Vol. 40 (2020)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

逆拟变分不等式问题的相关研究

张从军 [1]，李 杨 [1]，孙 杰 [1]，王月虎 [2]

(1. 南京财经大学应用数学学院, 江苏 南京 210023)

(2. 南京财经大学管理科学与工程学院, 江苏 南京 210023)

摘 要: 本文研究了 Hilbert 空间中逆拟变分不等式问题. 利用不动点原理得到逆拟变分不等式问题解的存在性和唯一性. 利用投影技巧, Wiener-Hopf 方程和辅助原理技术分别给出求解逆拟变分不等式的迭代算法, 并在一定条件下证明了算法的收敛性. 最后通过间隙函数得到误差界. 本文改进和推广了最近文献的一些相关结果.

关键词: 逆拟变分不等式; Wiener-Hopf 程; 辅助原理; 间隙函数

MR(2010) **主题分类号**: 49J40; 47H06 **中图分类号**: O177.91

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2020)03-0341-13

1 引言及预备知识

变分不等式及其推广为很多非线性问题的研究提供了统一的框架, 在经济、交通、优化、运筹学和工程科学等领域有着广泛的应用. 2006 年, 何炳生等人 [1,2] 研究了一类逆变分不等式的迭代算法及其在流量控制问题和市场均衡问题上的应用. 随后一些学者致力于研究逆变分不等式问题 [3,4]. 2013 年, Didier Aussel 等人 [5] 提出了逆拟变分不等式问题, 并根据不同间隙函数得到其误差界. 2015 年, 郭小亚和张从军 [6] 讨论了 IQVI(T,g,K) 解的存在性与唯一性条件, 构造相应算法并给出其在交通问题中的应用.

受以上工作的启发, 本文在 Hilbert 空间中研究逆拟变分不等式. 设 H 是实 Hilbert 空间, $T,g:H\to H$ 是连续映射, $K:H\to 2^H$ 是集值映射, 且对任意的 $u\in H$, $K(u)$ 是闭凸集. 找一点 $u\in H$, 使得 $g(u)\in K(u)$, 且满足

$$\langle T(u), v-g(u)\rangle \geq 0, \forall v\in K(u), \tag{1.1}$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示内积. (1.1) 式称为逆拟变分不等式, 记作 IQVI(T,g,K). 若 $K(u)\equiv\overline{K}$, $\overline{K}$ 是 H 的闭凸子集, 则 IQVI(T,g,K) 退化为逆变分不等式问题 IVI$(T,g,\overline{K})$. 若 g 为恒等映射, 则 IQVI(T,g,K) 退化为经典拟变分不等式问题 QVI(T,K).

首先证明 IQVI(T,g,K) 和不动点问题的等价性, 并借此研究 IQVI(T,g,K) 的存在性和唯一性, 给出求解 IQVI(T,g,K) 的迭代算法和收敛性分析. 然后在 g 可逆的情况下建立 IQVI(T,g,K) 和 Wiener-Hopf 方程的等价关系, 构造算法并给出收敛性分析. 其次, 利用辅助原理技术给出三步预测 – 校正投影迭代法并证明算法的收敛性. 文末, 构建 IQVI(T,g,K)

*收稿日期: 2019-08-10 接收日期: 2019-10-18

基金项目: 江苏省高校自然科学研究面上项目 (16KJB110009); 江苏高校哲学社会科学研究项目 (2017SJB0238); 江苏省自然科学基金 (BK20171041).

作者简介: 张从军 (1957–), 男, 安徽淮北, 教授, 主要研究方向: 非线性分析与经济应用.

的间隙函数, 依此对 IQVI(T,g,K) 的解进行误差界分析. 本文的结果对现有文献中的一些结果进行了推广和改进.

为研究逆拟变分不等式, 先回顾以下概念和引理.

定义 1.1 [7,8] 映射 $T:H\to H$ 被称为

(i) β-Lipschitz 连续的, 如果存在常数 $\beta>0$, 使得 $\|T(u)-T(v)\|\le\beta\|u-v\|,\forall u,v\in H$.

(ii) α - 强单调的, 如果存在常数 $\alpha>0$, 使得 $\langle T(u)-T(v),u-v\rangle\ge\alpha\|u-v\|^2,\forall u,v\in H$.

(iii) 关于 g 是 η - 强单调的, 如果存在常数 $\eta>0$, 使得

$$\langle T(u)-T(v),g(u)-g(v)\rangle\ge\eta\|u-v\|^2,\forall u,v\in H.$$

(iv) (ψ,φ) - 松弛强制的, 如果存在常数 $\psi,\varphi>0$, 使得

$$\langle T(u)-T(v),u-v\rangle\ge-\psi\|T(u)-T(v)\|^2+\varphi\|u-v\|^2,\forall u,v\in H.$$

引理 1.2 [8] 设 $K(u)$ 是 H 的闭凸子集. 对于给定 $z\in H,u\in K(u)$, 不等式 $\langle u-z,v-u\rangle\ge 0,\forall v\in K(u)$ 成立当且仅当 $u=P_{K(u)}z$, 其中 $P_{K(u)}$ 是 H 到闭凸子集 $K(u)$ 的投影.

假设 1.3 [8] 对于任意给定 $u,v,w\in H$, 投影算子 $P_{K(u)}$ 满足 $\|P_{K(u)}w-P_{K(v)}w\|\le\gamma\|u-v\|$, 其中 γ 是一个正常数.

2 逆拟变分不等式问题解的存在性与算法

本节在 Hilbert 空间中利用投影技巧建立 IQVI(T,g,K) 与不动点问题的等价关系, 利用等价关系证得在一定条件下 IQVI(T,g,K) 的解的存在性, 给出求解算法, 并对其收敛性进行分析.

定理 2.1 $u\in H,g(u)\in K(u)$ 是 IQVI(T,g,K) 的解当且仅当 $u\in H,g(u)\in K(u)$ 是映射 $F(u)=u-g(u)+P_{K(u)}[g(u)-\rho T(u)]$ 的不动点, 其中 ρ 是正常数.

证 设 $u\in H,g(u)\in K(u)$ 是 IQVI(T,g,K) 的解, 则

$$\langle g(u)-(g(u)-\rho T(u)),v-g(u)\rangle\ge 0,\forall v\in K(u).$$

由引理 1.2 知, 这等价于 $u\in H,g(u)\in K(u)$ 使得

$$g(u)=P_{K(u)}[g(u)-\rho T(u)].$$

定义 $F(u)=u-g(u)+P_{K(u)}[g(u)-\rho T(u)]$, 结论自明.

定理 2.2 设 $T:H\to H$ 关于 g 是 η - 强单调且 β-Lipschitz 连续的, $g:H\to H$ 是 (ψ,φ) - 松弛强制且 δ-Lipschitz 连续的. 若假设 1.3 成立且存在常数 $\rho>0$, 使得

$$k+\sqrt{\delta^2+\rho^2\beta^2-2\rho\eta}<1,\eta^2>\beta^2(\delta^2-(k-1)^2),\tag{2.1}$$

其中 $k=\sqrt{1+\delta^2+2\psi\delta^2-2\varphi}+\gamma$, 则存在 $u\in H,g(u)\in K(u)$ 是 IQVI(T,g,K) 的唯一解.

证 令 $F(u)=u-g(u)+P_{K(u)}[g(u)-\rho T(u)]$, 由假设 1.3 和投影算子的非扩张性得, 对任意的 $u_1,u_2\in H$,

$$\begin{aligned}\|F(u_1)-F(u_2)\| &\le \|u_1-u_2-(g(u_1)-g(u_2))\|\\ &\quad+\|P_{K(u_1)}[g(u_1)-\rho T(u_1)]-P_{K(u_2)}[g(u_2)-\rho T(u_2)]\|\\ &\le \|u_1-u_2-(g(u_1)-g(u_2))\|\\ &\quad+\|P_{K(u_1)}[g(u_1)-\rho T(u_1)]-P_{K(u_2)}[g(u_1)-\rho T(u_1)]\|\\ &\quad+\|P_{K(u_2)}[g(u_1)-\rho T(u_1)]-P_{K(u_2)}[g(u_2)-\rho T(u_2)]\|\\ &\le \|u_1-u_2-(g(u_1)-g(u_2))\|+\gamma\|u_1-u_2\|\\ &\quad+\|g(u_1)-g(u_2)-\rho(T(u_1)-T(u_2))\|.\end{aligned}$$

因 T 关于 g 是 η - 强单调且 β-Lipschitz 连续的, g 是 δ-Lipschitz 连续的, 故有

$$\begin{aligned}\|g(u_1)-g(u_2)-\rho(T(u_1)-T(u_2))\|^2 &= \|g(u_1)-g(u_2)\|^2+\rho^2\|T(u_1)-T(u_2)\|^2\\ &\quad-2\rho\langle T(u_1)-T(u_2),g(u_1)-g(u_2)\rangle\\ &\le \delta^2\|u_1-u_2\|^2+\rho^2\beta^2\|u_1-u_2\|^2-2\rho\eta\|u_1-u_2\|^2\\ &=(\delta^2+\rho^2\beta^2-2\rho\eta)\|u_1-u_2\|^2.\end{aligned}$$

又 g 是 (ψ,φ) - 松弛强制且 δ-Lipschitz 连续的, 有

$$\begin{aligned}\|u_1-u_2-(g(u_1)-g(u_2))\|^2 &=\|u_1-u_2\|^2+\|g(u_1)-g(u_2)\|^2-2\langle g(u_1)-g(u_2),u_1-u_2\rangle\\ &\le\|u_1-u_2\|^2+\delta^2\|u_1-u_2\|^2\\ &\quad-2[-\psi\|g(u_1)-g(u_2)\|^2+\varphi\|u_1-u_2\|^2]\\ &\le\|u_1-u_2\|^2+\delta^2\|u_1-u_2\|^2+2\psi\delta^2\|u_1-u_2\|^2-2\varphi\|u_1-u_2\|^2\\ &\le(1+\delta^2+2\psi\delta^2-2\varphi)\|u_1-u_2\|^2.\end{aligned}$$

这表明

$$\begin{aligned}\|F(u_1)-F(u_2)\| &\le [\gamma+\sqrt{1+\delta^2+2\psi\delta^2-2\varphi}+\sqrt{\delta^2+\rho^2\beta^2-2\rho\eta}]\|u_1-u_2\|\\ &=\theta\|u_1-u_2\|.\end{aligned}$$

由 (2.1) 式知 $\theta<1$, $F(u)$ 是一个压缩映射, 从而存在唯一不动点 $u\in H, g(u)\in K(u)$. 由定理 2.1 知该点是 IQVI(T,g,K) 的解.

注 指出 ρ 的存在性, 即存在 $\rho>0$, 使得 $\beta^2\rho^2-2\eta\rho+\delta^2-(1-k)^2<0$. 注意到

$$\Delta=4\eta^2-4\beta^2(\delta^2-(k-1)^2)=4[\eta^2-\beta^2(\delta^2-(k-1)^2)]>0,$$

并且对称轴为 $\frac{\eta}{\beta^2}>0$, 故这样的 ρ 一定存在. 在文献 [8, 9] 中, Noor 对于拟变分不等式问题均有相关问题的讨论, 并说明了在上述条件下使得 $\theta=k+\sqrt{f(\rho)}$ 成立的 ρ 存在. 将把上述条件作为求解逆拟变分不等式问题的算法的收敛条件.

注意到 T 是强单调的, 则一定是 (ψ,φ) - 松弛强制的, 于是有如下推论.

推论 2.3 设 $T: H \to H$ 关于 g 是 η - 强单调且 β-Lipschitz 连续的, $g: H \to H$ 是 σ-强单调且 δ-Lipschitz 连续的. 若假设 1.3 成立并且存在常数 $\rho > 0$, 使得

$$k + \sqrt{\delta^2 + \rho^2\beta^2 - 2\rho\eta} < 1, \eta^2 > \beta^2\left(\delta^2 - (k-1)^2\right),$$

其中 $k = \sqrt{1 - 2\sigma + \delta^2} + \gamma$, 则存在 $u \in H, g(u) \in K(u)$ 是 IQVI(T, g, K) 的唯一解.

改变 T 的条件使得 $T: H \to H$ 是 ξ - 强单调的, 可以得到如下定理.

定理 2.4 设 $T: H \to H$ 是 ξ- 强单调且 β-Lipschitz 连续的, $g: H \to H$ 是 α - 强单调且 δ-Lipschitz 连续的. 若假设 1.3 成立且存在常数 $\rho > 0$, 使得

$$k + \sqrt{1 + \rho^2\beta^2 - 2\rho\xi} < 1, \xi^2 > \beta^2(\delta^2 - (1-k)^2), \tag{2.2}$$

其中 $k = \gamma + 2\sqrt{1 + \delta^2 - 2\alpha}$, 则存在 $u \in H, g(u) \in K(u)$ 是 IQVI(T, g, K) 的唯一解.

证 令 $F(u) = u - g(u) + P_{K(u)}[g(u) - \rho T(u)]$. 由定理 2.2 的证明知, 对任意的 $u_1, u_2 \in H$,

$$\begin{aligned}\|F(u_1) - F(u_2)\| \leq & \|u_1 - u_2 - (g(u_1) - g(u_2))\| + \gamma\|u_1 - u_2\| \\ & + \|g(u_1) - g(u_2) - \rho(T(u_1) - T(u_2))\|.\end{aligned}$$

注意到

$$\|g(u_1) - g(u_2) - \rho(T(u_1) - T(u_2))\| \leq \|u_1 - u_2 - \rho(T(u_1) - T(u_2))\| + \|u_1 - u_2 - (g(u_1) - g(u_2))\|.$$

因 $T: H \to H$ 是 ξ - 强单调且 β-Lipschitz 连续的, 故有

$$\begin{aligned}&\|u_1 - u_2 - \rho(T(u_1) - T(u_2))\|^2 \\ =&\|u_1 - u_2\|^2 + \rho^2\|T(u_1) - T(u_2)\|^2 - 2\rho\langle T(u_1) - T(u_2), u_1 - u_2\rangle \\ \leq&\|u_1 - u_2\|^2 + \rho^2\beta^2\|u_1 - u_2\|^2 - 2\rho\xi\|u_1 - u_2\|^2 \\ \leq&(1 + \rho^2\beta^2 - 2\rho\xi)\|u_1 - u_2\|^2.\end{aligned}$$

又 g 是 α - 强单调且 δ-Lipschitz 连续的, 有

$$\begin{aligned}\|u_1 - u_2 - (g(u_1) - g(u_2))\|^2 &= \|u_1 - u_2\|^2 + \|g(u_1) - g(u_2)\|^2 - 2\langle g(u_1) - g(u_2), u_1 - u_2\rangle \\ &\leq \|u_1 - u_2\|^2 + \delta^2\|u_1 - u_2\|^2 - 2\alpha\|u_1 - u_2\|^2 \\ &\leq (1 + \delta^2 - 2\alpha)\|u_1 - u_2\|^2.\end{aligned}$$

这表明

$$\|F(u_1) - F(u_2)\| \leq (\gamma + 2\sqrt{1 + \delta^2 - 2\alpha} + \sqrt{1 + \rho^2\beta^2 - 2\rho\xi})\|u_1 - u_2\| = \theta\|u_1 - u_2\|.$$

由 (2.2) 式知 $\theta < 1$, $F(u)$ 是一个压缩映射, 从而存在唯一不动点 $u \in H, g(u) \in K(u)$. 由定理 2.1 知该点是 IQVI(T, g, K) 的解.

注 指出 ρ 的存在性, 即存在 $\rho > 0$, 使得 $\beta^2\rho^2 - 2\xi\rho + \delta^2 - (1-k)^2 < 0$. 注意到

$$\Delta = 4\xi^2 - 4\beta^2(\delta^2 - (1-k)^2) = 4[\xi^2 - \beta^2(\delta^2 - (1-k)^2)] > 0,$$

并且对称轴为 $\frac{\xi}{\beta^2} > 0$. 故这样的 ρ 一定存在.

在 IQVI(T,g,K) 中, 若对任意 $u \in H, K(u) \equiv \overline{K}$, $\overline{K}$ 是 H 的闭凸子集, 则可以得到逆变分不等式问题 IVI$(T,g,\overline{K})$ 的解的存在性定理.

定理 2.5 设 $\overline{K}$ 是 H 的闭凸子集, $T: H \to H$ 关于 g 是 η - 强单调且 β-Lipschitz 连续的, $g: H \to H$ 是 (ψ,φ) - 松弛强制且 δ-Lipschitz 连续的. 若存在常数 $\rho > 0$, 使得

$$k + \sqrt{\delta^2 + \rho^2\beta^2 - 2\rho\eta} < 1, \eta^2 > \beta^2(\delta^2 - (k-1)^2),$$

其中 $k = \sqrt{1 + \delta^2 + 2\psi\delta^2 - 2\varphi}$, 则存在 $u \in H, g(u) \in K$ 是 IVI$(T,g,\overline{K})$ 的唯一解.

证 用定理 2.2 的证明方法可证.

以下给出 IQVI(T,g,K) 的迭代算法, 并对其收敛性进行分析.

算法 2.6 对于给定的 $u_0 \in H$, 由如下迭代式计算 u_{n+1}

$$u_{n+1} = (1-\alpha_n)u_n + \alpha_n[u_n - g(u_n) + P_{K(u_n)}[g(u_n) - \rho T(u_n)]], n = 0,1,2,\cdots. \tag{2.3}$$

注 若 $g = I$, 算法 2.6 退化为经典拟变分不等式解的投影迭代算法.

$$u_{n+1} = (1-\alpha_n)u_n + \alpha_n P_{K(u_n)}[u_n - \rho T(u_n)], n = 0,1,2,\cdots.$$

若 $K(u) \equiv \overline{K}$, 算法 2.6 退化为逆变分不等式解的投影迭代算法.

$$u_{n+1} = (1-\alpha_n)u_n + \alpha_n[u_n - g(u_n) + P_{\overline{K}}[g(u_n) - \rho T(u_n)]], n = 0,1,2,\cdots.$$

下面给出算法 2.6 在一定条件下的收敛性证明.

定理 2.7 设 $T: H \to H$ 关于 g 是 η - 强单调且 β-Lipschitz 连续的, $g: H \to H$ 是 (ψ,φ) - 松弛强制且 δ-Lipschitz 连续的. 若假设 1.3 和 (2.1) 式成立, 且对所有 $n \geq 0, 0 \leq \alpha_n \leq 1$, 满足 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$, 则由 (2.3) 式生成的序列 $\{u_n\}$ 收敛于 u, 其中 $u \in H, g(u) \in K(u)$ 为 IQVI(T,g,K) 的解.

证 由定理 2.2 知, IQVI(T,g,K) 存在唯一解. 令 $u \in H$ 是 IQVI(T,g,K) 的解, 则

$$u = (1-\alpha_n)u + \alpha_n[u - g(u) + P_{K(u)}[g(u) - \rho T(u)]], n = 0,1,\cdots.$$

从而

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - u\| \leq{}& (1-\alpha_n)\|u_n - u\| + \alpha_n\|u_n - u - (g(u_n) - g(u))\| \\
&+ \alpha_n\|P_{K(u_n)}[g(u_n) - \rho T(u_n)] - P_{K(u)}[g(u) - \rho T(u)]\| \\
\leq{}& (1-\alpha_n)\|u_n - u\| + \alpha_n\|u_n - u - (g(u_n) - g(u))\| \\
&+ \alpha_n\|P_{K(u_n)}[g(u_n) - \rho T(u_n)] - P_{K(u_n)}[g(u) - \rho T(u)]\| \\
&+ \alpha_n\|P_{K(u_n)}[g(u) - \rho T(u)] - P_{K(u)}[g(u) - \rho T(u)]\| \\
\leq{}& (1-\alpha_n)\|u_n - u\| + \alpha_n\|u_n - u - (g(u_n) - g(u))\| \\
&+ \alpha_n\|g(u_n) - g(u) - \rho(T(u_n) - T(u))\| + \alpha_n\gamma\|u_n - u\|.
\end{aligned}$$

因 T 在 H 上关于 g 是 η - 强单调且 β-Lipschitz 连续的, g 是 δ-Lipschitz 连续的, 故有

$$\begin{aligned}\|g(u_n)-g(u)-\rho(T(u_n)-T(u))\|^2 &= \|g(u_n)-g(u)\|^2+\rho^2\|T(u_n)-T(u)\|^2\\ &\quad -2\rho\langle T(u_n)-T(u),g(u_n)-g(u)\rangle\\ &\le \delta^2\|u_n-u\|^2+\rho^2\beta^2\|u_n-u\|^2-2\rho\eta\|u_n-u\|^2\\ &=(\delta^2+\rho^2\beta^2-2\rho\eta)\|u_n-u\|^2.\end{aligned}$$

又映射 $g:H\to H$ 是 (ψ,φ) - 松弛强制且 δ-Lipschitz 连续的, 有

$$\begin{aligned}\|u_n-u-(g(u_n)-g(u))\|^2 &= \|u_n-u\|^2+\|g(u_n)-g(u)\|^2-2\langle g(u_n)-g(u),u_n-u\rangle\\ &\le \|u_n-u\|^2+\delta^2\|u_n-u\|^2-2[-\psi\|g(u_n)-g(u)\|^2+\varphi\|u_n-u\|^2]\\ &\le \|u_n-u\|^2+\delta^2\|u_n-u\|^2+2\psi\delta^2\|u_n-u\|^2-2\varphi\|u_n-u\|^2\\ &\le (1+\delta^2+2\psi\delta^2-2\varphi)\|u_n-u\|^2.\end{aligned}$$

这表明

$$\begin{aligned}\|u_{n+1}-u\| &\le (1-\alpha_n)\|u_n-u\|+\alpha_n[\gamma+\sqrt{1+\delta^2+2\psi\delta^2-2\varphi}+\sqrt{\delta^2+\rho^2\beta^2-2\rho\eta}]\|u_n-u\|\\ &=(1-\alpha_n)\|u_n-u\|+\alpha_n\theta\|u_n-u\|=[1-(1-\theta)\alpha_n]\|u_n-u\|\\ &\le \prod_{i=0}^{n}[1-(1-\theta)\alpha_i]\|u_0-u\|.\end{aligned}$$

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n$ 发散且 $1-\theta>0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod_{i=0}^{n}[1-(1-\theta)\alpha_i]=0$, 因此 $\{u_n\}$ 收敛于 u, 证毕.

注 以上定理对文献 [6] 解的存在性定理和收敛定理进行了空间上的推广, 从 $\mathbb{R}^n$ 推广到了 Hilbert 空间, 并取消了 g 的可逆性条件.

3 逆拟变分不等式与 Wiener-Hopf 方程的等价性及算法

2012 年, Noor[8] 建立了一般隐式 Wiener-Hopf 方程与一般拟变分不等式之间的等价关系, 构造了相关问题解的迭代算法. 可以看出 Wiener-Hopf 方法灵活而有效. 由此受到启发, 本节在 Hilbert 空间中研究 IQVI(T,g,K) 与 Wiener-Hopf 方程的等价关系, 利用等价关系构建求解逆拟变分不等式的解的迭代算法, 并对算法的收敛性进行分析.

定义 3.1 [8] 令 $Q_{K(u)}=I-P_{K(u)}$, 其中 I 为恒等映射, $P_{K(u)}$ 为 H 到 $K(u)$ 的投影. 如果 g^{-1} 存在, 求 $z\in H$ 使得

$$Tg^{-1}P_{K(u)}z+\rho^{-1}Q_{K(u)}z=0. \tag{3.1}$$

称形如 (3.1) 式的这类方程为 Wiener-Hopf 方程.

定理 3.2 设 g 可逆, 其逆映射记为 g^{-1}, 则 $u\in H, g(u)\in K(u)$ 是 IQVI(T,g,K) 的解当且仅当 Wiener-Hopf 方程存在解 $z\in H$, 其中

$$z=g(u)-\rho T(u), g(u)=P_{K(u)}z. \tag{3.2}$$

证 设 $u \in H$, 使得 $g(u) \in K(u)$ 为 IQVI(T, g, K) 的解. 由定理 2.1 可得 $g(u) = P_{K(u)}[g(u) - \rho T(u)]$. 又 $Q_{K(u)} = I - P_{K(u)}$, 代入 (3.1) 式可得

$$\begin{aligned} Q_{K(u)}[g(u) - \rho T(u)] &= g(u) - \rho T(u) - P_{K(u)}[g(u) - \rho T(u)] = -\rho T(u) \\ &= -\rho T g^{-1} P_{K(u)}[g(u) - \rho T(u)]. \end{aligned}$$

若 $z = g(u) - \rho T(u)$, 则 $Tg^{-1}P_{K(u)}z + \rho^{-1}Q_{K(u)}z = 0$.

相反地, 设 $z \in H$ 为 Wiener-Hopf 方程 (3.1) 的解, 则

$$\rho T g^{-1} P_{K(u)} z = -Q_{K(u)} z = -(I - P_{K(u)}) z = P_{K(u)} z - z. \tag{3.3}$$

由 (3.3) 式和引理 1.2 可得

$$0 \leq \langle P_{K(u)} z - z, v - P_{K(u)} z \rangle = \langle \rho T g^{-1} P_{K(u)} z, v - P_{K(u)} z \rangle, \forall v \in K(u).$$

这表明 $u = g^{-1} P_{K(u)} z, g(u) \in K(u)$ 为 IQVI(T, g, K) 的解.

已经知道求解 IQVI(T, g, K) 与求解 Wiener-Hopf 方程是等价的. 由此, 通过对 Wiener-Hopf 方程进行变形, 可以得到几个求解 IQVI(T, g, K) 的迭代算法.

(1) Wiener-Hopf 方程 (3.1) 可以移项变形为 $Q_{K(u)} z = -\rho T g^{-1} P_{K(u)} z$. 将 (3.2) 式及 $Q_{K(u)} = I - P_{K(u)}$ 代入上式, 可以得到

$$z = P_{K(u)} - \rho T g^{-1} P_{K(u)} z = g(u) - \rho T(u).$$

由上式可以得到如下迭代算法.

算法 3.3 对给定的 $z_0 \in H$, 由如下迭代式计算 z_{n+1},

$$\begin{cases} g(u_n) = P_{K(u_n)} z_n, \\ z_{n+1} = (1 - \alpha_n) z_n + \alpha_n [g(u_n) - \rho T(u_n)], \end{cases} \tag{3.4}$$

$\forall n \geq 0, 0 \leq \alpha_n \leq 1$, 满足 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$.

(2) Wiener-Hopf 方程 (3.1) 可以移项变形为 $Tg^{-1}P_{K(u)}z = -\rho^{-1}Q_{K(u)}z$. 两端同时加上 $Q_{K(u)}z$ 得 $Q_{K(u)}z + Tg^{-1}P_{K(u)}z = -\rho^{-1}Q_{K(u)}z + Q_{K(u)}z$. 再由 $Q_{K(u)} = I - P_{K(u)}$ 代入上式得

$$z - P_{K(u)} z + \rho T g^{-1} P_{K(u)} z = (1 - \rho^{-1}) Q_{K(u)} z.$$

整理可得 $z = g(u) - \rho T(u) + (1 - \rho^{-1}) Q_{K(u)} z$. 结合 (3.2) 式, 得到如下算法.

算法 3.4 对给定的 $z_0 \in H$, 由如下迭代式计算 z_{n+1},

$$\begin{cases} g(u_n) = P_{K(u_n)} z_n, \\ z_{n+1} = g(u_n) - \rho T(u_n) + (1 - \rho^{-1}) Q_{K(u_n)} z_n, n = 0, 1, 2, \cdots. \end{cases}$$

注 若 $K(u) \equiv \overline{K}$, 则算法 3.3, 算法 3.4 退化为逆变分不等式投影迭代算法. 若 $g = I$, 则算法 3.3, 算法 3.4 退化为经典拟变分不等式的投影迭代算法.

以下证明算法 3.3 的收敛性, 用相同的方法可以证得在一定条件下算法 3.4 的收敛性.

定理 3.5 设 $T: H \to H$ 关于 g 是 η - 强单调且 β-Lipschitz 连续的, $g: H \to H$ 可逆且是 σ - 强单调和 δ-Lipschitz 连续的, 若假设 1.3 成立并且存在常数 $\rho > 0$ 使得

$$k + \sqrt{\delta^2 + \rho^2\beta^2 - 2\rho\eta} < 1, \eta^2 > \beta^2 (\delta^2 - (k-1)^2), \tag{3.5}$$

其中 $k = \sqrt{1 - 2\sigma + \delta^2} + \gamma$. 若 $\{z_n\}$ 是由算法 3.3 得到的, 则 $\{z_n\}$ 强收敛于 z, $z \in H$ 为 Wiener-Hopf 方程 (3.1) 的解.

证 设 $u \in H, g(u) \in K(u)$ 是 $\mathrm{IQVI}(T, g, K)$ 的解, 由定理 3.2 知

$$\begin{cases} g(u) = P_{K(u)}z, \\ z = (1-\alpha_n)z + \alpha_n[g(u) - \rho T(u)]. \end{cases} \tag{3.6}$$

于是 $\|z_{n+1} - z\| \le (1-\alpha_n)\|z_n - z\| + \alpha_n\|g(u_n) - g(u) - \rho(T(u_n) - T(u))\|$. 因 T 在 H 上关于 g 是 η - 强单调且 β-Lipschitz 是连续的, g 是 δ-Lipschitz 连续的, 故有

$$\begin{aligned} & \|g(u_n) - g(u) - \rho(T(u_n) - T(u))\|^2 \\ \le & \|g(u_n) - g(u)\|^2 + \rho^2\|T(u_n) - T(u)\|^2 - 2\rho\langle T(u_n) - T(u), g(u_n) - g(u)\rangle \\ \le & \delta^2\|u_n - u\|^2 + \rho^2\beta^2\|u_n - u\|^2 - 2\rho\eta\|u_n - u\|^2 \\ = & (\delta^2 + \rho^2\beta^2 - 2\rho\eta)\|u_n - u\|^2. \end{aligned}$$

由式 (3.4), (3.6) 及假设 1.3, 同时 g 是 σ - 强单调和 δ-Lipschitz 连续的, 有

$$\begin{aligned} \|u_n - u\| & \le \|u_n - u - (g(u_n) - g(u))\| + \|P_{K(u_n)}z_n - P_{K(u)}z\| \\ & \le \|u_n - u - (g(u_n) - g(u))\| + \|P_{K(u_n)}z_n - P_{K(u_n)}z\| + \|P_{K(u_n)}z - P_{K(u)}z\| \\ & \le (\gamma + \sqrt{1 - 2\sigma + \delta^2})\|u_n - u\| + \|z_n - z\| \\ & = k\|u_n - u\| + \|z_n - z\|. \end{aligned}$$

即 $\|u_n - u\| \le \frac{1}{1-k}\|z_n - z\|$. 令 $\theta_1 = \frac{\sqrt{\delta^2 - 2\eta\rho + \beta^2\rho^2}}{1-k}$, 由式 (3.5) 知 $\theta_1 < 1$, 因此

$$\begin{aligned} \|z_{n+1} - z\| & \le (1-\alpha_n)\|z_n - z\| + \alpha_n\theta_1\|z_n - z\| = [1 - (1-\theta_1)\alpha_n]\|z_n - z\| \\ & \le \prod_{i=0}^{n}[1 - (1-\theta_1)\alpha_i]\|z_0 - z\|. \end{aligned}$$

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n$ 发散且 $1 - \theta_1 > 0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{i=0}^{n}[1 - (1-\theta_1)\alpha_i] = 0$, 因此 $\{z_n\}$ 强收敛于 z. 证毕.

4 求解逆拟变分不等式的三步预测 – 校正投影迭代算法

Wiener-Hopf 方程的技术对于一些非线性和非可微的变分不等式问题是不适用的. 为了克服这种弊端, 可以考虑一种辅助原理技术. 该技术首先需要构造辅助变分不等式, 利用不动点原理得到辅助变分不等式与原问题的等价关系, 并证得辅助变分不等式问题的解就是原问

题的解, 最后将变分不等式的求解问题转化为辅助变分不等式的求解问题. 本节将利用辅助原理技术给出求解逆拟变分不等式问题的三步预测 – 校正投影迭代算法.

首先通过辅助原理给出辅助变分不等式.

对于给定 $u \in H$, 使得 $g(u) \in K(u)$, 找一点 $w \in H, g(w) \in K(u)$, 使得

$$\langle T(u) + g(w) - g(u), v - g(u) \rangle \geq 0, \forall v \in K(u),$$

其中 $T, g : H \to H$ 是连续映射, $K : H \to 2^H$ 是集值映射, 且对任意的 $u \in H$, $K(u)$ 是闭凸集. 依据辅助原理及以上 IQVI(T, g, K) 的辅助变分不等式可以得到 IQVI(T, g, K) 的如下三步预测 – 校正迭代算法.

算法 4.1 对于给定 $u_0 \in H$, 由如下迭代公式计算 u_{n+1},

$$\begin{cases} \langle \mu T(u_n) + g(y_n) - g(u_n), v - g(y_n) \rangle \geq 0, \forall v \in K(u_n), \\ \langle \beta T(y_n) + g(w_n) - g(y_n), v - g(w_n) \rangle \geq 0, \forall v \in K(y_n), \\ \langle \rho T(w_n) + g(u_n) - g(w_n), v - g(u_{n+1}) \rangle \geq 0, \forall v \in K(w_n), \end{cases}$$

其中 $\mu, \beta, \rho > 0, n = 0, 1, 2, \cdots$.

根据引理 1.2, 算法 4.1 可以写成

算法 4.2 对于给定 $u_0 \in H$, 由如下迭代公式计算 u_{n+1},

$$\begin{cases} g(y_n) = P_{K(u_n)}[g(u_n) - \mu T(u_n)], \\ g(w_n) = P_{K(y_n)}[g(y_n) - \beta T(y_n)], \\ g(u_{n+1}) = P_{K(w_n)}[g(w_n) - \rho T(w_n)], \end{cases}$$

其中 $\mu, \beta, \rho > 0, n = 0, 1, 2, \cdots$.

算法 4.3 对于给定 $u_0 \in H$, 由如下迭代公式计算 u_{n+1},

$$\begin{cases} y_n = (1 - \gamma_n) u_n + \gamma_n \{u_n - g(u_n) + P_{K(u_n)}[g(u_n) - \rho T(u_n)]\}, \\ w_n = (1 - \beta_n) u_n + \beta_n \{y_n - g(y_n) + P_{K(y_n)}[g(y_n) - \rho T(y_n)]\}, \\ u_{n+1} = (1 - \alpha_n) u_n + \alpha_n \{w_n - g(w_n) + P_{K(w_n)}[g(w_n) - \rho T(w_n)]\}, \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $0 \leq \alpha_n, \beta_n, \gamma_n \leq 1, n = 0, 1, 2, \cdots$, 且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$.

若 $\gamma_n = 0$, 则算法 4.3 退化为

算法 4.4 对于给定 $u_0 \in H$, 由如下迭代公式计算 u_{n+1},

$$\begin{cases} w_n = (1 - \beta_n) u_n + \beta_n \{u_n - g(u_n) + P_{K(u_n)}[g(u_n) - \rho T(u_n)]\}, \\ u_{n+1} = (1 - \alpha_n) u_n + \alpha_n \{w_n - g(w_n) + P_{K(w_n)}[g(w_n) - \rho T(w_n)]\}. \end{cases}$$

注 该算法被称为这类逆拟变分不等式的 Ishikawa 代算法, 若 $\gamma_n = 0, \beta_n = 0$, 算法被称为 Mann 迭代算法.

这里只对算法 4.3 的收敛性进行证明, 其他算法的证明方法相同.

定理 4.5 设 $T: H \to H$ 关于 g 是 η - 强单调且 β-Lipschitz 连续的, $g: H \to H$ 是 (ψ, φ) - 松弛强制且 δ-Lipschitz 连续的. 若假设 1.3 和 (2.1) 式成立, 则由 (4.1) 式所生成的 $\{u_n\}$ 强收敛于 u, 其中 $u \in H, g(u) \in K(u)$ 为 IQVI(T, g, K) 的解.

证 由定理 2.2 知 IQVI(T, g, K) 存在唯一解. 令 $u \in H, g(u) \in K(u)$ 是 IQVI(T, g, K) 的解, 由定理 2.1 得

$$u = (1-\alpha_n)u + \alpha_n\{u - g(u) + P_{K(u)}[g(u) - \rho T(u)]\}, \tag{4.2}$$

$$u = (1-\beta_n)u + \beta_n\{u - g(u) + P_{K(u)}[g(u) - \rho T(u)]\}, \tag{4.3}$$

$$u = (1-\gamma_n)u + \gamma_n\{u - g(u) + P_{K(u)}[g(u) - \rho T(u)]\}. \tag{4.4}$$

由 (4.1) 和 (4.2) 式得

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - u\| &\le (1-\alpha_n)\|u_n - u\| + \alpha_n\|\{w_n - g(w_n) + P_{K(w_n)}[g(w_n) - \rho T(w_n)]\}\| \\
&\quad - \{u - g(u) + P_{K(u)}[g(u) - \rho T(u)]\} \\
&\le (1-\alpha_n)\|u_n - u\| + \alpha_n\|w_n - u - (g(w_n) - g(u))\| \\
&\quad + \alpha_n\|P_{K(w_n)}[g(w_n) - \rho T(w_n)] - P_{K(u)}[g(w_n) - \rho T(w_n)]\| \\
&\quad + \alpha_n\|P_{K(u)}[g(w_n) - \rho T(w_n)] - P_{K(u)}[g(u) - \rho T(u)]\| \\
&\le (1-\alpha_n)\|u_n - u\| + \alpha_n\|w_n - u - (g(w_n) - g(u))\| \\
&\quad + \alpha_n\gamma\|w_n - u\| + \alpha_n\|g(w_n) - g(u) - \rho(T(w_n) - T(u))\|.
\end{aligned}$$

因 T 在 H 上关于 g 是 η - 强单调且 β-Lipschitz 连续的, g 是 δ-Lipschitz 连续的, 故有

$$\begin{aligned}
\|g(w_n) - g(u) - \rho(T(w_n) - T(u))\|^2 &\le \|g(w_n) - g(u)\|^2 + \rho^2\|T(w_n) - T(u)\|^2 \\
&\quad - 2\rho\langle T(w_n) - T(u), g(w_n) - g(u)\rangle \\
&\le \delta^2\|w_n - u\|^2 + \rho^2\beta^2\|w_n - u\|^2 - 2\rho\eta\|w_n - u\|^2 \\
&= (\delta^2 + \rho^2\beta^2 - 2\rho\eta)\|w_n - u\|^2.
\end{aligned}$$

又映射 $g: H \to H$ 是 (ψ, φ) - 松弛强制且 δ-Lipschitz 连续的, 有

$$\begin{aligned}
\|w_n - u - (g(w_n) - g(u))\|^2 &\le \|w_n - u\|^2 + \|g(w_n) - g(u)\|^2 - 2\langle g(w_n) - g(u), w_n - u\rangle \\
&\le \|w_n - u\|^2 + \delta^2\|w_n - u\|^2 - 2[-\psi\|g(w_n) - g(u)\|^2 + \varphi\|w_n - u\|^2] \\
&\le \|w_n - u\|^2 + \delta^2\|w_n - u\|^2 + 2\psi\delta^2\|w_n - u\|^2 - 2\varphi\|w_n - u\|^2 \\
&\le (1 + \delta^2 + 2\psi\delta^2 - 2\varphi)\|w_n - u\|^2.
\end{aligned}$$

这表明

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - u\| &\le (1-\alpha_n)\|u_n - u\| + \alpha_n\{\gamma + \sqrt{1 + \delta^2 + 2\psi\delta^2 - 2\varphi} + \sqrt{\delta^2 + \rho^2\beta^2 - 2\rho\eta}\}\|w_n - u\| \\
&= (1-\alpha_n)\|u_n - u\| + \alpha_n\theta\|w_n - u\|.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

由 (4.1) 和 (4.3) 式, 同理可证

$$\|w_n - u\| \le (1-\beta_n)\|u_n - u\| + \beta_n\theta\|y_n - u\|.$$

以及由 (4.1) 和 (4.4) 式可得

$$\|y_n - u\| \le (1-\gamma_n)\|u_n - u\| + \gamma_n\theta\|u_n - u\| \le \|u_n - u\|.$$

两式表明

$$\|w_n - u\| \le (1-\beta_n)\|u_n - u\| + \beta_n\theta\|u_n - u\| \le \|u_n - u\|. \tag{4.6}$$

由 (4.5) 和 (4.6) 式可知

$$\begin{aligned}\|u_{n+1} - u\| &\le (1-\alpha_n)\|u_n - u\| + \alpha_n\theta\|u_n - u\| = (1-(1-\theta)\alpha_n)\|u_n - u\| \\ &\le \prod_{i=0}^{n}[1-(1-\theta)\alpha_i]\|u_0 - u\|.\end{aligned}$$

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n$ 发散, $1-\theta>0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod_{i=0}^{n}[1-(1-\theta)\alpha_i]=0$, 因此 $\{u_n\}$ 收敛于 u. 证毕.

5 逆拟变分不等式问题的间隙函数及误差界分析

2007, Noor[9] 利用不动点定理构造了经典拟变分不等式问题的一种间隙函数, 并在一定条件下给出了误差界分析. 2012 年, Gupta 和 Metra[10] 给出了经典拟变分不等式的正则间隙函数和 D- 间隙函数并给出了误差界分析. 受到以上文献的启发, 本节在实 Hilbert 空间中构造逆拟变分不等式问题的剩余间隙函数, 利用该间隙函数对该问题解的误差界进行分析.

定理 5.1 设 $T, g: H\to H$ 是连续映射, $K: H\to 2^H$ 是集值映射, 且对任意的 $u\in H$, $K(u)$ 是闭凸集. 定义 $R^\rho(u)=g(u)-P_{K(u)}(g(u)-\rho T(u))$, 则 $\|R^\rho(u)\|$ 是 IQVI(T,g,K) 的间隙函数. 其中 ρ 为正常数.

证 显然对于任意的 $u\in H$, $\|R^\rho(u)\|\ge 0$, 并且 $\|R^\rho(u^*)\|=0$ 当且仅当

$$g(u^*) = P_{K(u^*)}[g(u^*) - \rho T(u^*)].$$

显然 $g(u^*)\in K(u^*)$, 根据引理 1.2 得

$$\langle g(u^*) - (g(u^*) - \rho T(u^*)), v - g(u^*)\rangle \ge 0, \forall v\in K(u^*).$$

即 u^* 是 IQVI(T,g,K) 的解. 这表明 $\|R^\rho(u)\|$ 是 IQVI(T,g,K) 的间隙函数.

定理 5.2 设 $T: H\to H$ 关于 g 是 η - 强单调且 β-Lipschitz 连续的, $g: H\to H$ 是 δ-Lipschitz 连续的, 假设 1.3 成立且满足 $\gamma\in(0,\frac{\eta}{\beta})$, $\rho>\frac{\delta\gamma}{\eta-\beta\gamma}$. 若 u^* 是 IQVI(T,g,K) 的解, 则对任意的 $u\in H$,

$$\|u-u^*\| \le \frac{\rho\beta+\delta}{\rho\eta-(\rho\beta+\delta)\gamma}\|R^\rho(u)\|.$$

证 根据 $P_{K(u^*)}[g(u)-\rho T(u)]$ 的定义, 有

$$\langle g(u) - \rho T(u) - P_{K(u^*)}[g(u)-\rho T(u)], P_{K(u^*)}[g(u)-\rho T(u)] - v\rangle \ge 0, \forall v\in K(u^*).$$

由于 u^* 是 IQVI(T,g,K) 的解, $g(u^*)\in K(u^*)$, 取 $v=g(u^*)$, 则

$$\langle g(u) - \rho T(u) - P_{K(u^*)}[g(u)-\rho T(u)], P_{K(u^*)}[g(u)-\rho T(u)] - g(u^*)\rangle \ge 0. \tag{5.1}$$

另一方面由于 u^* 是 IQVI(T,g,K) 的解且 $P_{K(u^*)}[g(u)-\rho T(u)]\in K(u^*)$, 得

$$\langle \rho T(u^*), P_{K(u^*)}[g(u)-\rho T(u)]-g(u^*)\rangle \geq 0.$$

结合 (5.1) 式得

$$\langle \rho T(u^*)-\rho T(u)-P_{K(u^*)}[g(u)-\rho T(u)]+g(u), P_{K(u^*)}[g(u)-\rho T(u)]-g(u^*)\rangle \geq 0.$$

进一步,

$$\begin{aligned}&\rho\langle T(u^*)-T(u), P_{K(u^*)}[g(u)-\rho T(u)]-g(u)\rangle-\rho\langle T(u^*)-T(u), g(u^*)-g(u)\rangle\\&+\langle g(u)-P_{K(u^*)}[g(u)-\rho T(u)], P_{K(u^*)}[g(u)-\rho T(u)]-g(u)\rangle\\&+\langle g(u)-P_{K(u^*)}[g(u)-\rho T(u)], g(u)-g(u^*)\rangle\geq 0.\end{aligned}$$

因 $T:H\to H$ 关于 g 是 η - 强单调的, 故有

$$\begin{aligned}&\rho\langle T(u^*)-T(u), P_{K(u^*)}[g(u)-\rho T(u)]-g(u)\rangle-\|P_{K(u^*)}[g(u)-\rho T(u)]-g(u)\|^2\\&+\langle g(u)-P_{K(u^*)}[g(u)-\rho T(u)], g(u)-g(u^*)\rangle\geq \eta\rho\|u-u^*\|^2.\end{aligned}$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式和三角不等式得

$$\begin{aligned}&\rho\|T(u^*)-T(u)\|\|P_{K(u^*)}[g(u)-\rho T(u)]-P_{K(u)}[g(u)-\rho T(u)]\|+\rho\|T(u^*)-T(u)\|\\&\cdot\|P_{K(u)}[g(u)-\rho T(u)]-g(u)\|+\|P_{K(u)}[g(u)-\rho T(u)]-g(u)\|\|g(u)-g(u^*)\|\\&+\|P_{K(u)}[g(u)-\rho T(u)]-P_{K(u^*)}[g(u)-\rho T(u)]\|\|g(u)-g(u^*)\|\geq\eta\rho\|u-u^*\|^2.\end{aligned}$$

由于 $T:H\to H$ 是 β-Lipschitz 连续的, $g:H\to H$ 是 σ - 强单调且 δ-Lipschitz 是连续的, 且假设 1.3 成立, 得到

$$\rho\gamma\beta\|u-u^*\|^2+\rho\beta\|u-u^*\|\|R^\rho(u)\|+\delta\|u-u^*\|\|R^\rho(u)\|+\gamma\delta\|u-u^*\|^2\geq\eta\rho\|u-u^*\|^2.$$

因此对于任意的 $u\in H$,

$$\|u-u^*\|\leq\frac{\rho\beta+\delta}{\rho\eta-(\rho\beta+\delta)\gamma}\|R^\rho(u)\|.$$

证毕.

参 考 文 献

[1] He B S, Liu H X. Inverse variational inequalities in the economic field: applications and algorithms [J]. http://www.paper.edu.cn/releasepaper/content/200609–260, 2006.

[2] He B S, Liu H X, Li M, He XZ. PPA-based methods for monotone inverse variational inequalities [J]. http://www.paper.edu.cn/releasepaper/content/200606–219, 2006.

[3] He X, Liu H X. Inverse variational inequalities with projection-based solution methods[J]. European Journal of Operational Research, 2011, 208(1): 12–18.

[4] Hu R, Fang Y P. Well-posedness of inverse variational inequalities[J]. Journal of Convex Analysis, 2008, 15(2): 427–437.

[5] Aussel D, Gupta R, Mehra A. Gap funtions and error bounds for inverse quasi-variational inequalities problems[J]. J. Math. Anal. Appl., 2013, 407(2): 270–280.

[6] 郭小亚, 张从军. 拟变分不等式研究及其在交通问题中的应用 [J]. 应用数学, 2015, 28(04): 743–752.

[7] Noor M A. Existence results for quasi variational inequalities[J]. B. J. Math. Anal., 2007, 2: 186–194.

[8] Noor M A. On general quasi-variational inequalities[J]. Journal of King Saud University-Science, 2012, 24(1): 81–88.

[9] Noor M A. On merit functions for quasi-variational inequalities[J]. Journal of Mathematical Inequalities, 2007, 1(2): 259–268.

[10] Gupta R, Mehra A. Gap funtions and error bounds for quasi variational Inequalities[J]. Journal of Global Optimization, 2012, 53(4): 734–748.

[11] Taji K . On Gap Functions for Quasi-Variational Inequalities[J]. Abstract and Applied Analysis, 2008, 2008(1085-3375): 1563–1569.

[12] 张从军. 集值分析与经济应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.

RESEARCH ON INVERSE QUASI-VARIATIONAL INEQUALITY PROBLEMS

ZHANG Cong-jun[1] , LI Yang[1] , SUN Jie[1] , WANG Yue-hu[2]

(*1.School of Applied Mathematics, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing 210023, China*)

(*2.School of Management Science and Engineering, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing 210023, China*)

Abstract: In this paper, we work on the inverse quasi-variational inequality problem in Hilbert spaces. By using the fixed point principle, we obtain the existence and uniqueness results for IQVI. By using projection technique, Wiener-Hopf equation and auxiliary principle technique, the iterative algorithms for solving IQVI are given, respectively, and the convergences of the algorithms are proved under certain conditions. Finally, the error bound for IQVI is also obtained according to the gap function, which improve and extend some related results in the recent literature.

Keywords: inverse quasi variational inequality; Wiener-Hopf equation; auxiliary principle; gap function

2010 MR Subject Classification: 49J40; 47H06