Vol. 39 (2019)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

EP 元的一些新刻画

史丽妍, 马 丽, 魏俊潮
(扬州大学数学科学学院, 江苏 扬州 225002)

摘 要: 本文研究了 $*$ - 环 R 的一个 core 可逆元成为 EP 元的条件. 通过对几个给定方程的解的探讨, 主要证明了如下结果: 设 $a \in R^{\#} \cap R^{\dagger}$, 则 $a \in R^{\mathrm{EP}}$ 当且仅当下面的方程中有一个方程在 χ_a 中至少有一个解, 其中 $\chi_a = \{a, a^*, a^{\dagger}, a^{\#}, (a^{\#})^*, (a^{\dagger})^*\}$: (1) $xaa^*a = a^*a^2x$; (2) $a^*aa^*x = xa^*a^*a$; (3) $xa^*aa^* = aa^*a^*x$; (4) $aa^*ax = xa^2a^*$.

关 键 词: EP 元; 群可逆元; MP 可逆元; 方程的解; χ_a
MR(2010) **主题分类号**: 15A09; 16U99; 16W10 **中 图 分 类 号**: O153.3
文 献 标 识 码: A **文 章 编 号**: 0255-7797(2019)06-0921-04

1 引言

本文所涉及的环均表示有单位元的结合环. 设 R 是一个环, $a \in R$, 若存在 $c \in R$, 使得

$$aca = a;\ cac = c;\ ac = ca,$$

则称 a 为 R 的群可逆元 [1], 且称 c 为 a 的群逆元. 由文献 [2] 知, 群可逆元 a 的群逆元是唯一确定的, 通常记为 $a^{\#}$. 本文用 $R^{\#}$ 表示环 R 的全体群可逆元的集合.

设 R 为一个环, $*$ 为环 R 到 R 的一个双射, 满足条件 $(a^*)^* = a$; $(a+b)^* = a^* + b^*$; $(ab)^* = b^*a^*$, 其中 $a, b \in R$, 则称 R 为一个对合环, 有时也简称 R 为 $*$ - 环 [3].

设 $a \in R$, 若存在 $x \in R$, 满足 $a = axa$; $x = xax$; $(ax)^* = ax$; $(xa)^* = xa$, 则称 a 为 Moore Penrose 可逆元, 简称 a 为 MP 可逆元, x 称为 a 的 MP 逆元. 由文献 [4] 知, MP 可逆元 a 的 MP 逆元是唯一确定的, 记为 $a^{\dagger}$. 用 $R^{\dagger}$ 表示 $*$ - 环 R 的全体 MP 可逆元的集合.

设 R 为 $*$ - 环, 若 $a \in R^{\#} \cap R^{\dagger}$ 且 $a^{\dagger} = a^{\#}$, 则称 a 为 R 的 EP 元 [5]. 用 R^{EP} 表示 R 的全体 EP 元的集合. EP 元的研究起源于矩阵广义逆与算子广义逆, 最早可追溯到对 EP 矩阵 [6] 的研究. 对 EP 矩阵的刻画还可参见文献 [7 – 11]. 本文主要从纯环论的角度研究 EP 元, 通过构造几个特定的方程, 研究其解与结合 $*$ - 环上一个 core 可逆元成为 EP 元的等价条件, 这是环论上研究 EP 元的一种新型的方法.

2 主要结果

引理 1[12] 设 $a \in R^{\#} \cap R^{\dagger}$, 则

(1) $Ra = Ra^2 = Ra^{\#} = Ra^{\dagger}a = Ra^*a = Ra^{\#}a$;

*收稿日期: 2018-11-20 接收日期: 2018-12-24
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11471282).
作者简介: 史丽妍 (1994–), 女, 安徽池州, 硕士, 主要研究方向: 代数环论. E–mail: 1910096449@qq.com
.

(2) $aR = a^2R = a^{\#}R = aa^{\dagger}R = aa^*R$;

(3) $Ra^* = Ra^{\dagger} = R(a^*)^2 = Raa^*$;

(4) $a^*R = a^{\dagger}R = (a^*)^2R = a^*aR$.

若 $a \in R^{\#} \cap R^{\dagger}$ 且 $aa^{\#} = (aa^{\#})^*$, 则 $a \in R^{\mathrm{EP}}$. 因此当 $aa^{\#} = aa^{\dagger}$ 时必有 $a \in R^{\mathrm{EP}}$. 从而有下面的引理.

引理 2[13] 设 $a \in R^{\#} \cap R^{\dagger}$,

(1) 若 $Ra \subseteq Ra^*$, 则 $a \in R^{\mathrm{EP}}$;

(2) 若 $Ra^* \subseteq Ra$, 则 $a \in R^{\mathrm{EP}}$;

(3) 若 $aR \subseteq a^*R$, 则 $a \in R^{\mathrm{EP}}$;

(4) 若 $a^*R \subseteq aR$, 则 $a \in R^{\mathrm{EP}}$.

设 R 为 $*$ - 环, $a \in R^{\#} \cap R^{\dagger}$, 则 $(a^{\#})^* = (a^*)^{\#}$, $(a^{\dagger})^* = (a^*)^{\dagger}$, $(a^{\dagger})^{\dagger} = a$. 由于 $(a^{\#})^{\dagger}$ 及 $(a^{\dagger})^{\#}$ 未必存在, 因此记 $\chi_a = \{a, a^*, a^{\dagger}, a^{\#}, (a^{\#})^*, (a^{\dagger})^*\}$.

定理 3 设 $a \in R^{\#} \cap R^{\dagger}$, 则 $a \in R^{\mathrm{EP}}$ 当且仅当下面的方程 (2.1) 在 χ_a 中至少有一个解,

$$xaa^*a = a^*a^2x. \tag{2.1}$$

证 必要性 由于 $a \in R^{\mathrm{EP}}$, 所以 $a^{\dagger} = a^{\#}$. 易见 $a^{\dagger}aa^*a = a^*a$, $a^*a^2a^{\dagger} = a^*a^2a^{\#} = a^*a$, 从而 $x = a^{\dagger}$ 为方程 (2.1) 在 χ_a 中的一个解.

充分性 (1) 若 $x = a$ 为解, 则 $a^2a^*a = a^*a^3$. 从而由引理 1 知 $aR = a^2R = a(aa^*R) = a^2a^*R = a^2(a^*aR) = a^2a^*aR = a^*a^3R = a^*aR = a^*R$, 由引理 2 知 $a \in R^{\mathrm{EP}}$.

(2) 若 $x = a^{\#}$ 为解, 则 $a^{\#}aa^*a = a^*a^2a^{\#} = a^*a$. 由引理 1 知

$$a^*R = a^*aR = a^{\#}aa^*aR \subseteq a^{\#}R = aR,$$

由引理 2 知 $a \in R^{\mathrm{EP}}$.

(3) 若 $x = a^{\dagger}$ 为解, 则 $a^{\dagger}aa^*a = a^*a^2a^{\dagger}$, 即 $a^*a = a^*a^2a^{\dagger}$. 由引理 1 知

$$Ra = Ra^*a = Ra^*a^2a^{\dagger} \subseteq Ra^{\dagger} = Ra^*,$$

由引理 2 知 $a \in R^{\mathrm{EP}}$.

(4) 若 $x = a^*$ 为解, 则

$$a^*aa^*a = a^*a^2a^*. \tag{2.2}$$

将 (2.2) 左乘 $(a^{\dagger})^*$ 得 $aa^*a = a^2a^*$, 由引理 1 得

$$Ra = Ra^*a = Raa^*a = Ra^2a^* = Raa^* = Ra^*,$$

由引理 2 知 $a \in R^{\mathrm{EP}}$.

(5) 若 $x = (a^{\#})^*$ 为解, 则

$$(a^{\#})^*aa^*a = a^*a^2(a^{\#})^*. \tag{2.3}$$

对 (2.3) 应用对合得 $a^*aa^*a^{\#} = a^{\#}a^*a^*a$, 由引理 1 知

$$aR = a^{\#}R = a^{\#}a^*R = a^{\#}a^*a^*R = a^{\#}a^*a^*aR = a^*aa^*a^{\#}R \subseteq a^*R,$$

由引理 2 知 $a \in R^{\mathrm{EP}}$.

(6) 若 $x = (a^\dagger)^*$ 为解, 则

$$(a^\dagger)^* a a^* a = a^* a^2 (a^\dagger)^*. \tag{2.4}$$

对 (2.4) 应用对合得 $a^* a a^* a^\dagger = a^\dagger a^* a^* a$, 由引理 1 知

$$Ra = Ra^*a = Ra^*a^*a = Ra^*a^*a^*a = Ra^\dagger a^*a^*a = Ra^*aa^*a^\dagger \subseteq Ra^\dagger = Ra^*,$$

由引理 2 知 $a \in R^{\mathrm{EP}}$.

注意到 $x \in \chi_a$ 当且仅当 $x^* \in \chi_a$, 因此对方程 (2.1) 两边取对合可得下面的方程

$$a^* a a^* x = x a^* a^* a. \tag{2.5}$$

由定理 3 可得如下推论.

推论 4 设 $a \in R^\# \cap R^\dagger$, 则 $a \in R^{\mathrm{EP}}$ 当且仅当上面的方程 (2.5) 在 χ_a 中至少有一个解.

由于 $a \in R^{\mathrm{EP}}$ 当且仅当 $a^* \in R^{\mathrm{EP}}$, 因此把方程 (2.1) 中的 a 换成 a^*, 可得下面的方程

$$x a^* a a^* = a a^* a^* x. \tag{2.6}$$

利用定理 3，可得如下推论.

推论 5 设 $a \in R^\# \cap R^\dagger$, 则 $a \in R^{\mathrm{EP}}$ 当且仅当上面的方程 (2.6) 在 χ_a 中至少有一个解.

把方程 (2.6) 两边取对合可得下面的方程

$$a a^* a x = x a^2 a^*. \tag{2.7}$$

由推论 5 知有下面的推论.

推论 6 设 $a \in R^\# \cap R^\dagger$, 则 $a \in R^{\mathrm{EP}}$ 当且仅当上面的方程 (2.7) 在 χ_a 中至少有一个解.

定理 7 设 $a \in R^\# \cap R^\dagger$, 若下列条件之一成立, 则 $a \in R^{\mathrm{EP}}$.

(1) $a^2 a^* = a^* a^3 a^\dagger$;

(2) $a^\# a a^* = a^*$;

(3) $(a^\dagger)^* a a^* = a^* a^2 (a^\dagger)^* a^\dagger$.

证 (1) 由于 $a^2 a^* = a^* a^3 a^\dagger$, 右乘 a 得 $a^2 a^* a = a^* a^3$. 由定理 3 充分性的证明 (1) 知 $a \in R^{\mathrm{EP}}$.

(2) 由于 $a^\# a a^* = a^*$, 右乘 $(a^\dagger)^*$ 得 $a^\# a = a^\dagger a$, 故 $a \in R^{\mathrm{EP}}$.

(3) 由于 $(a^\dagger)^* = (a^\dagger a a^\dagger)^* = (a^\dagger)^* a^\dagger a$, 从而 $R(a^\dagger)^* \subseteq Ra$. 又 $a = a a^\dagger a = a(a^\dagger a)^* = a a^* (a^\dagger)^*$, 从而 $Ra \subseteq R(a^\dagger)^*$, 于是 $R(a^\dagger)^* = Ra$. 由于 $(a^\dagger)^* a a^* = a^* a^2 (a^\dagger)^* a^\dagger$, 两边取对合得

$$a a^* a^\dagger = (a^\dagger)^* a^\dagger a^* a^* a.$$

故由引理 1 知 $Ra = Ra^*a = Ra^*a^*a = Ra^*a^*a^*a = Ra^\dagger a^*a^*a = Raa^\dagger a^*a^*a = R(a^\dagger)^* a^\dagger a^* a^* a = Raa^*a^\dagger \subseteq Ra^\dagger = Ra^*$, 由引理 2 知 $a \in R^{\mathrm{EP}}$.

推论 8 设 $a \in R^\# \cap R^\dagger$, 则 $Ra = R(a^\dagger)^*$; $aR = (a^\dagger)^* R$.

方程 (2.1) 右乘 $a^\dagger$ 得下面的方程

$$x a a^* = a^* a^2 x a^\dagger. \tag{2.8}$$

由定理 7 知当 $x = a,\ a^\#,\ (a^\dagger)^*$ 为方程 (2.8) 的解时, 都有 $a \in R^{\mathrm{EP}}$.

参 考 文 献

[1] Drazin M P. Pseudo-inverses in associative rings and semigroups [J]. Amer. Math. Monthly, 1958, 65(7): 506–514.

[2] Ben-Israel A, Greville T N E. Generalized inverses: theory and applications (2nd ed.)[M]. New York: Wiley, 2003.

[3] Koliha J J, Patricio P. Elements of rings with equal spectral idempotents [J]. J. Austr. Math. Soc., 2002, 72(1): 137–152.

[4] Dijana M, Dragan S D, Koliha J J. EP elements in rings [J]. Linear Algebra Appl., 2009, 431(3): 527–535.

[5] Dijana M, Dragan S D. Further results on partial isometries and EP elements in rings with involution [J]. Math. Comut. Modelling, 2011, 54(3): 460–465.

[6] Hartwig R E. Block generalized inverses [J]. Arch. Retion. Mech. Anal., 1976, 61(3): 197–251.

[7] Yao H, Wei J C. EP elements and $*$-strongly regular rings [J]. Filomat, 2018, 32(1): 117–125.

[8] Chen W X. On EP elements, normal elements and partial isometries in rings with involution [J]. Electron. J. Linear Algebra, 2012, 23(3): 553–561.

[9] Cheng S Z, Tian Y G. Two sets of new characterizations for normal and EP matrices [J]. Linear Algebra Appl., 2003, 375(2): 181–195.

[10] 徐小平, 肖薇雨, 黄强联. 广义逆与算子方程的解 [J]. 杨州大学学报 (自然科学版), 2017, 20(2): 17–20.

[11] Djordjevic D S. Products of EP operators on Hilbert spaces [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 2001, 129(6): 1727–1731.

[12] Qu Y C, Wei J C, Yao H. Characterizations of normal elements in rings with involution [J]. Acta. Math. Hungar, 2018, 156(2): 459–464.

[13] 许三长. 环上广义逆及相关偏序 [D]. 江苏: 东南大学, 2017.

SOME NEW CHARACTERIZATIONS ON EP ELEMENTS

SHI Li-yan, MA Li, WEI Jun-chao

(*School of Mathematical Science, Yangzhou University, Yangzhou 225002, China*)

Abstract: In this paper, we give some conditions for a core invertible element being EP element in a $*$-ring R. We mainly prove the following results by discussing the solutions of some given equations: Let $a \in R^{\#} \cap R^{\dagger}$. Then $a \in R^{\mathrm{EP}}$ if and only if one of the following equations has at least one solution in χ_a, where $\chi_a = \{a, a^*, a^\dagger, a^{\#}, (a^{\#})^*, (a^\dagger)^*\}$: (1) $xaa^*a = a^*a^2x$; (2) $a^*aa^*x = xa^*a^*a$; (3) $xa^*aa^* = aa^*a^*x$; (4) $aa^*ax = xa^2a^*$.

Keywords: EP element; group invertible element; MP invertible element; the soluion of equation; χ_a

2010 MR Subject Classification: 15A09 ; 16U99 ; 16W10