^1(X,E_a)=0$. 因此 E_a 是 Warfield - 余挠模. 从而 E_a 是 UT - 模. 由条件, E_a 是内射模. 另一方面, 由于

$aE_a = 0$, 可得 E_a 不是 a - 可除的. 故 E_a 不是可除模, 自然也不是内射模. 这显然是个矛盾. 故 R 是域.

试举几个例子来结束本文. 首先, 凝聚环 R 也未必有 $\mathrm{FFD}(R) \le 1$.

例 4.14 构造环 $R = \mathbb{Z}[x]$, 这里 $\mathbb{Z}$ 是整数集, x 是 $\mathbb{Z}$ 上的未定元. 显然, R 是凝聚环. 如果 $\mathrm{FFD}(R) \le 1$, 则由定理3.4可得 $\mathrm{FFD}(R/xR) = 0$. 而 $\mathbb{Z} \cong R/xR$. 故由定理4.13可知 $\mathbb{Z}$ 是域. 这显然是个矛盾. 所以 $\mathrm{FFD}(R) > 1$.

虽然对所有环 R, 均有 $\mathrm{FFD}(R) \le w.\mathrm{gl.dim}(R)$. 但一般情况下, $\mathrm{FFD}(R) = w.\mathrm{gl.dim}(R)$ 未必成立.

例 4.15 设 D 是 Prüfer 整环, 其商域是 L, F 是 L 的扩域满足 $[F : L] = \infty$. 设 $T_1 = F[[x]]$ 是 F 上的形式幂级数环, 且设 $M = xF[[x]]$. 构造如下两个 Milnor 方图

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r] \arrow[d] & T_1 \arrow[d] \\ D \arrow[r] & L \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

构造 $T = L + xF[[x]]$ 及 $R = D + xF[[x]]$. 运用文献 [23, 定理 4.7 及定理 4.11]可得右边 Milnor 方图中 T 不是凝聚环且 $\mathrm{FFD}(T) = 1$. 从而对于左边的 Milnor 方图, 由文献 [25, 定理 3.9] 可得 $\mathrm{FFD}(R) = 1$, 且再次运用文献 [23, 定理 4.7 及定理 4.11]可得 R 不是凝聚环. 故 R 不是 Prüfer 整环, 即 $w.\mathrm{gl.dim}(R) \ne 1$.

环 R 满足 $\mathrm{FFD}(R) < \infty$. 却未必有 $w.\mathrm{gl.dim}(R) < \infty$.

例 4.16 设 $\mathbb{C}(X, Y)$ 是多项式环 $\mathbb{C}[X, Y]$ 的商域, Z 是 $\mathbb{C}(X, Y)$ 上的未定元. 取其极大理想 $\mathfrak{m} = (Z)$. 构造环 $R_1 = \mathbb{C}[X, Y] + Z\mathbb{C}(X, Y)[Z]_{\mathfrak{m}}$. 再构造环 $R_2 = \mathbb{Z}_4$, 这里 $\mathbb{Z}$ 是整数环. 则 R_2 是完全环, 且 $w.\mathrm{gl.dim}(R_2) = \infty$. 构造环 $R = R_1 \times R_2$. 则 $\mathrm{FFD}(R) = 2$ 成立. 由文献 [13, 例 4.6], $w.\mathrm{gl.dim}(R) = \infty$.

即使环 R 有 $w.\mathrm{gl.dim}(R) = \infty$, 也未必有 $\mathrm{FFD}(R) < \infty$.

例 4.17 设 $R = (\mathbb{Z} + x\mathbb{Q}[x]_{\mathfrak{m}}) \times \mathbb{Z}_4$, 这里 x 是有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的未定元, $m = (x)$ 是 $\mathbb{Q}[x]$ 的极大理想. 则 $\mathrm{FFD}(R) = 1$ 成立. 设 $T = R[y_1, y_2, \cdots]$, 这里 $y_1, y_2, \cdots$ 是 R 上的未定元. 由命题 3.5, $\mathrm{FFD}(T) = \infty$. 自然也有 $w.\mathrm{gl.dim}(T) = \infty$.

参 考 文 献

[1] Enochs E E, Jenda O M G. Relative homological algebra[M]. Vol. 30, Berlin, New York: Walter de Gruyter Exp. Math., 2000.

[2] Rotman J J. An Introduction to homological algebra[M]. New York: Academic Press, 1979.

[3] Bass H. Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings[J]. Trans. Amer. Math. Soc. 1960, 95: 466–488.

[4] Bass H. Injective dimension in Noetherian rings[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1962, 102: 18–29.

[5] Couchot F. Finitistic weak dimension of commutative arithmetical rings[J]. Arab J. Math., 2012, 1: 63–67.

[6] Jain S. Flat and FP-injectivity[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, 41: 437–442.

[7] Enochs E E, Huang Z Y. Injective envelopes and (Gorenstein) flat covers[J]. Algebra Represent Theor., 2012, 15: 1131–1145.

[8] Lee S B. Weak-injective modules[J]. Comm. Algebra, 2006, 34: 361–370.
[9] Kaplansky I. The splitting of modules over integral domains[J]. Arch Math., 1962, 13: 341–343.
[10] Chen J L, Zhang X X. Coherent rings and FP-injective rings[M]. Beijing: Science Press, 2014.
[11] Cheatham T J, Stone D R. Flat and projective character modules[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1981, 33: 385–390.
[12] Vasconcelos W V. The rings of dimension two[M]. Lect. Notes Pure Appl. Math., Vol. 22. New York, Basel: Marcel Dekker, Inc., 1976.
[13] Bennis D, Mahdon N. On n -perfect rings snd cotorsion dimension[J]. J. Pure Appl. Algebra, 2009, 8(1): 1–10.
[14] Trlifaj J. Covers, envelopes and cotorsion theories[C]. Cortona: Lecture Notes for the Workshop Homological Methods in Module Theory, 2000.
[15] Xu J Z. Flat covers of modules[M]. Lecture Notes in Math., Berlin: Springer-Verlag, 1996.
[16] 王芳贵, 交换环与星型算子理论 [M]. 北京: 科学出版社, 2006.
[17] Jones M F, Teply M. L. Coherent rings of finite weak global dimension[J]. Comm. Algebra, 1982, 10(5): 493–503.
[18] Mahdou N, Tamekkante M. On (strongly) Gorenstein (semi)hereditary rings[J]. Arab J. Sci. Eng., 2011, 36: 431–440.
[19] Qiao L, Wang F G. A Gorenstein analogue of a result of Bertin[J]. J. Pure Appl. Algebra, 2015, 14(2): 1550019-1–1550019-13.
[20] Salce L. Almost perfect domains and their modules[A]. Fontana M, Salah E K , Bruce O. Noetherian and non-Noetherian perspectives[C]. Commutative Algebra, New York: Springer, 2010: 363–386.
[21] Abuhlail J, Jarrar M. Tilting modules over almost perfect domains[J]. J. Pure Appl. Algebra, 2011, 215: 2024–2033.
[22] Jensen C U. On the vanishing of $\varprojlim^{(i)}$[J]. J. Algebra, 1971, 15: 155–166.
[23] Gabelli S, Houston E. Coherentlike conditions in pullbacks[J]. Michigan Math. J., 1997, 44(1): 99–123.
[24] Mimouni A. Integral domains in which each ideal is a w -ideal[J]. Comm. Algebra, 2005, 33: 1345–1355.
[25] Wang F G, Kim H, Xiong T. Finitistic weak dimensions of pullbacks[J]. J. Pure Appl. Algebra, 2020, 224: 1–12.

THE HOMOLOGICAL TRANSFORMATION CHARACTERIZATION OF THE FINITISTIC FLAT DIMENSION

XIONG Tao

(*College of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong 637002, China*)

Abstract: In this paper, the finitistic flat dimension FFD(R) of rings is studied. By using homological transformation, the homological calculation method of FFD(R) is obtained. Thus, the change theorem of rings of FFFD(R) and the calculation method of this dimension over coherent rings are given.

Keywords: finitistic flat dimension; change theorem of rings; coherent rings

2010 MR Subject Classification: 16E05; 16E10