Vol. 40 (2020)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

拓扑半群上概率测度序列组合收敛性的若干极限定理

严 慧, 徐立峰, 徐 侃
(湖北师范大学数学与统计学院, 湖北 黄石 435002)

摘 要: 本文研究了拓扑半群上概率测度序列 $\{\mu_n\}$ 的组合收敛性, 即卷积序列 $\mu_{k,n} := \mu_{k+1} * \mu_{k+2} * \cdots * \mu_n$ 的极限性质. 通过对概率测度支撑集代数结构的研究, 首先得到可数离散半群上概率测度序列组合收敛的一个充分条件, 它推广了经典的 Marksimov 定理, 也推广和改进了文献中已有的一些结果. 其次给出了局部紧 H 半群上概率测度卷积序列 $\{\mu_{k,n} : 0 \le k < n\}$ 极限点集的一个构造定理, 它是群上经典结果在这类半群上的推广.

关键词: 拓扑半群; 概率测度; 组合收敛
MR(2010) **主题分类号**: 60B15 **中图分类号**: O211.1
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2020)03-0354-09

1 引言

设 $\{\mu_n\}$ 是拓扑半群 S 上的概率测度序列, 组合收敛 (composition convergence) 是指对任意 $k \ge 0$, $\mu_{k,n} := \mu_{k+1} * \mu_{k+2} * \cdots * \mu_n$ 时的弱收敛性 $(n \to \infty)$, 其中概率测度 μ' 与 μ'' 的卷积运算"$*$" 按通常方式定义, 即对集合 $B \subset S$,

$$\mu' * \mu''(B) := \int_S \mu'\{y \in S : y \cdot x \in B\}\mu''(dx). \tag{1.1}$$

概率测度序列的组合收敛性长期以来一直是代数概率论的核心课题之一 [1−8]. 概率论中许多极限问题, 例如 Markov 链的极限分布问题常常可以归结为某个半群上概率测度序列的组合收敛性.

众所周知, 在 Markov 链的研究中, 非时齐 Markov 链的极限分布问题至今仍是一个重要而困难的问题 (参见专著 [9] §8.3), 组合收敛性理论与方法为此问题提供了一个可供选择的工具. 例如考虑以 $E = \{1, 2, 3\}$ 为状态空间的非时齐马链 $\{X_k\}$, 其转移矩阵为 $\{T_k\}$

$$T_k = \begin{bmatrix} p_1(k) & p_2(k) & p_3(k)+p_4(k) \\ p_1(k) & p_2(k) & p_3(k)+p_4(k) \\ p_3(k) & p_4(k) & p_1(k)+p_2(k) \end{bmatrix}, \tag{1.2}$$

则马链 $\{X_k\}$ 依分布收敛即矩阵乘积

$$T_{k,n} := T_{k+1}T_{k+2}\cdots T_n \tag{1.3}$$

的收敛性 $(n \to \infty)$ (未考虑初始分布).

*收稿日期: 2019-05-23 接收日期: 2019-06-24
基金项目: 湖北省教育厅资助科研项目 (D20172501; B2018148)
作者简介: 严慧 (1983–), 女, 湖北黄梅, 讲师, 主要研究方向: 概率论与数理统计.

记

$$B_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},B_2=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},B_3=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix},B_4=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},$$

则 $T_k=\sum\limits_{i=1}^{4}p_i(k)B_i$, 易于验证 $S=\{B_1,B_2,B_3,B_4\}$ 构成一个矩阵半群. 在 S 上定义概率测度 $\mu_k(B_i)=p_i(k)(i=1,2,3,4)$, 则 (1.3) 中 $T_{k,n}$ 的收敛性即 $\mu_{k,n}=\mu_{k+1}*\mu_{k+2}*\cdots*\mu_n$ 的弱收敛性. 关于模型 (1.2) 更详细的讨论可参见文献 [2].

对于组合收敛性的研究已有较长的历史, 最著名的结果是如下的 Maksimov 定理. 设 S 为有限群, 若存在常数 $c>0$, 及自然数 N, 使

$$\mu_n(\{e\})\geq c,\qquad \forall n\geq N,\tag{1.4}$$

则 $\{\mu_n\}$ 组合收敛, 其中 e 是 S 的单位元, (1.4) 被称为 Maksimov 条件, 以后的各种判据大多建立在 Maksimov 条件之上的. 例如 [10] 将此定理作了如下推广: 设 S 是至多可数离散（赋予离散拓扑）群, 在 Maksimov 条件 (1.4) 下, 若还存在有限子群 G 使 $\sum\mu_n(S-G)<\infty$, 则 $\{\mu_n\}$ 组合收敛. 而文献 [11] 对于有单位元 e 的可数离散半群 S 证明了 $\{\mu_n\}$ 组合收敛的一个充分条件是 $\sum\mu_n(S-\{e\})<\infty$, 显然此条件也蕴含 Marksiov 条件 (1.4).

早期较为深入的研究工作大多建立在 S 为群的基础之上的, 但从应用的角度考虑, 更需要 S 为半群的情况. 由于一般半群结构过于单薄, 很难得到有价值的结果, 故目前的工作大多是讨论各种具体类型的半群 (例如参见文献 [1–3, 12–16] 等). 例如模型 (1.2) 中的 S 就是一个完全简单半群 (参见文献 [2]), 这是在结构上与群最为接近的半群. 如同专著 [12] 前言中所指出的, 从理论上讲, 所有有限状态马链的极限分布问题都可以表示为某个半群上概率测度序列的组合收敛性问题. 但构造具有特定性质的基半群 (模型 (1.2) 中的 S) 并建立与之相应的判据则需要较高的技巧.

本文着重考虑了组合收敛性中两个问题. 第一, 给出一类离散半群上概率测度序列组合收敛的充分性判据 (定理 2.6), 这类半群包含了许多被广泛讨论的拓扑代数结构. 该判据的作用在于将一般半群 S 上概率测度的组合收敛性问题转化为代数性质更好的子半群或群上概率测度的组合收敛性问题. 作为推论, 它推广了一些已知的结果. 第二, 讨论了当 S 为带有紧核的 H 半群时, $\{\mu_{k,n},0\leq k<n\}$ 聚点集的构造, 完成了文献 [13] 中遗留的问题, 推广了经典的“收敛类型的等价性”(Equivalence of Types of Convergence) 定理, 这类定理常被用来作为组合收敛性判据的基础性定理 [2].

本文安排如下: 第 2 节中给出必要的预备知识及主要结果; 第 3 节中给出定理的证明.

2 主要结果的陈述

本文中 S 总表示局部紧半群, 即一个代数半群 S 带一个局部紧拓扑, 以使得乘法运算 $(x,y)\mapsto x\cdot y$ 是连续的. $P(S)$ 表示 S 的 Borel 域 $\mathcal{B}(S)$ 上概率测度的集合.

对集合 $A,B\subset S$ 和 $x\in S$, $x^{-1}A:=\{y\in S,x\cdot y\in A\}$, $Ax^{-1}:=\{y\in S,y\cdot x\in A\}$, $B^{-1}A:=\bigcup_{x\in B}x^{-1}A$, $AB^{-1}:=\bigcup_{x\in B}Ax^{-1}$. 于是对 $\mu,\nu\in P(S)$,

$$\mu*\nu(B)=\int_S\mu(By^{-1})\nu(dy)=\int_S\nu(y^{-1}B)\mu(dy).$$

本文中测度的收敛恒指弱收敛, δ_x 表示 x 处的点测度, $E(A)$ 为集 A 中幂等元集合.

定义 2.1 $e \in E(S)$ 称为本原幂等元, 若对任意的 $f \in E(S)$, $ef = fe = f \Rightarrow e = f$, 含有本原幂等元的简单半群 (不含真理想) 称为完全简单半群.

对 $\mu \in P(S)$, 用 $\operatorname{supp}(\mu)$ 或 S_μ 表示 μ 的支撑集, 支撑集有如下简单性质: (i) S_μ 是闭集; (ii) 对 $\mu_1, \mu_2 \in P(S)$, $S_{\mu_* \mu_2} = \overline{S_{\mu_1} \cdot S_{\mu_2}}$; (iii) 设 $\lambda \in P(S), \lambda^2 = \lambda$ (幂等测度), 则 S_λ 是完全简单半群.

定义 2.2 $\mu \in P(S)$ 称为不变测度, 若 $\forall x \in S_\mu$, $\delta_x * \mu = \mu * \delta_x = \mu$. 特别地, 若还有 $S_\mu = G$ 是一个群, 则称 μ 是 G 上的 Haar 测度, 并将 μ 记为 W_G. 对 $\mu \in P(S)$, 定义 $H(\mu) = \{x \in S : \mu = \mu * \delta_x\}, K(\mu) = \{x \in S : \mu = \delta_x * \mu\}$. 有如下利用测度的支撑集刻划测度不变性的基本结果.

引理 2.3 设 S 是局部紧群或 Abelian 半群, 对 $\mu, \nu \in P(S)$ 以下结果成立

$$\mu * \nu = \mu \Leftrightarrow S_\nu \subset H(\mu), \tag{2.1}$$

$$\nu * \mu = \mu \Leftrightarrow S_\nu \subset K(\mu). \tag{2.2}$$

群的场合见文献 [6, 定理 1.2.7], Abelian 半群的场合见文献 [10, 定理 2.1].

注 (2.1), (2.2) 式对一般半群不成立, 反例参见文献 [12, P.71]. 但有一个弱形式: $\mu = \mu * \nu \Leftrightarrow S_\nu \subset H(\mu * \delta_x), \forall x \in S_\mu$ (参见文献 [4, 命题 3.14]).

定义 2.4 设 $\{\mu_n\} \subset P(S)$, 若 $\forall k \geq 0$, $\mu_{k,n} = \mu_{k+1} * \mu_{k+2} * \cdots * \mu_n \to \nu_k \in P(S)\,(n \to \infty)$, 则称 $\{\mu_n\}$ 组合收敛, 若还有 $\nu_k \to \lambda\,(k \to \infty)$, 则称 $\{\mu_n\}$ 强组合收敛于 λ. 相对于组合收敛, 强组合收敛序列有更好的极限性质, 例如参见文献 [2, 17–19].

本文中总假设 $\{\mu_{k,n}, 0 \leq k < n\}$ 胎紧 (tight), 这是组合收敛的必要条件, 也是讨论卷积序列极限性质的基本假设 [13,18,20,21].

如下 Csiszar 定理是讨论组合收敛性的基本工具, 可以在许多文献中见到, 如文献 [2, 3, 12, 22] 等.

引理 2.5 (Csiszar 定理) 设 S 是局部紧半群, 若 $\{\mu_{k,n} : 0 \leq k < n\}$ 胎紧, 则对任意子序列 $\{n_i\} \subset \{n\}$, 存在子列 $\{p_i\} \subset \{n_i\}$ 使 $\forall k > 0$,

$$\mu_{k,p_i} \to \nu_k (p_i \to \infty), \nu_{p_i} \to \lambda = \lambda^2\,(p_i \to \infty), \nu_k = \nu_k * \lambda. \tag{2.3}$$

本文主要结果如下.

定理 2.6 设 S 是可数离散半群, $\{\mu_n\} \subset P(S)$, G 是 S 的一个子群, 若以下条件成立

(c$_1$) $GG^{-1} = G^{-1}G$.

(c$_2$) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}[1 - \mu_n(GG^{-1})] < \infty$.

(c$_3$) $\{\sigma_n\}$ 强组合收敛到 GG^{-1} 上的概率测度 λ, 其中 $\sigma_n(B) := \dfrac{\mu_n(B \cap GG^{-1})}{\mu_n(GG^{-1})}, B \in \mathcal{B}(S)$. 则 $\{\mu_n\}$ 强组合收敛到 λ.

注 1 当 S 为群、Abelian 半群、$L-X$ 半群、完全简单的 H 半群或含有单位元的半群时条件 (c_1) 都成立.

注 2 文献 [12] 定理 2.25 证明: 当 S 为紧群或紧 Abelian 半群时, 如果 $\{\mu_n\}$ 强组合收敛到 W_G, 则 $\forall$ 开集 $U \supset G$, 有 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}[1 - \mu_n(UU^{-1})] < \infty$. 文献 [23] 定理 3, 文献 [24] 定理 4

分别将这一结果推广到 S 为紧 $L-X$ 半群和局部紧 H 半群. 注意到在离散拓扑下群 G 本身也是开集, 这说明在许多场合条件 (c_2) 对于强组合收敛是一个必要条件.

注 3 条件 (c_3) 表明, 在条件 (c_2) 下 $\{\mu_n\}$ 的组合收敛性是由 μ_n 在 GG^{-1} 上的性质所决定的. 因而定理 2.6 提供了一种方法: 把 $\{\mu_n\}\subset P(S)$ 的组合收敛问题转化为 $\{\sigma_n\}$ 的组合收敛性, 由于 σ_n 是 GG^{-1} 上的概率测度, 而 G 是子群, GG^{-1} 具有更加良好的性质, 问题常可简化. 下面的推论 2.7 就是一个例子.

推论 2.7 设 S 是以 e 为单位元的可数离散半群, $\{\mu_n\}\subset P(S)$, 若

(i) 存在有限子群 G, 使 $\sum\mu_n(S-G)<\infty$.

(ii) $e\in G, \mu_n(\{e\})\geq c, n\geq N$, 其中 c 为某个正常数, N 为某个自然数 (即 Maksimov 条件成立). 则 $\{\mu_n\}$ 强组合收敛于 W_H (G 的某个子群 H 上的 Haar 测度).

证 首先证明此时有 $GG^{-1}=G$. 因 $e\in G$, 显然 $G\subset GG^{-1}$, 反之由 $GG^{-1}=\bigcup_{x\in G}Gx^{-1}$, 只要证 $\forall x\in G, Gx^{-1}\subset G$. 事实上 $\forall y\in Gx^{-1}=\{y: y\cdot x\in G\}$, 因为 G 是群 e 是 S 中的单位元, 当 $y\cdot x\in G$ 自然有 $y\in x^{-1}\cdot G\subset G$, 因此 $GG^{-1}=G$.

在定理 2.6 中, 此时 $\sigma_n(B)=\dfrac{\mu_n(B\cap G)}{\mu_n(G)}$, 因 $S_{\sigma_n}\subset G$, 故 $\{\sigma_n\}\subset P(G)$ 且当 $n\geq N$ 时, $\sigma_n(\{e\})=\dfrac{\mu_n(\{e\}\cap G)}{\mu_n(G)}=\dfrac{\mu_n(\{e\})}{\mu_n(G)}\geq c$. 由 Maksimov 定理 $\{\sigma_n\}$ 组合收敛, 设 $\sigma_{k,n}\to\pi_k\,(n\to\infty)$, 因 G 紧, 由文献 [7] 定理 2 存在 G 的子群 H 上的 Haar 测度 W_H, 使 $\pi_k\to W_H\,(k\to\infty)$, 于是由定理 2.6 即得所需要的结论.

注 推论 2.7 在与文献 [10] 相同的条件下, 将 Maksimov 定理推广到带有单位元的可数离散半群, 但文献 [10] 中要求 S 是群. 文献 [11] 也考虑了 S 为带有单位元的可数离散半群, 得到 $\{\mu_n\}$ 组合收敛的一个充分条件是 $\sum\mu_n(S-\{e\})<\infty$ (此条件显然也蕴含了 Maksimov 条件 ii), 推论 2.7 的条件远弱于此条件. 文献 [13] 中给出组合收敛的充分条件与推论 2.7 的相同, 但要求 S 是带有单位元的可数离散 H 半群.

下面考虑 $\{\mu_{k,n}, 0\leq k<n\}$ 的极限点集的构造. 记 $\mathcal{A}_k=\{\nu_k:\nu_k\text{是}\{\mu_{k,n}\}_{n>k}\text{的极限点}\}$, $\mathcal{A}_\infty=\{\nu:\text{存在}\{\nu_k\}\subset\mathcal{A}_k,\nu\text{是}\{\nu_k\}\text{ 的极限点}\}$. 由于本文中 $\{\mu_{k,n}:0\leq k<n\}$ 胎紧, 此时 $\mathcal{A}_k$ 也是胎紧的, 故 $\mathcal{A}_k,\mathcal{A}_\infty$ 都非空. 在组合收敛性的研究中, $\mathcal{A}_k,\mathcal{A}_\infty$ 是重要研究对象 (见文献 [2, 19, 25]).

当 $\{\mu_n\}$ 组合收敛时 $\mathcal{A}_k$ 是单点集, 强组合收敛时 $\mathcal{A}_\infty$ 也是单点集. 对于一般情形不少作者讨论了 $\mathcal{A}_k,\mathcal{A}_\infty$ 的构造, Maksimov 首先在紧群 G 上证明: $\forall\nu_k,\nu_k'\in\mathcal{A}_k$, 存在 $x,x'\in G$ 使

$$\nu_k'=\nu_k*\delta_x,\quad \nu_k=\nu_k'*\delta_{x'} \tag{2.4}$$

对于 $\mathcal{A}_\infty(\{\nu_k\})$ ($\{\nu_k\}$ 的极限点集), 则证明 $\forall\nu\in\mathcal{A}_\infty(\{\nu_k\})$ 存在 $x\in G$ 使

$$\nu=W_H*\delta_x, \tag{2.5}$$

其中 W_H 是 G 的某个子群 H 上的 Haar 测度. Csiszar, Tortrat 先后在可分群及更一般的拓扑群上证明了 (2.4), (2.5) 式 (见文献 [6]). 文献中把这类构造定理统称为“收敛类型的等价性”(Equivalence of Type of Convergence) 定理, 它常被用来作为判定组合收敛性的基础性定理 [2]. 文献 [13] 将 (2.4) 式在代数结构上推广到带有紧核 K 的局部紧 H 半群 S 上: $\forall\nu_k,\nu_k'\in\mathcal{A}_k$, 存在 $x,x'\in K$, 使

$$\nu_k'*\delta_e=\nu_k*\delta_x,\ \ \nu_k*\delta_e=\nu_k'**\delta_{x'}. \tag{2.6}$$

其中 e 是 S 的核 K 的单位元.

本文则将继续文献 [13] 定理 1.3 的工作, 将 (2.5) 式推广到相同的半群上.

定义 2.8　称 S 是 H 半群, 若 S 中的幂等元有交换性, 即对 $e, f \in E(S)$ 有 $ef = fe$. 由文献 [13] 引理 2.2, H 半群的完全简单子半群是 S 的子群.

定理 2.9　设 S 是具有紧核 K 的 H 半群, 按照引理 2.5 中的记号, 设 $\nu_k = \nu_k(p_i)$ (即 $\mu_{k,p_i} \to \nu_k, p_i \to \infty$), $k \geq 0, \{p_i\} \subset \{n\}$. 记 $\mathcal{A}_\infty(\{\nu_k\})$ 为 $\{\nu_k\}$ 的极限点集, 则 $\forall \nu \in \mathcal{A}_\infty(\{\nu_k\})$, 存在 $x \in K$ 使

$$\nu * \delta_e = W_G * \delta_x, \tag{2.7}$$

其中是 $G := \bigcap_{k\geq 0} H(\nu_k * \delta_e)$ 是 S 的子群, e 是 S 的核 K 的单位元.

由于紧半群都有紧核因此有

推论 2.10　若 S 是紧 H 半群, 则定理 2.9 的结论成立.

3　定理 2.6, 定理 2.9 的证明

定理 2.6 的证明　**第 1 步**　证明 $GG^{-1} := \bigcup_{x\in G} Gx^{-1}$ 是 S 的子半群. 事实上, $\forall y_1, y_2 \in GG^{-1} = G^{-1}G$, 存在 $x_1, x_2 \in G$ 使 $y_1 \in x_1^{-1}G, y_2 \in Gx_2^{-1}$, 即 $x_1y_1 \in G$, $y_2x_2 \in G$. 因 G 是子群, $x_1y_1 \cdot y_2x_2 \in G$, 故 $y_1 \cdot y_2x_2 \in x_1^{-1}G \subset G^{-1}G = GG^{-1} \Rightarrow$ 存在 $x_3 \in G$, $y_1y_2x_2 \in Gx_3^{-1} \Rightarrow y_1 \cdot y_2 \in (Gx_3^{-1})x_2^{-1}$, 即 $y_1 \cdot y_2 \in G(x_2x_3)^{-1} \subset GG^{-1}$, 故 GG^{-1} 是 S 的一个子半群.

由级数与无穷乘积之间关系, $\sum_{n=1}^{\infty}[1-\mu_n(GG^{-1})]$ 收敛等价于 $\prod_{n=1}^{\infty}\mu_n(GG^{-1})$ 收敛, 故由条件 (c_2) 可取 $\varepsilon_k \downarrow 0 (k \to \infty)$, 使

$$\prod_{j=k+1}^{\infty}\mu_j(GG^{-1}) \geq 1 - \varepsilon_k. \tag{3.1}$$

第 2 步　证明在全变差范数意义下有

$$\|\mu_{k,n} - \sigma_{k,n}\| \leq 2\varepsilon_k, k \geq 0, \quad n > k, \tag{3.2}$$

其中 $\sigma_{k,n} := \sigma_{k+1} * \sigma_{k+2} * \cdots * \sigma_n$,

$$\begin{aligned}\|\mu_{k,n} - \sigma_{k,n}\| \quad &\leq \quad \|\mu_{k,n} - \mu_{k+1}(GG^{-1})\sigma_{k+1} * \mu_{k+2}(GG^{-1})\sigma_{k+2} * \cdots * \mu_n(GG^{-1})\sigma_n\| \\ &\quad\quad +\|\mu_{k+1}(GG^{-1})\sigma_{k+1} * \mu_{k+2}(GG^{-1})\sigma_{k+2} * \cdots * \mu_n(GG^{-1})\sigma_n - \sigma_{k,n}\| \\ &:= \quad I_1 + I_2. \end{aligned}\tag{3.3}$$

对 $A \in \mathcal{B}(S)$, 由 (3.1) 式, $0 \leq \sigma_{k,n}(A) - \mu_{k+1}(GG^{-1})\sigma_{k+1} * \mu_{k+2}(GG^{-1})\sigma_{k+2} * \cdots * \mu_n(GG^{-1})\sigma_n(A) = \sigma_{k,n}(A)[1 - \prod_{j=k+1}^{n}\mu_j(GG^{-1})] < \varepsilon_k$, 故

$$I_2 < \varepsilon_k. \tag{3.4}$$

再考虑 I_1, 设 μ'_k 是 μ_k 在 GG^{-1} 上的限制, 即对 $A \in \mathcal{B}(S)$, $\mu'_k(A) := \mu_k(A \cap GG^{-1}) = \mu_k(GG^{-1})\sigma_k(A), k = 1, 2, \cdots, n$. 记 $\mu'_{k,n} = \mu'_{k+1} * \cdots * \mu'_n$, 并注意到 $\mu'_k(A) = \mu'_k(A \cap GG^{-1})$,

于是

$$\begin{aligned}0 &\leq \mu_{k,n}(A)-\mu_{k+1}(GG^{-1})\sigma_{k+1}*\mu_{k+2}(GG^{-1})\sigma_{k+2}*\cdots*\mu_n(GG^{-1})\sigma_n(A)\\ &= \mu_{k,n}(A)-\mu'_{k,n}(A)=\mu_{k,n}(A\cap GG^{-1})+\mu_{k,n}(A\cap(GG^{-1})^c)-\mu'_{k,n}(A\cap GG^{-1}).\end{aligned}$$

对 n 采用归纳法证明: $\forall B\subset GG^{-1}$, 有

$$0\leq \mu_{k,n}(B)-\mu'_{k,n}(B)<\varepsilon_k. \tag{3.5}$$

注意到在 GG^{-1} 上 $\mu'_j=\mu_j\,(j>0)$, 故由归纳假设

$$\begin{aligned}\mu'_{k,n}(B) &= \int_{GG^{-1}}\mu'_{k,n-1}(Bx^{-1})\mu'_n(dx)\geq\int_{GG^{-1}}[\mu_{k,n-1}(Bx^{-1})-\varepsilon_k]\mu'_n(dx)\\ &= \int_{GG^{-1}}\mu_{k,n-1}(Bx^{-1})\mu_n(dx)-\varepsilon_k\mu_n(GG^{-1})\\ &= \mu_{k,n}(B)-\int_{(GG^{-1})^c}\mu_{k,n-1}(Bx^{-1})\mu_n(dx)-\varepsilon_k\mu_n(GG^{-1})\\ &\geq \mu_{k,n}(B)-\mu_{k,n-1}((GG^{-1})^c)\mu_n((GG^{-1})^c)-\varepsilon_k\mu_n(GG^{-1}).\end{aligned}\tag{3.6}$$

注意到 GG^{-1} 是半群, 利用不等式

$$\mu*\nu(A\cdot B)\geq\mu(A)\nu(B),\quad \mu_{k,n-1}(GG^{-1})\geq\mu_{k,n-1}((GG^{-1})^{n-k-1})\geq\prod_{j=k+1}^{n-1}\mu_j(GG^{-1})>1-\varepsilon_k,$$

故

$$\mu_{k,n-1}((GG^{-1})^c)=1-\mu_{k,n-1}(GG^{-1})<\varepsilon_k. \tag{3.7}$$

将 (3.7) 式代入 (3.6) 式, $\mu'_{k,n}(B)\geq\mu_{k,n}(B)-\varepsilon_k\mu_n((GG^{-1})^c)-\varepsilon_k\mu_n(GG^{-1})=\mu_{k,n}(B)-\varepsilon_k$, 故 (3.5) 式成立. 将 (3.4), (3.5) 式代入 (3.3) 式, 得到 (3.2) 式.

第 3 步 利用 (3.2) 式证明 $\mathcal{A}_\infty=\{\lambda\}$(单点集). 事实上, 由 $\{\sigma_n\}$ 的强组合收敛性, 可设

$$\sigma_{k,n}\to\pi_k\ (n\to\infty),\ \ k\geq 0,\quad \pi_k\to\lambda\ \ (k\to\infty). \tag{3.8}$$

$\forall\lambda'\in\mathcal{A}_\infty$, $\exists\{k_i\}\subset\{k\}$ 使

$$\lambda_{k_i}\in\mathcal{A}_{k_i},\ \ \lambda_{k_i}\to\lambda'\ \ (k_i\to\infty). \tag{3.9}$$

对每个 $\lambda_{k_i}\in\mathcal{A}_{k_i}$, 设 $\{n_i\}\subset\{n\}$ 使

$$\mu_{k_i,n_i}\to\lambda_{k_i}\quad(n_i\to\infty). \tag{3.10}$$

记 $\rho(\cdot,\cdot)$ 为 $P(S)$ 中的弱收敛距离, 则

$$\rho(\pi_{k_i},\lambda')\leq\rho(\pi_{k_i},\sigma_{k_i,n_i})+\rho(\sigma_{k_i,n_i},\mu_{k_i,n_i})+\rho(\mu_{k_i,n_i},\lambda_{k_i})+\rho(\lambda_{k_i},\lambda').$$

先后令 $n_i\to\infty$, $k_i\to\infty$, 由 (3.8), (3.2), (3.10), (3.9) 式得 $\rho\,(\pi_{k_i},\lambda')\to 0\ (k_i\to\infty)$, 由 (3.8) 式 $\lambda'=\lambda$, 即 $\mathcal{A}_\infty=\{\lambda\}$ 为单点集.

最后用反证法完成定理 2.6 的证明. 设 $\{\mu_n\}$ 不组合收敛. 但由引理 2.5 存在子列 $\{p_i\}\subset\{n\}$, 使

$$\mu_{k,p_i}\to\lambda_k\ \ (p_i\to\infty),\ \ k\geq 0, \tag{3.11}$$

且当 $p_i\to\infty$ 时, $\lambda_{p_i}\to\lambda\in\mathcal{A}_\infty$. 由于 $\mathcal{A}_\infty=\{\lambda\}$ 是单点集故

$$\lambda_k\to\lambda\ \ (k\to\infty). \tag{3.12}$$

由于 $\{\mu_n\}$ 不组合收敛, 存在 $k_0\geq 0$ 使 $\mu_{k_0,n}\nrightarrow\lambda_{k_0}$ $(n\to\infty)$. 由 Billingsley[26] 定理 2.3, 存在子列 $\{m_i\}\subset\{n\}$ 使

$$\{\mu_{k_0,m_i}\}_{i\geq 1}\text{的任何子列不收敛到}\lambda_{k_0}. \tag{3.13}$$

对 $\{m_i\}$ 再次使用引理 2.5, 存在子列 $\{q_i\}\subset\{m_i\}$, 使

$$\mu_{k,q_i}\to\lambda'_k\ \ (q_i\to\infty),\ \ k\geq 0, \tag{3.14}$$

且当 $q_i\to\infty$ 时, $\lambda'_{q_i}\to\lambda\in\mathcal{A}_\infty$. 同样由于 $\mathcal{A}_\infty=\{\lambda\}$ 是单点集

$$\lambda'_k\to\lambda\ \ (k\to\infty). \tag{3.15}$$

且由 (3.13) 式 $\lambda'_{k_0}\neq\lambda_{k_o}$. $\forall l>t>k_0$,

$$\mu_{k_0,l}=\mu_{k_0,t}*\mu_{t,l}, \tag{3.16}$$

在 (3.16) 式中先后取 $l=p_i$ 及 $l=q_i$, 并令 $p_i\to\infty, q_i\to\infty$, 由 (3.11), (3.14) 式得

$$\lambda_{k_0}=\mu_{k_0,t},*\lambda_t\ ,\ \lambda'_{k_0}=\mu_{k_0,t}*\lambda'_t, \tag{3.17}$$

在 (3.17) 式中令 $t=p_i$, 并令 $p_i\to\infty$, 由 (3.12), (3.15) 式 $\lambda_{k_0}=\lambda_{k_0}*\lambda$, $\lambda'_{k_0}=\lambda_{k_0}*\lambda$, 于是 $\lambda_{k_0}=\lambda'_{k_0}$, 得到所需要的矛盾, 故 $\{\mu_n\}$ 组合收敛. 由 $\mathcal{A}_\infty=\{\lambda\}$, 完成了定理 2.6 的证明.

定理 2.9 的证明 由假设, 对 $k\geq 0$

$$\mu_{k,p_i}\to v_k(p_i)\,(p_i\to\infty),\quad v_{p_i}\to\lambda=\lambda^2\ (p_i\to\infty),\quad v_k=v_k*\lambda. \tag{3.18}$$

$\forall v\in\mathcal{A}_\infty(\{v_k\})$, 设 $v_{k_i}\to v(k_i\to\infty)$, 对任意的 $k<k_i<p_i$, $\mu_{k,p_i}=\mu_{k,k_i}*\mu_{k_i,p_i}$, 令 $p_i\to\infty$, 得 $v_k=\mu_{k,k_i}*v_{k_i}$. 特别地, 取 k 为 $\{p_i\}$ 的子列 $\{p'_i\}$, 则有 $v_{p'_i}=\mu_{p'_i,k_i}*v_{k_i}$. 因存在 $\{k_i\}$, $\{p'_i\}$ 的子列 n'_i, n''_i, 使当 $n'_i, n''_i\to\infty$ 时, $\mu_{n'_i,n''_i}\to\lambda_0\in\mathcal{A}_\infty$(文献 [6] 定理 2.2.2), 故有 $\lambda=\lambda_0*v$. 对换 p_i 与 k_i 可得, $v=\lambda'_0*\lambda$, $\lambda'_0*\mathcal{A}_\infty$, 于是 $\lambda*\delta_e=\lambda_0*v*\delta_e$, $v*\delta_e=\lambda'_0*\lambda*\delta_e$.

将此二式与文献 [13] 中 (24), (25) 式对比, 用与文献 [13] 定理 1.3 中证明 $v_k*\delta_e=v'_k*\delta_e*\delta_x$ 完全相同的方法可以得到, 存在 $x\in K$, 使

$$v*\delta_e=\lambda*\delta_e*\delta_x. \tag{3.19}$$

由于 $\lambda^2=\lambda$, 并且 $\lambda*\delta_e\in P(K)$, 于是 $(\lambda*\delta_e)*(\lambda*\delta_e)=\lambda*\lambda*\delta_e=\lambda*\delta_e$, 即 $\lambda*\delta_e$ 是幂等测度, 其支撑集 $S_{\lambda*\delta_e}$ 是完全简单半群, 由文献 [13] 引理 2.4 $S_{\lambda*\delta_e}$ 是 K 的一个子群. 为完成定理的证明, 还需证明

$$S_{\lambda*\delta_e}=G:=\bigcap_{k\geq 0}H(v_k*\delta_e). \tag{3.20}$$

首先注意到, 若 $y \in H(v_{k+1} * \delta_e)$, 即 $v_{k+1} * \delta_e = v_{k+1} * \delta_e * \delta_y$, 则 $\mu_{k+1} * v_{k+1} * \delta_e = \mu_{k+1} * v_{k+1} * \delta_e * \delta_y$. 由于 $\mu_{k+1} * v_{k+1} = \nu_k$, 得到 $v_k * \delta_e = v_k * \delta_e * \delta_y$, 即 $y \in H(v_k * \delta_e)$, 这说明 $H(v_k * \delta_e)$ 关于 $k \downarrow$, 因此 G 有定义.

为证 (3.20) 式, 先证明

$$S_{\lambda * \delta_e} \subset G\,. \tag{3.21}$$

由 (3.18) 式, 对 $k \geq 0$, $v_k * \delta_e = v_k * \lambda * \delta_e = v_k * \delta_e * (\lambda * \delta_e)$, 由引理 2.3, $S_{\lambda * \delta_e} \subset H(v_k * \delta_e)$, $k \geq 0$, 故 (3.21) 式成立. 反之, 设 $y \in G = \bigcap\limits_{k \geq 0} H(v_k * \delta_e)$, 即对所有 $k \geq 0$,

$$v_k * \delta_e = v_k * \delta_e * \delta_y\,, \tag{3.22}$$

取 $k = p_i$ 并令 $p_i \to \infty$, 得到

$$\lambda * \delta_e = \lambda * \delta_e * \delta_y\,. \tag{3.23}$$

注意到 $S_{\lambda * \delta_e}$ 是 K 的子群, e 是 K 单位元, 因此 $e \in S_{\lambda * \delta_e}$, 于是 $y = e \cdot y \in S_{\lambda * \delta_e} \cdot y \subset S_{\lambda * \delta_e * \delta_y} = S_{\lambda * \delta_e}$, 故 $G \subset S_{\lambda * \delta_e}$. 于是 $S_{\lambda * \delta_e} = G$, 结合 (3.23) 式, 表明 $\lambda * \delta_e$ 是 G 上的 Haar 测度, 记为 W_G, 代入 (3.19) 式, $v * \delta_e = W_G * \delta_x$.

参 考 文 献

[1] Budzban G, Mukherjea A. Convolution products of non-identical distributions on a topological semigroup[J]. J. Theor. Probab., 1992, 5(2): 283–307.

[2] Budzban G, Ruzsa I. Some results concerning convergence of convolution products of probability measures on discrete semigroups[J]. J. Theor. Probab., 1997, 10(1): 105–120.

[3] Budzban G, Mukherjea A. Subsemigroups of completely simple semigroups and weak convergence of convolution products of probability measures[J]. Semigroup Forum, 2004, 68: 400–410.

[4] Mukherjea A, Tserpes N A. Measures on topological semigroups[M]. New York: Springer-Verlay, 1976.

[5] Jaworskieor W. Ergodic and mixing probability measures on [SIN] groups[J]. J. Theor. Probab., 2004, 17(3): 741–759.

[6] Heyer H. Probability measures on locally compact groups[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1977.

[7] Maksimov V M. Composition convergent sequences of measures on compact groups[J]. Theory Prob. Appl., 1971, 16: 55–73.

[8] Jaworskieor W. Dissipation of convolution powers in a metric group[J]. J. Theor. Probab., 2007, 20: 487–503.

[9] 龚光鲁, 钱敏平. 应用随机过程－及在算法和智能计算中的随机模型 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2007.

[10] Center B, Mukkerjea A. More on limit theorems for iterates of probability on semigroups and groups[J]. Z. Wuhrs., 1979, 46(3): 259–275.

[11] Makherjea A. Limit theorems: stochastic matrices, ergadic Markov chains and measures on semigroups, Prob. Analysis and Related Topics[J]. 1979, 2(2): 143–203.

[12] Hognas G., Mukherjea A. Probability Measures on Semigroups.Convolution Products, Random Walks, and Random Matrices[M]. New York: Springer-Verlag, 2011.

[13] 严慧, 徐立峰, 徐侃. 局部紧 H- 半群上概率测度序列的组合收敛性 [J]. 数学进展, 2018, 47(5): 791–800.

[14] 张慧, 刘锦萼. 局部紧 H 半群上概率测度卷积幂的弱收敛性 [J]. 应用数学学报, 2000, 23(1): 38–44.

[15] 徐侃. 一类紧半群上概率测度卷积幂的弱收敛性 [J]. 应用数学学报, 1996, 19(2): 239–243.

[16] 徐立峰, 徐侃. Condition composition convergence and shift composition convergence of probability measures sequence on topological semigroups[J]. 数学杂志, 2008, 28(4): 362–368.

[17] Kloss B M. Probability distributions on bicompact topological groups[J]. Theor. Probab. Appl., 1959, 4: 237–270.

[18] Liu Jin'e, Xu Kan. Limit Behaviors of composition convergent sequences of probability measures on compact L-X semigroups[J]. 数学进展, 20(3): 379–380.

[19] 徐侃. 紧拓扑半群上概率测度卷积序列的极限性质 [J]. 数学学报, 1996, 39(6): 840–847.

[20] Bendikov A, Saloff-coste L. On the absolute continuity of gaussian measures on locally compact groups[J]. J. Theor. Probab., 2001, 14(3): 887–898.

[21] Chakraborty S, Kao B V. Convolution powers of probabilities on stochastic matrices[J]. J. Theor. Probab., 2001, 14(2): 599–603.

[22] 刘锦萼. 紧 L–X 半群上不同分布的组合乘积的极限性质 [J]. 中国科学 (A 辑), 1993, 23(4): 337–342.

[23] 刘锦萼. 紧拓扑半群上概率测度的简单半群及其支撑集 [J]. 数学进展, 1999, 42(6): 1089–1092.

[24] 徐侃, 刘锦萼. 一类局部紧半群上不同分布的组合乘积的极限性质 [J]. 科学通报, 1992, 23: 2125–2127.

[25] Liu Jin'e. Strong uniform convergence of composition sequences of probability measures on locally compact topological semigroups[J]. Science in China (Series A), 1997, 40(1): 37–44.

[26] Billingsleg P. Convergence of probability measure[M]. New York: John Wiley and Sons, 1968.

SOME LIMIT THEOREMS OF COMPOSITION CONVERGENCE OF PROBABILITY MEASURE SEQUENCES ON TOPOLOGICAL SEMIGROUPS

YAN Hui , XU Li-feng , XU Kan

(*School of Mathematics and Statistics, Hubei Normal University, Huangshi 435002, China*)

Abstract: This paper investigates the composition convergence of probability measure sequence $\{\mu_n\}$ on topological semigroups, that is: the limit properties for convolution sequence $\mu_{k,n} := \mu_{k+1} * \mu_{k+2} * \cdots * \mu_n$. By studying the algebraic construction of probability measure support, first, a sufficient criterion of composition convergence for probability measures sequences on a countable discrete semigroup is presented, which expend the classical Maksimov theorem and some other results in references. Second, we give a constructive theorem of limit point set of convolution sequences $\{\mu_{k,n} : 0 \le k < n\}$ on a locally compact H semigroup with a compact kernel, which is an extension of classical result on groups.

Keywords: topological semigroup; probability measure; composition convergence

2010 MR Subject Classification: 60B15