

Victor-Carmen 混沌系统的有限时间滑模同步

毛北行

(郑州航空工业管理学院数学学院, 河南 郑州 450015)

摘 要: 本文研究 Victor-Carmen 混沌系统的有限时间同步. 利用滑模方法提出一种新型滑模面, 获得 Victor-Carmen 混沌系统取得有限时间滑模同步的充分条件, 结论表明: 适当条件下 Victor-Carmen 混沌系统的主从系统是有限时间滑模同步的.

关键词: 新型滑模; 有限时间; Victor-Carmen 混沌系统

MR(2010) 主题分类号: 34D06

中图分类号: O482.4

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2019)06-0925-06

1 引言

混沌系统的同步控制逐步成为研究的热门课题^[1-12], 而利用滑模控制方法研究同步逐渐成为研究不确定性系统的便捷方法, 并取得了丰富的成果. 主动滑模方法, 自适应滑模方法, 积分滑模方法及比例积分滑模方法, 有限时间滑模方法, 模糊滑模等方法被相继提出. 例如: 文献 [13] 利用主动滑模方法研究了一类混沌系统的同步控制问题, 实现了驱动响应系统的主动滑模同步控制; 文献 [14] 研究了分数阶 Van der pol 振子网络的混沌同步; 文献 [15] 基于自适应滑模方法研究分数阶参数不确定系统的异结构混沌同步; 文献 [16] 研究 Rössler 混沌系统的自适应滑模控制问题; 实现了对 Rössler 混沌系统的同步控制; 文献 [17] 利用积分滑模滑模方法研究航天器的姿态容错控制; 文献 [18] 利用有限时间滑模方法研究了多涡卷混沌系统的同步.

另一方面, Victor-Carmen 混沌系统的同步激起众广大学者的极大热情, 例如: 文献 [19] 研究了 Victor-Carmen 混沌系统的投影同步问题; 文献 [20] 基于自适应滑模方法研究了分数阶 Victor-Carmen 混沌系统的自适应滑模控制问题. 在以上研究的基础上, 研究 Victor-Carmen 混沌系统的有限时间滑模同步问题, 设计新型滑模面, 能够使误差动态系统有限时间内收敛到滑模面, 较大提高了滑模同步的效率.

2 系统描述及主要结果

考虑 Victor-Carmen 混沌系统^[20]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - \alpha x_2 x_3, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + cx_3 - \beta x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 = -bx_1 - cx_2 + x_3 + \gamma x_1 x_2, \end{cases} \quad (2.1)$$

*收稿日期: 2018-11-23

接收日期: 2019-01-07

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11501525).

作者简介: 毛北行 (1976-), 男, 河南洛阳, 副教授, 主要研究方向: 复杂网络与混沌同步.

其中 $x_1, x_2, x_3 \in R^3$ 为状态变量; $c, b, \alpha, \beta, \gamma$ 为常值参数. 当 $\alpha = 50, \beta = 20, \gamma = 4.1, c = 5, b = 9$ 时出现怪异吸引子, 其轨相图如图 1 所示.

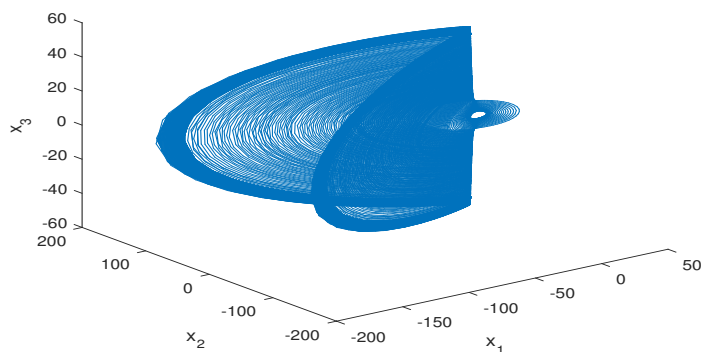


图 1: Victor-Carmen 混沌系统的相轨图

从系统设计为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1 - \alpha y_2 y_3 + \Delta f_1(y) + d_1(t) + u_1(t), \\ \dot{y}_2 = -y_2 + c y_3 - \beta y_1 y_3 + \Delta f_2(y) + d_2(t) + u_2(t), \\ \dot{y}_3 = -b y_1 - c y_2 + y_3 + \gamma y_1 y_2 + \Delta f_3(y) + d_3(t) + u_3(t), \end{cases} \quad (2.2)$$

其中 $\Delta f_i(y) (i = 1, 2, 3)$ 为不确定项, $y = [y_1, y_2, y_3]^T$, $d_i(t) (i = 1, 2, 3)$ 为外部扰动.

假设 1 设不确定项 $\Delta f_i(y)$ 和外部扰动 $d_i(t)$ 有界. 即存在常数 $m_i, n_i > 0$, 使得

$$|\Delta f_i(y)| < m_i, |d_i(t)| < n_i.$$

定义系统误差 $e_i = y_i - x_i (i = 1, 2, 3)$, 很容易得到误差方程

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -e_1 - \alpha y_2 y_3 + \alpha x_2 x_3 + \Delta f_1(y) + d_1(t) + u_1(t), \\ \dot{e}_2 = -e_2 + c e_3 - \beta y_1 y_3 + \beta x_1 x_3 + \Delta f_2(y) + d_2(t) + u_2(t), \\ \dot{e}_3 = -b e_1 - c e_2 + e_3 + \gamma y_1 y_2 - \gamma x_1 x_2 + \Delta f_3(y) + d_3(t) + u_3(t). \end{cases} \quad (2.3)$$

引理 1 ^[21] 假设存在连续正定函数 $V(t)$ 满足微分不等式

$$\dot{V}(t) \leq -p V^\eta(t), \forall t \geq t_0, V(t_0) \geq 0,$$

式中 $p > 0, 0 < \eta < 1$ 是两个正常数. 则对于任意给定的 t_0 , $V(t)$ 满足如下不等式

$$V^{1-\eta}(t) \leq V^{1-\eta}(t_0) - p(1-\eta)(t-t_0), t_0 \leq t \leq T,$$

并且 $V(t) \equiv 0, t \geq T$, 其中

$$T = t_0 + \frac{V^{1-\eta}(t_0)}{p(1-\eta)}.$$

定理 1 在假设 1 条件下, 构造滑模函数 $s_i(t) = e_i + D_t^{-1}(k_1 e_i + k_2 |e_i|^\sigma \text{sat}(e_i))$, 控制律

$$\begin{aligned} u_1 &= e_1 + \alpha y_2 y_3 - \alpha x_2 x_3 - (k_1 e_1 + k_2 |e_1|^\sigma \text{sat}(e_1)) \\ &\quad - (k_3 s_1 + k_4 |s_1|^\sigma \text{sat}(s_1) + k_5 \text{sgn}(s_1)) - (m_1 + n_1) \text{sgn}(s_1), \\ u_2 &= e_2 - c e_3 + \beta y_1 y_3 - \beta x_1 x_3 - (k_1 e_2 + k_2 |e_2|^\sigma \text{sat}(e_2)) \\ &\quad - (k_3 s_2 + k_4 |s_2|^\sigma \text{sat}(s_2) + k_5 \text{sgn}(s_2)) - (m_2 + n_2) \text{sgn}(s_2), \\ u_3 &= b e_1 + c e_2 - e_3 + \gamma(x_1 x_2 - y_1 y_2) - (k_1 e_3 + k_2 |e_3|^\sigma \text{sat}(e_3)) \\ &\quad - (k_3 s_3 + k_4 |s_3|^\sigma \text{sat}(s_3) + k_5 \text{sgn}(s_3)) - (m_3 + n_3) \text{sgn}(s_3), \end{aligned}$$

其中 $k_i > 0$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), 则系统 (2.3) 将在时间 T 内收敛至切换面 $s_i = 0$, 其中

$$T = \frac{1}{r} \ln(\sqrt{2} \sum_{i=1}^3 |s_i(0)| + 1), r = \min\{\sqrt{2}k_5, 2k_3\}.$$

证 构造函数 $V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 s_i^2$, 从而得到

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^3 s_i (\dot{e}_i + (k_1 e_i + k_2 |e_i|^\sigma \text{sat}(e_i))) \\ &= s_1 [-e_1 - \alpha y_2 y_3 + \alpha x_2 x_3 + \Delta f_1(y) + d_1(t) + u_1(t) + (k_1 e_1 + k_2 |e_1|^\sigma \text{sat}(e_1))] \\ &\quad + s_2 [-e_2 + c e_3 - \beta y_1 y_3 + \beta x_1 x_3 + \Delta f_2(y) + d_2(t) + u_2(t) + (k_1 e_2 + k_2 |e_2|^\sigma \text{sat}(e_2))] \\ &\quad + s_3 [-b e_1 - c e_2 + e_3 + \gamma y_1 y_2 - \gamma x_1 x_2 + \Delta f_3(y) + d_3(t) + u_3(t) + (k_1 e_3 + k_2 |e_3|^\sigma \text{sat}(e_3))] \\ &\leq \sum_{i=1}^3 \{s_i [-(k_3 s_i + k_4 |s_i|^\sigma \text{sat}(s_i) + k_5 \text{sgn}(s_i)) - (m_i + n_i) \text{sgn}(s_i)] - (m_i + n_i) |s_i|\} \\ &= - \sum_{i=1}^3 (k_3 s_i^2 + k_4 |s_i|^\sigma \text{sat}(s_i) + k_5 |s_i|). \end{aligned}$$

由于 $s_i \text{sat}(s_i) = s_i \text{sgn}(s_i/k)$, ($|s_i| > k$), $s_i \text{sat}(s_i) = s_i^2/k$, ($|s_i| \leq k$), 又 $s_i \text{sgn}(s_i) = |s_i|$, 所以 $s_i \text{sat}(s_i) = k(s_i/k) \text{sgn}(s_i/k) = |s_i|$ ($k > 0$), 则

$$\dot{V} \leq - \sum_{i=1}^3 (k_3 s_i^2 + k_5 |s_i|) = -\sqrt{2}k_5 \sqrt{V} - 2k_3 V.$$

定义 $r = \min\{\sqrt{2}k_5, 2k_3\}$, 所以 $\dot{V} \leq -r(\sqrt{V} + 2V)$, 两边积分

$$dt \leq \frac{-dV}{r(\sqrt{V} + 2V)} \leq \frac{-dV}{r(2\sqrt{V} + 1)\sqrt{V}} = \frac{-d(2\sqrt{V} + 1)}{r2\sqrt{V} + 1}.$$

由引理 1 滑模面具有可达性.

定理 2 构造滑模函数 $s_i(t) = e_i + D_t^{-1}(k_1 e_i + k_2 |e_i|^\sigma \text{sat}(e_i))$, 则该滑模动态系统渐近稳定并且收敛到坐标原点, 其中 $k_1, k_2 > 0$, $\text{sat}(e_i) = \begin{cases} \text{sgn}(e_i/k), & |e_i| > k, k > 0, \\ e_i/k, & |e_i| \leq k, k < 0. \end{cases}$

证 滑模面上运动时 $s(t) = 0, \dot{s}(t) = 0 \Rightarrow \dot{e}_i = -k_1 e_i - k_2 |e_i|^\sigma \text{sat}(e_i)$, 构造 $V(t) = \sum_{i=1}^3 |e_i|$, 得到

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^3 \text{sgn}(e_i) \dot{e}_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^3 \text{sgn}(e_i) (-k_1 e_i - k_2 |e_i|^\sigma \text{sat}(e_i)) \\ &= \sum_{i=1}^3 -k_1 |e_i| - k_2 |e_i|^\sigma \text{sat}(e_i) \text{sgn}(e_i).\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}\text{sat}(e_i) \text{sgn}(e_i) &= \text{sgn}(e_i/k) \text{sgn}(e_i) = 1 (|e_i| > k), \\ \text{sat}(e_i) \text{sgn}(e_i) &= e_i/k \text{sgn}(e_i) = |e_i|/k > 0 (|e_i| \leq k),\end{aligned}$$

从而 $\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^3 -k_1 |e_i| < 0$, 所以滑模面具有稳定性.

定理 3 若满足假设 1, 构造上述滑模函数和控制律, Victor-Carmen 混沌系统的主从系统 (2.1) 与 (2.2) 是有限时间滑模同步的.

证 当不在切换面上运动时, 根据定理 1 可知滑动模态系统可以被驱动到滑模面, 即滑模面具有可达性; 在切换面上时, 根据定理 2 可得系统渐近稳定, 从而 $e_i \rightarrow 0$, 从而具有稳定性. 所以 (2.1) 与 (2.2) 就取得有限时间滑模同步.

3 数值仿真

$$\begin{aligned}\alpha &= 50, \beta = 20, \gamma = 4.1, c = 5, b = 9, (x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (2.2, 6.5, 2.5), \\ k_1 &= 8, k_2 = 2, \sigma = 0.3, k_3 = 4, k_4 = 1, k_5 = 0.1, m_i = 1.2, n_i = 1.2 (i = 1, 2, 3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta f_1(y) + d_1(t) &= 0.1 y_1 \sin t + 0.1 \cos t, \\ \Delta f_2(y) + d_2(t) &= -0.1 y_2 \cos t + 0.1 \cos t, \\ \Delta f_3(y) + d_3(t) &= 0.1 y_3 \sin t + 0.1 \cos 2t.\end{aligned}$$

系统参数选取如上, 定理中系统的误差曲线如图 2 所示, 图中可以看到, 初始时刻系统误差距离原点较远且相差较大, 随时间推移系统误差渐趋一致, 逐渐趋近于坐标原点, 表明系统取得了同步. 图中看出一段时间以后系统达到混沌同步, 当时间 T 时刻以后, Victor-Carmen 混沌系统的主从系统 (2.1) 与 (2.2) 达到滑模同步的.

时间 T 可由公式 $T = \frac{1}{r} \ln(\sqrt{2} \sum_{i=1}^3 |s_i(0)| + 1)$ 来推算. 它给出了时刻 T 大小估计. 若选取为传统的等速趋近律 $\dot{V} \leq -\sum_{i=1}^3 k_3 |s_i|^2 = -2k_3 V$,

求得 $T = \frac{1}{2k_3} \ln(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 |s_i(0)|^2)$, 从而需要更长的时间才能趋于同步.

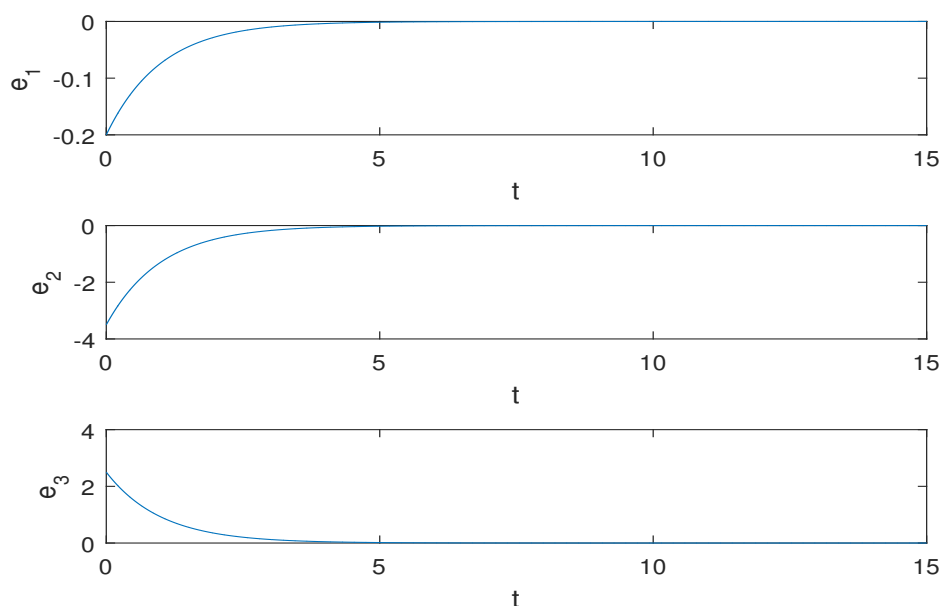


图 2: 定理 3 中的系统误差曲线

4 结论

基于新型滑模方法研究 Victor-Carmen 混沌系统的有限时间同步, 取得 Victor-Carmen 混沌系统的主从系统达到有限时间滑模同步的充分条件, 从数学角度给出了严格证明和逻辑推理, 通过数值仿真检验方法的合理性和正确性.

参 考 文 献

- [1] Chen D, Zhang R, Liu X, Ma X. Fractional order Lyapunov stability theorem and its applications in synchronization of complex dynamical networks[J]. Communication Nonlinear Science Numerical Simulation, 2014, 19(12): 4105–4121.
- [2] Wang J, Wu H. Adaptive output synchronization of complex delayed dynamical networks with output coupling[J]. Neurocomputing, 2014, 14(2): 174–181.
- [3] Wu Z, Shi P, Su H, Chu J. Exponential synchronization of neural networks with discrete and distributed delays under time-varying sampling[J]. IEEE Trans Neural Network Learn System, 2012, 23(9): 1368–1376.
- [4] Liu Y, Guo B, Park J, Lee S. Non-fragile exponential synchronization of delayed complex dynamical networks with memory sampled-data control[J]. IEEE Trans Neural Network Learn System, 2016, 26(14): 709–716.
- [5] Han X, Wu H, Fang B. Adaptive exponential synchronization of memristor neural networks with mixed time-varying delays[J]. Neurocomputing, 2016, 22 (1): 40–50.
- [6] Wang W, Peng H, Li L, Xiao J, Yang Y. Finite-time function projective synchronization in complex multi-links networks with time-varying delay[J]. Neural Process Letters, 2015, 41(4): 71–88.

- [7] Hu C, Yu J, Jiang H. Finite-time synchronization of delayed neural networks with Cohen-Grossberg type based on delayed feedback control[J]. *Neurocomputing*, 2014, 14(3): 90–966.
- [8] Jiang M, Wang S, Mei J, Shen Y. Finite-time synchronization control of a class of memristor based recurrent neural networks[J]. *Neural Network*, 2015, 63(5): 133–140.
- [9] 华玉龙, 孙伟, 迟宝山. 非奇异快速终端滑模控制研究 [J]. *系统工程与电子技术*, 2017, 39(2): 111–119.
- [10] 冒建亮, 李奇, 朱海荣. 一种连续非奇异快速终端滑模方法 [J]. *控制与决策*, 2016, 31(10): 1873–1878.
- [11] 张良, 唐驾时. 四维超混沌系统 Hopf 分岔分析与反控制 [J]. *计算力学学报*, 2018, 35(2): 188–194.
- [12] 毛北行, 程春蕊. 分数阶二次非线性 Sprott 混沌系统的滑模同步控制 [J]. *数学杂志*, 2018, 38(3): 490–496.
- [13] 张燕兰. 分数阶 Rayleigh–Duffing-like 系统的自适应追踪广义投影同步 [J]. *动力学与控制学报*, 2014, 12(4): 348–352.
- [14] 毛北行, 王东晓. 分数阶 Van der pol 振子网络的混沌同步 [J]. *华中师范大学学报 (自然版)*, 2016, 50(2): 202–205.
- [15] 毛北行, 李巧利. 分数阶参数不确定系统的异结构混沌同步 [J]. *中国海洋大学学报 (自然版)*, 2017, 47(7): 149–152.
- [16] 孙宁, 叶小岭, 刘波. Rössler 混沌系统的自适应滑模控制 [J]. *计算机仿真*, 2014, 31(8): 382–386.
- [17] 马广富, 于彦波, 李波. 基于积分滑模的航天器有限时间姿态容错控制 [J]. *控制理论与应用*, 2017, 34(8): 1028–1034.
- [18] 毛北行, 李巧利. 一类多涡卷系统的滑模有限时间混沌同步 [J]. *吉林大学学报 (理学版)*, 2016, 54(5): 1131–1136.
- [19] 陈昌忠, 何平. Victor–Carmen 混沌系统的投影同步 [J]. *华中师范大学学报自然版*, 2016, 50(4): 521–524.
- [20] 毛北行, 程春蕊. 分数阶 Victor–Carmen 混沌系统的自适应滑模控制 [J]. *山东大学学报工学版*, 2017, 47(4): 31–36.
- [21] 胡建兵, 赵灵冬. 分数阶系统稳定性理论与控制研究 [J]. *物理学报*, 2013, 62(24): 5041–5047.

FINITE-TIME SLIDING MODE SYNCHRONIZATION FOR VICTOR-CARMEN CHAOTIC SYSTEMS

MAO Bei-Xing

(College of Mathematics, Zhengzhou University of Aeronautics, Zhengzhou 450015, China)

Abstract: Finite-time synchronization of Victor–Carmen systems is studied in the paper. A new type sliding mode surface is proposed based on sliding mode method and the convergence speed of the sliding mode surface is faster than the old . Sufficient conditions are acquired for finite-time sliding mode synchronization of Victor–Carmen systems. Conclusion demonstrate the master-slave system of Victor–Carmen systems is finite-time sliding mode synchronization under certain conditions.

Keywords: new type sliding mode; finite-time; Victor–Carmen chaotic system

2010 MR Subject Classification: 34D06