Vol. 40 (2020)
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

Robin 边界条件下的抛物方程爆破分析

凌征球, 覃思乾, 周泽文
(玉林师范学院数学与统计学院, 广西 玉林 537000)

摘 要: 本文研究了 Robin 边界条件下含有梯度项的一类抛物方程解的爆破问题. 利用合适的 Sobolve 型与一阶微分不等式等方法, 获得了当方程的解发生爆破时其爆破时间的下界估计与解不发生爆破的条件. 推广了文献 [4] 的结果.

关键词: 爆破; 下界; 梯度; Robin 边界条件
MR(2010) **主题分类号**: 35K20; 35K55 **中图分类号**: O175.29
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2020)02-0219-09

1 引言

在过去的几十年间, 非线性抛物方程解的爆破问题已经得到了很广泛的研究, 文献 [1,2] 有较详细的介绍. 其中, 关于解爆破时间 T 的研究, 仍然有许多文章仅针对 T 的上界, 但下界的估计却更加符合实际情况. 随着 Payne[3] 开创性的工作以后, 这种讨论爆破时间下界估计的研究得到了许多学者的关注. 需要指出的是, Li[4] 在齐次 Dirichlet 边界条件下讨论了方程

$$u_t = \Delta u + u^p - |\nabla u|^q, \qquad (x,t) \in \Omega \times (0,T)$$

的爆破问题, 获得了方程的解发生爆破时爆破时间的下界估计. 这里拓展文 [4] 的研究范围, 将在 Robin 边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + ku = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T)$$

下讨论相同的问题. 在这种边界条件下, 文献 [4] 使用的 Sobolev 不等式不再可以使用. 另外, 由于方程中梯度项的存在, 需要克服一些困难. 因此, 当方程的解发生爆破时, 通过建立合适的 Sobolev 型微分不等式, 获得了爆破时间的下界估计. 关于爆破时间下界估计的更多结论见文献 [5–11].

2 爆破情况

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是具有足够光滑边界 $\partial\Omega$ 与凸性的有界区域. 考虑如下具有非线性梯度项的抛物问题

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^p - |\nabla u|^q, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + ku = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, & x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

*收稿日期: 2019-01-12 接收日期: 2019-06-24
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11461076).
作者简介: 凌征球 (1963–), 男, 广西桂平, 教授, 主要研究方向: 偏微分方程理论与应用.

其中 $p,k>0,q>2$, Δ 和 ∇ 表示拉普拉斯和梯度算子, T 是可能的爆破时间, $(\partial u/\partial\nu)$ 表示在边界向外的法向单位导数, $u_0(x)$ 满足适当紧条件的连续函数.

根据最大值原理有 $u\geq 0$. 另外, 除了在某些时刻会发生爆破之外, 还假设问题存在古典正解. 当解发生爆破时, 本文的目的是要确定爆破时间的下界估计. 为此, 定义下面的辅助函数

$$\varphi(t)=\int_\Omega u^{8p+1}\mathrm{d}x. \tag{2.2}$$

利用分部积分与边界条件, 简单的计算就可以得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{8p+1}\varphi'(t)&=\int_\Omega u^{8p}u_t\mathrm{d}x=\int_\Omega u^{8p}\Delta u\mathrm{d}x+\int_\Omega u^{9p}\mathrm{d}x-\int_\Omega u^{8p}|\nabla u|^q\mathrm{d}x\\&\leq -8p\int_\Omega u^{8p-1}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega u^{9p}\mathrm{d}x-\int_\Omega u^{8p}|\nabla u|^q\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{2.3}$$

另外, 由于 $|\nabla u^{\frac{8p+1}{2}}|^2=\frac{(8p+1)^2}{4}u^{8p-1}|\nabla u|^2,\quad |\nabla u^{\frac{8p+q}{q}}|^q=(\frac{8p+q}{q})^q u^{8p}|\nabla u|^q$. 因此 (2.3) 式可以写成

$$\begin{aligned}\frac{1}{8p+1}\varphi'(t)\ \leq\ &(\frac{1}{2}\int_\Omega u^{9p}\mathrm{d}x-(\frac{q}{8p+q})^q\int_\Omega|\nabla u^{\frac{8p+q}{q}}|^q\mathrm{d}x)\\&+(\frac{1}{2}\int_\Omega u^{9p}\mathrm{d}x-\frac{32p}{(8p+1)^2}\int_\Omega|\nabla u^{\frac{8p+1}{2}}|^2\mathrm{d}x)=J_1+J_2.\end{aligned} \tag{2.4}$$

下面考虑 J_1. 由于 $|\nabla u^{\frac{8p+q}{q}}|$ 的指数是 q 而不是 2, 因此需要一点技巧去克服这个困难使得其指数变成 2. 为了方便, 令 $v=u^{\frac{8p+q}{q}}$ 并通过 Hölder 不等式就有

$$\int_\Omega|\nabla v^{\frac{q}{2}}|^2\mathrm{d}x=\frac{q^2}{4}\int_\Omega v^{q-2}|\nabla v|^2\mathrm{d}x\leq\frac{q^2}{4}(\int_\Omega v^q\mathrm{d}x)^{\frac{q-2}{q}}(\int_\Omega|\nabla v|^q\mathrm{d}x)^{\frac{2}{q}}. \tag{2.5}$$

再从 Poincare 不等式, $\lambda_1\int_\Omega v^q\mathrm{d}x\leq\int_\Omega|\nabla v^{\frac{q}{2}}|^2\mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}v^{\frac{q}{2}}\frac{\partial v^{\frac{q}{2}}}{\partial\nu}\mathrm{d}S$, 这里 λ_1 是下列弹性膜问题

$$\Delta w+\lambda w=0,\quad x\in\Omega;\quad \frac{\partial w}{\partial\nu}+kw=0,\quad x\in\partial\Omega$$

的第一正特征值. 利用 Robin 边界条件, 又有

$$\lambda_1\int_\Omega v^q\mathrm{d}x\leq\int_\Omega|\nabla v^{\frac{q}{2}}|^2\mathrm{d}x+\frac{k(8p+q)}{2}\int_{\partial\Omega}v^q\mathrm{d}S. \tag{2.6}$$

再根据散度定理

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}x_i\nu_i v^q\mathrm{d}S&\leq\int_\Omega x_{i,i}v^q\mathrm{d}x+q\int_\Omega x_i v^{q-1}|v_{,i}|\mathrm{d}x\\&\leq 3\int_\Omega v^q\mathrm{d}x+q(\int_\Omega x_ix_iv^q\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}(\int_\Omega v^{q-2}|\nabla v|^2\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

利用 Ω 的凸性可以令

$$l_0=\min_{\partial\Omega}(\mathbf{x}\cdot\nu),\quad d^2=\max_{\Omega}|\mathbf{x}|$$

以及 Young 不等式得到

$$\int_{\partial\Omega} v^q \mathrm{d}S \leq (\frac{3}{l_0} + \frac{d}{l_0}\theta)\int_\Omega v^q \mathrm{d}x + \frac{d}{l_0\theta}\int_\Omega |\nabla v^{\frac{q}{2}}|^2 \mathrm{d}x, \tag{2.8}$$

这里 θ 是任意正的常数. 这样从 (2.8) 式和 (2.6) 式就可以获得

$$(\lambda_1 - \frac{3k(8p+q)}{2l_0} - \frac{kd(8p+q)}{2l_0}\theta)\int_\Omega v^q \mathrm{d}x \leq (1 + \frac{kd(8p+q)}{2l_0\theta})\int_\Omega |\nabla v^{\frac{q}{2}}|^2 \mathrm{d}x. \tag{2.9}$$

如果 Ω, 也就是 λ_1 满足

$$\lambda_1 - \frac{3k(8p+q)}{2l_0} > 0, \tag{2.10}$$

然后选择充分小的 θ, 使得

$$C_1 = \lambda_1 - \frac{3k(8p+q)}{2l_0} - \frac{kd(8p+q)}{2l_0}\theta > 0.$$

这样 (2.9) 式就可以写成:

$$C_1 \int_\Omega v^q \mathrm{d}x \leq C_0 \int_\Omega |\nabla v^{\frac{q}{2}}|^2 \mathrm{d}x, \tag{2.11}$$

其中 $C_0 = 1 + \frac{kd(8p+q)}{2l_0\theta}$. 把 (2.11) 式代入 (2.5) 式得到

$$\int_\Omega |\nabla v^{\frac{q}{2}}|^2 \mathrm{d}x \leq (\frac{q}{2})^q (\frac{C_0}{C_1})^{\frac{q-2}{2}} \int_\Omega |\nabla v|^q \mathrm{d}x. \tag{2.12}$$

因此根据 J_1 的定义就有

$$J_1 \leq \frac{1}{2}\int_\Omega u^{9p}\mathrm{d}x - (\frac{2}{8p+q})^q (\frac{C_1}{C_0})^{\frac{q-2}{2}} \int_\Omega |\nabla u^{\frac{8p+q}{2}}|^2 \mathrm{d}x. \tag{2.13}$$

下面考虑 (2.13) 式右边的第一项. 如果 $p > 1$, 利用 Hölder 不等式和 $a^r b^q \leq ra + qb, r + q = 1, a, b > 0$ 得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega u^{9p}\mathrm{d}x &\leq (\int_\Omega u^{8p+1}\mathrm{d}x)^{\frac{8p+1-\sigma_1}{8p+1}} (\int_\Omega u^{\frac{9(8p+q)}{8}}\mathrm{d}x)^{\frac{\sigma_1}{8p+1}} \\ &\leq \frac{8p+1-\sigma_1}{8p+1}\int_\Omega u^{8p+1}\mathrm{d}x + \frac{\sigma_1}{8p+1}\int_\Omega u^{\frac{9(8p+q)}{8}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{8p+1-\sigma_1}{8p+1}\varphi(t) + \frac{\sigma_1}{8p+1}\int_\Omega u^{\frac{9(8p+q)}{8}}\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{2.14}$$

这里

$$\sigma_1 = \frac{8(p-1)(8p+1)}{8(p-1)+9q} \in (0, 8p+1).$$

借助文献 [3] 的思想, 下面寻找一个合适的 Sobolev 型不等式来计算 $u^{9(8p+q)/8}$ 的积分. 首先, 令 x_{im} 和 x_{iM} 分别表示 Ω 在坐标 x_i 上的最小值与最大值, D_z 表示 Ω 与平面 $x_3 = z$ 相交的截面. 其次, 为了方面计算, 设 $\omega := u^{(8p+q)/4}$. 根据 Schwarz 不等式得到

$$\int_\Omega \omega^{\frac{9}{2}}\mathrm{d}x = \int_{x_{3m}}^{x_{3M}} (\int_{D_z} \omega^{\frac{9}{2}}\mathrm{d}A)\mathrm{d}x_3 \leq \int_{x_{3m}}^{x_{3M}} (\int_{D_z} \omega^3 \mathrm{d}A \int_{D_z} \omega^6 \mathrm{d}A)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x_3. \tag{2.15}$$

令 $P=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,z)$ 是截面 D_z 上的一个点, P_1 与 P_2 表示截面 D_z 的边界与直线 $x_2=\bar{x}_2$ 的两个交点. 同样, Q_1 与 Q_2 表示 D_z 的边界与直线 $x_1=\bar{x}_1$ 的两个交点, 那么

$$\omega^3(P)=\omega^3(P_1)+3\int_{P_1}^{P}\omega^2\omega_{x_1}\mathrm{d}x_1,\quad \omega^3(P)=\omega^3(P_2)-3\int_{P_2}^{P}\omega^2\omega_{x_1}\mathrm{d}x_1.$$

这样可以获得

$$\omega^3(P)\le\frac{1}{2}[\omega^3(P_1)+\omega^3(P_2)]+\frac{3}{2}\int_{P_1}^{P_2}\omega^2|\omega_{x_1}|\mathrm{d}x_1. \tag{2.16}$$

类似的,

$$\omega^3(P)\le\frac{1}{2}[\omega^3(Q_1)+\omega^3(Q_2)]+\frac{3}{2}\int_{Q_1}^{Q_2}\omega^2|\omega_{x_2}|\mathrm{d}x_2. \tag{2.17}$$

把上面两式左右相乘并在 D_z 上积分, 即有

$$\begin{aligned}\int_{D_z}\omega^6(P)\mathrm{d}A &\le (\frac{1}{2}\int_{x_{2m}}^{x_{2M}}[\omega^3(P_1)+\omega^3(P_2)]\mathrm{d}x_2+\frac{3}{2}\int_{D_z}\omega^2|\omega_{x_1}|\mathrm{d}A)\\ &\quad\times(\frac{1}{2}\int_{x_{1m}}^{x_{1M}}[\omega^3(Q_1)+\omega^3(Q_2)]\mathrm{d}x_1+\frac{3}{2}\int_{D_z}\omega^2|\omega_{x_2}|\mathrm{d}A)\\ &\le (\frac{1}{2}\int_{\partial D_z}\omega^3|\nu_1|\mathrm{d}s+\frac{3}{2}\int_{D_z}\omega^2|\omega_{x_1}|\mathrm{d}A)\\ &\quad\times(\frac{1}{2}\int_{\partial D_z}\omega^3|\nu_2|\mathrm{d}s+\frac{3}{2}\int_{D_z}\omega^2|\omega_{x_2}|\mathrm{d}A).\end{aligned}$$

再代回 (2.15) 式得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega\omega^{\frac{9}{2}}\mathrm{d}x &\le \int_{x_{3m}}^{x_{3M}}(\int_{D_z}\omega^3\mathrm{d}A)^{\frac{1}{2}}\times(\frac{1}{2}\int_{\partial D_z}\omega^3|\nu_1|\mathrm{d}s+\frac{3}{2}\int_{D_z}\omega^2|\omega_{x_1}|\mathrm{d}A)^{\frac{1}{2}}\\ &\quad\times(\frac{1}{2}\int_{\partial D_z}\omega^3|\nu_2|\mathrm{d}s+\frac{3}{2}\int_{D_z}\omega^2|\omega_{x_2}|\mathrm{d}A)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x_3\\ &\le \max_z(\int_{D_z}\omega^3\mathrm{d}A)^{\frac{1}{2}}\int_{x_{3m}}^{x_{3M}}(\frac{1}{2}\int_{\partial D_z}\omega^3|\nu_1|\mathrm{d}s+\frac{3}{2}\int_{D_z}\omega^2|\omega_{x_1}|\mathrm{d}A)^{\frac{1}{2}}\\ &\quad\times(\frac{1}{2}\int_{\partial D_z}\omega^3|\nu_2|\mathrm{d}s+\frac{3}{2}\int_{D_z}\omega^2|\omega_{x_2}|\mathrm{d}A)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x_3\\ &\le \max_z(\int_{D_z}\omega^3\mathrm{d}A)^{\frac{1}{2}}F_1^{\frac{1}{2}}F_2^{\frac{1}{2}},\end{aligned} \tag{2.18}$$

其中

$$F_i=\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\omega^3|\nu_i|\mathrm{d}S+\frac{3}{2}\int_\Omega\omega^2|\omega_{x_i}|\mathrm{d}x,\quad i=1,2. \tag{2.19}$$

最后, 为了计算 ω^3 在 D_z 上的积分, 用 Ω^+ 表示 Ω 在 D_z 上的部分, 而相应的边界是 $\partial\Omega^+$, 而下面部分与边界则分别用 Ω^- 和 $\partial\Omega^-$ 表示. 这样根据散度定理,

$$\begin{aligned}\int_{D_z}\omega^3\mathrm{d}A&=\int_{\partial\Omega^+}\omega^3\nu_3\mathrm{d}S-3\int_{\Omega^+}\omega^2\omega_{x_3}\mathrm{d}x,\\ \int_{D_z}\omega^3\mathrm{d}A&=-\int_{\partial\Omega^-}\omega^3\nu_3\mathrm{d}S+3\int_{\Omega^-}\omega^2\omega_{x_3}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

由此得到

$$\int_{D_z}\omega^3\mathrm{d}A\le\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\omega^3|\nu_3|\mathrm{d}S+\frac{3}{2}\int_{\Omega}\omega^2|\omega_{x_3}|\mathrm{d}x.$$

即可以扩展 (2.19) 式到 $i=3$ 的情况. 又由于

$$F_1^{\frac{1}{3}}F_2^{\frac{1}{3}}F_3^{\frac{1}{3}}\le\frac{1}{3}(F_1+F_2+F_3),\qquad (a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2),\quad a,b,c>0.$$

因此从 (2.18) 式得

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\omega^{\frac{9}{2}}\mathrm{d}x&\le F_1^{\frac{1}{2}}F_2^{\frac{1}{2}}F_3^{\frac{1}{2}}\le\frac{1}{3^{3/2}}(F_1+F_2+F_3)^{\frac{3}{2}}\\&=\frac{1}{3^{3/2}}[(A_1+A_2+A_3]+(B_1+B_2+B_3)]^{\frac{3}{2}}\\&\le\frac{1}{3^{3/4}}((A_1^2+A_2^2+A_3^2)^{1/2}+(B_1^2+B_2^2+B_3^2)^{1/2})^{\frac{3}{2}},\end{aligned}\tag{2.20}$$

其中 $A_i=\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\omega^3|\nu_i|\mathrm{d}S, B_i=\frac{3}{2}\int_{\Omega}\omega^2|\omega_{x_i}|\mathrm{d}x, i=1,2,3.$

另外根据 Schwarz 不等式, 有

$$A_1^2+A_2^2+A_3^2=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}(\int_{\partial\Omega}\omega^3|\nu_i|\mathrm{d}S)^2\le\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}\int_{\partial\Omega}\omega^3\mathrm{d}S\int_{\partial\Omega}\omega^3\nu_i^2\mathrm{d}S=\frac{1}{4}(\int_{\partial\Omega}\omega^3\mathrm{d}S)^2.$$

类似地,

$$\begin{aligned}B_1^2+B_2^2+B_3^2&=\frac{9}{4}\sum_{i=1}^{3}(\int_{\Omega}\omega^2|\omega_{x_i}|\mathrm{d}x)^2\\&\le\frac{9}{4}\sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega}\omega^2\mathrm{d}x\int_{\Omega}\omega^2|\omega_{x_i}|^2\mathrm{d}x=\frac{9}{16}\int_{\Omega}\omega^2\mathrm{d}x\int_{\Omega}|\nabla\omega^2|^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此 (2.20) 式可以变成

$$\int_{\Omega}\omega^{\frac{9}{2}}\mathrm{d}x\le\frac{1}{3^{3/4}}(\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\omega^3\mathrm{d}S+\frac{3}{4}(\int_{\Omega}\omega^2\mathrm{d}x)^{1/2}(\int_{\Omega}|\nabla\omega^2|^2\mathrm{d}x)^{1/2})^{\frac{3}{2}}.\tag{2.21}$$

类似于 (2.7) 与 (2.8) 式, 可以得到

$$\int_{\partial\Omega}\omega^3\mathrm{d}S\le\frac{3}{l_0}\int_{\Omega}\omega^3\mathrm{d}x+\frac{3d}{2l_0}(\int_{\Omega}\omega^2\mathrm{d}x)^{1/2}(\int_{\Omega}|\nabla\omega^2|^2\mathrm{d}x)^{1/2}.\tag{2.22}$$

把 (2.22) 式代入 (2.21) 式,

$$\int_{\Omega}\omega^{\frac{9}{2}}\mathrm{d}x\le\frac{1}{3^{3/4}}(\frac{3}{2l_0}\int_{\Omega}\omega^3\mathrm{d}x+\frac{3}{4}(\frac{d}{l_0}+1)(\int_{\Omega}\omega^2\mathrm{d}x)^{1/2}(\int_{\Omega}|\nabla\omega^2|^2\mathrm{d}x)^{1/2})^{\frac{3}{2}}.\tag{2.23}$$

再使用不等式 $(a+b)^{\frac{3}{2}}\le 2^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}), a,b>0$, (2.23) 式就可以变成

$$\int_{\Omega}\omega^{\frac{9}{2}}\mathrm{d}x\le\frac{2^{1/2}}{3^{3/4}}((\frac{3}{2l_0}\int_{\Omega}\omega^3\mathrm{d}x)^{\frac{3}{2}}+(\frac{3}{4})^{\frac{3}{2}}(\frac{d}{l_0}+1)^{\frac{3}{2}}(\int_{\Omega}\omega^2\mathrm{d}x)^{3/4}(\int_{\Omega}|\nabla\omega^2|^2\mathrm{d}x)^{3/4}).\tag{2.24}$$

再依次使用 Young 和 Hölder 不等式, 还有

$$
\begin{aligned}
(\int_\Omega \omega^2 \mathrm{d}x)^{3/4}(\int_\Omega |\nabla\omega^2|^2\mathrm{d}x)^{3/4} &\le \frac{1}{4}\varepsilon_1^{-3}(\int_\Omega \omega^2\mathrm{d}x)^3+\frac{3}{4}\varepsilon_1\int_\Omega|\nabla\omega^2|^2\mathrm{d}x, &(2.25)\\
\int_\Omega \omega^3\mathrm{d}x &\le (\int_\Omega \omega^{\frac{4(8p+1)}{8p+q}}\mathrm{d}x)^{\frac{3(8p+q)}{4(8p+1)}}|\Omega|^{1-\frac{3(8p+q)}{4(8p+1)}}, &(2.26)\\
\int_\Omega \omega^2\mathrm{d}x &\le (\int_\Omega \omega^{\frac{4(8p+1)}{8p+q}}\mathrm{d}x)^{\frac{8p+q}{2(8p+1)}}|\Omega|^{1-\frac{8p+q}{2(8p+1)}}, &(2.27)
\end{aligned}
$$

这里 ε_1 是任意正的常数, 并且还假设 $p>\frac{3q-4}{8}$.

结合 (2.13), (2.14), (2.24)–(2.27) 式, 并选择 ε_1 满足

$$
\frac{\sigma_1}{2(8p+1)}\frac{2^{1/2}}{3^{3/4}}(\frac{3}{4})^{\frac{5}{2}}(\frac{d}{l_0}+1)^{\frac{3}{2}}\varepsilon_1-(\frac{2}{8p+q})^q(\frac{C_1}{C_0})^{\frac{q-2}{2}}=0,
$$

由此就可以获得

$$
\begin{aligned}
J_1 \le\ & \frac{8p+1-\sigma_1}{2(8p+1)}\varphi(t)+\frac{\sigma_1}{2(8p+1)}\frac{2^{1/2}}{3^{3/4}}(\frac{3}{2l_0})^{\frac{3}{2}}|\Omega|^{\frac{3}{2}(1-\frac{3(8p+q)}{4(8p+1)})}\varphi(t)^{\frac{9(8p+q)}{8(8p+1)}}\\
&+\frac{\sigma_1}{2(8p+1)}\frac{2^{1/2}}{3^{3/4}}(\frac{3}{4})^{\frac{3}{2}}(\frac{d}{l_0}+1)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{4}\varepsilon_1^{-3}|\Omega|^{3(1-\frac{8p+q}{2(8p+1)})}\varphi(t)^{\frac{3(8p+q)}{2(8p+1)}}. \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

下面估算 J_2. 类似于 (2.14) 式, 首先有

$$
\int_\Omega u^{9p}\mathrm{d}x\le\frac{9}{8p+1}\varphi(t)+\frac{8(p-1)}{8p+1}\int_\Omega u^{\frac{9(8p+1)}{8}}\mathrm{d}x.
$$

然后从 J_2 的定义得到

$$
J_2\le\frac{9}{2(8p+1)}\varphi(t)+\frac{4(p-1)}{8p+1}\int_\Omega u^{\frac{9(8p+1)}{8}}\mathrm{d}x-\frac{32p}{(8p+1)^2}\int_\Omega|\nabla u^{\frac{8p+1}{2}}|^2\mathrm{d}x. \qquad (2.29)
$$

类似上面的讨论, 也可以估算 $u^{\frac{9(8p+1)}{8}}$ 的积分,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega u^{\frac{9(8p+1)}{8}}\mathrm{d}x \le\ & \frac{2^{1/2}}{3^{3/4}}(\frac{3}{2l_0})^{\frac{3}{2}}|\Omega|^{\frac{3}{8}}\varphi(t)^{\frac{9}{8}}+\frac{2^{1/2}}{3^{3/4}}(\frac{3}{4})^{\frac{3}{2}}(\frac{d}{l_0}+1)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{4}\varepsilon_2^{-3}|\Omega|^{\frac{3}{2}}\varphi(t)^{\frac{3}{2}}\\
&+\frac{2^{1/2}}{3^{3/4}}(\frac{3}{4})^{\frac{5}{2}}(\frac{d}{l_0}+1)^{\frac{3}{2}}\varepsilon_2\int_\Omega|\nabla u^{\frac{8p+1}{2}}|^2\mathrm{d}x, \qquad (2.30)
\end{aligned}
$$

这里 ε_2 也是一个任意正的常数. 把 (2.30) 式代进 (2.29) 式, 并且选择 ε_2 满足

$$
4(p-1)\frac{2^{1/2}}{3^{3/4}}(\frac{3}{4})^{\frac{5}{2}}(\frac{d}{l_0}+1)^{\frac{3}{2}}\varepsilon_2-\frac{32p}{8p+1}=0,
$$

(2.29) 式就变成

$$
\begin{aligned}
J_2\le\ & \frac{9}{2(8p+1)}\varphi(t)+\frac{4(p-1)}{8p+1}\frac{2^{1/2}}{3^{3/4}}(\frac{3}{2l_0})^{\frac{3}{2}}|\Omega|^{\frac{3}{8}}\varphi(t)^{\frac{9}{8}}\\
&+\frac{4(p-1)}{8p+1}\frac{2^{1/2}}{3^{3/4}}(\frac{3}{4})^{\frac{3}{2}}(\frac{d}{l_0}+1)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{4}\varepsilon_2^{-3}|\Omega|^{\frac{3}{2}}\varphi(t)^{\frac{3}{2}}. \qquad (2.31)
\end{aligned}
$$

把 (2.28) 和 (2.31) 式代入 (2.4) 式, 就可以获得关于函数 φ 的一阶微分不等式

$$\varphi'(t) \leq K_1\varphi(t) + K_2\varphi(t)^{\frac{9(8p+q)}{8(8p+1)}} + K_3\varphi(t)^{\frac{3(8p+q)}{2(8p+1)}} + K_4\varphi(t)^{\frac{9}{8}} + K_5\varphi(t)^{\frac{3}{2}}, \tag{2.32}$$

其中

$$\begin{cases} K_1 = \dfrac{9p(8p+1)}{8(p-1)+9p} + \dfrac{9}{2}, \\ K_2 = \dfrac{\sigma_1}{2}\dfrac{2^{1/2}}{3^{3/4}}(\dfrac{3}{2l_0})^{\frac{3}{2}}|\Omega|^{\frac{3}{2}(1-\frac{3(8p+q)}{4(8p+1)})}, \\ K_3 = \dfrac{\sigma_1}{8}\dfrac{2^{1/2}}{3^{3/4}}(\dfrac{3}{4})^{\frac{3}{2}}(\dfrac{d}{l_0}+1)^{\frac{3}{2}}\varepsilon_1^{-3}|\Omega|^{3(1-\frac{8p+q}{2(8p+1)})}, \\ K_4 = 4(p-1)\dfrac{2^{1/2}}{3^{3/4}}(\dfrac{3}{2l_0})^{\frac{3}{2}}|\Omega|^{\frac{3}{8}}, \\ K_5 = (p-1)\dfrac{2^{1/2}}{3^{3/4}}(\dfrac{3}{4})^{\frac{3}{2}}(\dfrac{d}{l_0}+1)^{\frac{3}{2}}\varepsilon_2^{-3}|\Omega|^{\frac{3}{2}}. \end{cases} \tag{2.33}$$

再积分得到

$$\int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} \frac{\mathrm{d}\eta}{K_1\eta + K_2\eta^{\frac{9(8p+q)}{8(8p+1)}} + K_3\eta^{\frac{3(8p+q)}{2(8p+1)}} + K_4\eta^{\frac{9}{8}} + K_5\eta^{\frac{3}{2}}} \leq t, \tag{2.34}$$

由此得到爆破时间 T 的一个下界估计

$$T \geq T_0 = \int_{\varphi(0)}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\eta}{K_1\eta + K_2\eta^{\frac{9(8p+q)}{8(8p+1)}} + K_3\eta^{\frac{3(8p+q)}{2(8p+1)}} + K_4\eta^{\frac{9}{8}} + K_5\eta^{\frac{3}{2}}}, \tag{2.35}$$

其中 $\varphi(0) = \int_\Omega [u_0(x)]^{8p+1}\mathrm{d}x$.

把上面的分析总结成如下定理.

定理 1 如果 $p > \max\{1, \frac{3q-4}{8}\}$, 以及 (2.10) 式成立, 那么当问题 (2.1) 的非负古典解 u 在 (2.2) 式测度 φ 的意义下有限时刻 T 发生爆破时, 则 T 的下界 T_0 由 (2.35) 式给出.

3 非爆破情况

这里考虑 $p < 1$ 的情况, 此时问题 (2.1) 的解不会在有限时刻内发生爆破. 令 $\varphi(t)$ 依然是 (2.2) 式定义的辅助函数, 从 (2.4) 式得到

$$\varphi'(t) \leq (8p+1)(J_1 + J_2). \tag{3.1}$$

类似 (2.11) 式的讨论, 有

$$\int_\Omega |\nabla u^{\frac{8p+q}{2}}|^2\mathrm{d}x \geq C_2\int_\Omega u^{8p+q}\mathrm{d}x, \tag{3.2}$$

其中

$$C_2 = \frac{2l_0\lambda_1 - 3k(16p+q) - dk(16p+q)\theta}{2l_0 + dk\theta^{-1}(16p+q)} > 0.$$

因此从 (2.13) 式得到

$$J_1 \leq \frac{1}{2}\int_\Omega u^{9p}\mathrm{d}x - (\frac{2}{8p+q})^q(\frac{C_1}{C_0})^{\frac{q-2}{2}}C_2\int_\Omega u^{8p+q}\mathrm{d}x. \tag{3.3}$$

另外, 根据 Hölder 不等式, 也有

$$\int_\Omega u^{9p}\mathrm{d}x \le (\int_\Omega u^{8p+1}\mathrm{d}x)^{\frac{9p}{8p+1}}|\Omega|^{\frac{1-p}{8p+1}} = \varphi(t)^{\frac{9p}{8p+1}}|\Omega|^{\frac{1-p}{8p+1}} \tag{3.4}$$

和

$$\int_\Omega u^{8p+q}\mathrm{d}x \ge (\int_\Omega u^{8p+1}\mathrm{d}x)^{\frac{8p+q}{8p+1}}|\Omega|^{\frac{1-q}{8p+1}} = \varphi(t)^{\frac{8p+q}{8p+1}}|\Omega|^{\frac{1-q}{8p+1}}. \tag{3.5}$$

把 (3.4), (3.5) 式代入 (3.3) 式得

$$\begin{aligned} J_1 &\le \frac{1}{2}|\Omega|^{\frac{1-p}{8p+1}}\varphi(t)^{\frac{9p}{8p+1}} - (\frac{2}{8p+q})^q(\frac{C_1}{C_0})^{\frac{q-2}{2}}C_2|\Omega|^{\frac{1-q}{8p+1}}\varphi(t)^{\frac{8p+q}{8P+1}} \\ &= \varphi(t)^{\frac{9p}{8p+1}}(\frac{1}{2}|\Omega|^{\frac{1-p}{8p+1}} - (\frac{2}{8p+q})^q(\frac{C_1}{C_0})^{\frac{q-2}{2}}C_2|\Omega|^{\frac{1-q}{8p+1}}\varphi(t)^{\frac{q-p}{8P+1}}). \end{aligned} \tag{3.6}$$

下面估算 J_2. 类似 (2.11) 式的讨论也得到

$$\int_\Omega |\nabla u^{\frac{8p+1}{2}}|^2\mathrm{d}x \ge C_3\int_\Omega u^{8p+1}\mathrm{d}x = C_3\varphi(t), \tag{3.7}$$

这里

$$C_3 = \frac{2l_0\lambda_1 - 3k(16p+1) - dk(16p+1)\theta}{2l_0 + dk\theta^{-1}(16p+1)} > 0.$$

利用 (3.4) 式与 (3.7) 式有

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2}\int_\Omega u^{9p}\mathrm{d}x - \frac{32p}{(8p+1)^2}\int_\Omega |\nabla u^{\frac{8p+1}{2}}|^2\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}|\Omega|^{\frac{1-p}{8p+1}}\varphi(t)^{\frac{9p}{8p+1}} - \frac{32p}{(8p+1)^2}C_3\varphi(t) \\ &= \varphi(t)^{\frac{9p}{8p+1}}(\frac{1}{2}|\Omega|^{\frac{1-p}{8p+1}} - \frac{32p}{(8p+1)^2}C_3\varphi(t)^{\frac{1-p}{8p+1}}). \end{aligned} \tag{3.8}$$

最后, 结合 (3.1),(3.6) 与 (3.8) 式就可以得到下面的一阶微分不等式

$$\begin{aligned} \varphi'(t) \le\ & (8p+1)\varphi(t)^{\frac{9p}{8p+1}}(\frac{1}{2}|\Omega|^{\frac{1-p}{8p+1}} - (\frac{2}{8p+q})^q(\frac{C_1}{C_0})^{\frac{q-2}{2}}C_2|\Omega|^{\frac{1-q}{8p+1}}\varphi(t)^{\frac{q-p}{8P+1}}) \\ & +(8p+1)\varphi(t)^{\frac{9p}{8p+1}}(\frac{1}{2}|\Omega|^{\frac{1-p}{8p+1}} - \frac{32p}{(8p+1)^2}C_3\varphi(t)^{\frac{1-p}{8p+1}}). \end{aligned} \tag{3.9}$$

显然, 如果问题 (2.1) 的解 u 在测度 φ 的意义下发生爆破, 那么从 (3.9) 式导出 $\varphi'(t) \le 0$, 这是一个矛盾. 这样就得到了下面的定理.

定理 2 假设 u 是问题 (2.1) 的一个非负古典解, 如果 $p < 1$ 和第一特征值 λ_1 满足 $2l_0\lambda_1 - 3k(16p+q) > 0$, 那么 u 不能在测度 φ 的意义下发生爆破.

注 为了给出定理 2 的证明, 可以使用另外的辅助函数来代替 (2.2) 式定义的函数 $\varphi(t)$. 例如, 类似文献 [6], 可以定义函数 $\Phi(t) = \int_\Omega u^2\mathrm{d}x$ 来完成定理的证明.

参 考 文 献

[1] Quittner R, Souplet P. Superlinear parabolic problems: blow-up, global existence and steady states[M]. Basel: Birkhauser, 2007.

[2] Levine H A. The role of critical exponents in blow-up theorems[J]. SIAM Reviews, 1990, 32: 262–288.

[3] Payne L E, Schaefer P W. Lower bounds for blow-up time in parabolic problems under Neumann conditions[J]. Appl. Anal., 2006, 85: 1301–1311.

[4] Li Haixia, Gao Wenjie, Han Yuzhu. Lower bounds for the blowup time of solutions to a nonlinear parabolic problem[J]. Electron J. Differential Equations, 2014, 20: 1–6.

[5] Payne L E, SchaeferP W. Lower bounds for blow-up time in parabolic problems under Dirichlet conditions[J]. J. Math. Anal. Appl., 2007, 328: 1196–1205.

[6] Payne L E, Philippin G A, Schaefer P W. Bounds for blow-up time in nonlinear parabolic problems[J]. J. Math. Anal. Appl., 2008, 338: 438–447.

[7] Payne L E, Philippin G A, Schaefer P W. Blow-up phenomena for some nonlinear parabolic problems[J]. Nonlinear Anal., 2008, 69: 3495–3502.

[8] Liu Dengming, Mu Chunlai, Xin Qiao. Lower bounds estimate for the blow-up time of a nonlinear nonlocal porous medium equation[J]. Acta Math. Sci., 2013, 32B(3): 1206–1212.

[9] Song Xianfa, Lv Xiaoshuang. Bounds of blowup time and blowup rate estimates for a type of parabolic equations with weighted source[J]. Appl. Math. & Computation, 2014, 236: 78–92.

[10] Baghaei K, Hesaaraki M B. Lower bounds for the blow-up time of nonlinear parabolic problems with Robin boundary conditions[J]. Electron J. Differential Equations, 2014, 113: 1–5.

[11] Baghaei K, Ghaemi M B, Hesaaraki M. Lower bounds for the blow-up time in a semilinear parabolic problem involving a variable source[J]. Appl. Math. Letters, 2014, 27: 49–52.

BLOW-UP ANALYSIS IN A PARABOLIC EQUATION WITH GRADIENT TERM UNDER ROBIN BOUNDARY CONDITION

LING Zheng-qiu , QIN Si-qian , ZHOU Ze-wen

(*School of Mathematics and Statistics, Yulin Normal University, Yulin 537000, China*)

Abstract: In this paper, we study the blow-up questions of solution for a parabolic equation with a gradient term under Robin boundary condition. By using Sobolev-type and first order differential inequalities, we get a lower bound on blow-up time when blow-up does occur and the conditions which ensure that blow-up does not appear, which promote the conclusion of the fourth reference.

Keywords: blow-up; lower bound; gradient; Robin boundary condition

2010 MR Subject Classification: 35K20; 35K55