Vol. 39 (2019)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

Burgers-KPP 方程的新精确解

王 鑫
(海南大学信息科学技术学院, 海南 海口 570228)

摘 要: 本文研究了 Burgers-KPP 方程显示精确解的问题. 通过以 (G'/G) 展开法为基础, 提出了一种满足变系数方程的 G 展开法, 利用此类展开法对 Burgers-KPP 方程进行了求解, 获得了该方程多个新的三角函数形式和双曲函数形式的显式行波解, 丰富了方程解的范围.

关键词: Burgers-KPP 方程; 变系数方程; G 展开法; 精确解
MR(2010) **主题分类号**: 35Q53; 35C07 **中图分类号**: O175.29
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2019)06-0907 -08

1 引言

寻求非线性偏微分方程的精确解一直是解决和研究非线性问题的关键. 近年来, 精确解的求法不断涌现, 如 Backlund 变换法、Hirota 变换法、变量分离法、反散射变换法等. 最近, 王明亮等提出的 (G'/G) 展开法 [1−3], 即假设非线性偏微分方程的行波解可用 (G'/G) 的多项式来表示, 且 G 满足一类二阶线性常微分方程, 由此得到一个代数方程组, 将求解微分方程的问题转化为求此代数方程组的解. 此方法不需要任何初始或边界条件, 可以简洁、有效地求解非线性偏微分方程. 目前, 在此方法的基础上, 出现了许多扩展和改进, 这些改进主要是从将 (G'/G) 展开法的正幂展开推广到正负幂展开 [4]; 改变 (G'/G) 的展开形式 [5−7]; 改变函数 G 满足的方程 [8−10] 等方面进行了延伸. 本文也是以 (G'/G) 展开法的基本思想为依据, 是将其展开形式改进为 $\left(\frac{G-G'}{G+G'}\right)$ 的形式, 并首次尝试将函数 G 满足的常系数方程改进为一类二阶变系数的非线性方程, 以 Burgers-KPP 方程为例进行了求解, 得到了该方程的多个显式行波解.

Burgers-Kolmogorov-Petrovskii-Piscounov 方程

$$u_t - \alpha u_{xx} + \lambda u u_x + \beta(u^3 + \gamma u^2 + \delta u) = 0, \tag{1.1}$$

其中 $\alpha,\ \beta, \lambda, \gamma, \delta$ 均为常数. 该类方程是既包含耗散作用又包含频散作用的非线性演化方程, 它广泛应用于流体力学、热传导、理论物理等领域. 当 $(\alpha,\ \beta, \lambda, \gamma, \delta)$ 取不同参数时, 它囊括着许多著名的方程. 例如广义 KPP 方程, Huxley 方程, 广义 Fisher 方程, Burgers-Fisher 方程, Fitzhugh-Nagumo 方程, Newell-Whitehead 方程等. 文献 [11] 用 Cole-Hopf 变换法得到了该方程的孤子解, 并对解的渐进性质进行了论证; 通过 tanh 函数展开法, 该方程的单孤波解和周期波解由文献 [12] 得到; 文献 [13] 通过变系数辅助方程并结合齐次平衡法得到了该方程的行波解.

*收稿日期: 2018-01-17 接收日期: 2018-06-13
基金项目: 海南省自然科学基金 (117066); 国家自然科学基金 (11601109); 海南省科协青年科技英才学术创新计划项目 (201503).
作者简介: 王鑫 (1980–), 女, 北京, 讲师, 主要研究方向: 非线性偏微分方程及其应用.

2 满足变系数方程的 G 展开法

将非线性偏微分方程

$$P\left(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \cdots\right)=0 \tag{2.1}$$

作行波变换. 令 $u\left(x,t\right)=u(\xi)$, $\xi=x-ct$, 其中 c 表示波速, 是一常数, 则方程 (2.1) 化为

$$P\left(u, u', u'', \cdots\right)=0. \tag{2.2}$$

设方程 (2.1) 的解为

$$u(\xi)=\sum_{i=0}^{l} a_i(\xi)\left(\frac{G-G'}{G+G'}\right)^i, \tag{2.3}$$

这里 $a_i(\xi)$ $(i=0,1,2,\cdots,l)$ 为待定的函数, 参数 l 可通过齐次平衡法确定, $G=G(\xi)$ 满足一类二阶变系数非线性常微分方程

$$GG''+p(\xi)(G')^2+q(\xi)GG'=0, \tag{2.4}$$

其中 $p(\xi)$, $q(\xi)$ 均为 ξ 的任意函数. 通过借助 Mathematica 符号计算软件, 可以得到方程 (2.4) 的解

$$G(\xi)=C_2\exp\left(\int_1^{\xi} \frac{\mathrm{e}^{-\int_1^{\tau} q(\eta)d\eta}}{C_1+\int_1^{\tau}(1+p(\varsigma))\mathrm{e}^{-\int_1^{\varsigma} q(\eta)d\eta}\mathrm{d}\varsigma}\mathrm{d}\tau\right),$$

其中 C_1, C_2 为积分常数, 同时可得

$$\left(\frac{G-G'}{G+G'}\right)=1-\frac{2}{1+\mathrm{e}^{\int_1^{\xi} q(\eta)d\eta}\left(C_1+\int_1^{\xi}(1+p(\varsigma))\mathrm{e}^{-\int_1^{\varsigma} q(\eta)d\eta}\mathrm{d}\varsigma\right)}. \tag{2.5}$$

将 (2.3) 式代入 (2.2) 式, 并结合 (2.4) 式, 合并 $\left(\frac{G-G'}{G+G'}\right)$ 的各同幂次项, 并令 $\left(\frac{G-G'}{G+G'}\right)$ 的各次幂的系数为零, 从中求出 $a_i(\xi)$, $p(\xi), q(\xi)$, 再将求得的 $p(\xi)$, $q(\xi)$ 代入 (2.5) 式, 最后将得到的 $\left(\frac{G-G'}{G+G'}\right)$ 函数及 $a_i(\xi)$ 代回到 (2.3) 式, 即得到方程 (2.1) 的解.

3 Burgers-KPP 方程新的精确解

对方程 (1.1) 作行波变换. 令 $u=u(\xi)=u(x-ct)$, 从而化为

$$-cu'-\alpha u''+\lambda uu'+\beta(u^3+\gamma u^2+\delta u)=0. \tag{3.1}$$

设方程 (1.1) 的解能够表示成多项式 $u(\xi)=\sum\limits_{i=0}^{l} a_i(\xi)\left(\frac{G-G'}{G+G'}\right)^i$, 且 $G=G(\xi)$ 满足一类二阶变系数非线性常微分方程

$$GG''+p(\xi)(G')^2+q(\xi)GG'=0,$$

其中 $p(\xi)$, $q(\xi)$ 均为 ξ 的任意函数. 利用齐次平衡法, 有 $3l=l+2$, 得 $l=1$. 则方程 (1.1) 的解表示为

$$u(\xi)=a_1(\xi)\left(\frac{G-G'}{G+G'}\right)+a_0(\xi), \tag{3.2}$$

由方程 (2.4) 和 (3.2) 式可得

$$
\begin{aligned}
u'(\xi)=&\frac{1}{2}(1+p(\xi)-q(\xi))a_1(\xi)\left(\frac{G-G'}{G+G'}\right)^2+(-(1+p(\xi))a_1(\xi)+a_1{}'(\xi))\left(\frac{G-G'}{G+G'}\right)\\
&+\frac{1}{2}((1+p(\xi)+q(\xi))a_1(\xi)+2a_0{}'(\xi)),\\
u''(\xi)=&\frac{1}{2}(1+p(\xi)-q(\xi))^2a_1(\xi)\left(\frac{G-G'}{G+G'}\right)^3+\frac{1}{2}(a_1(\xi)(3q(\xi)-3-3p(\xi)^2+3p(\xi)(q(\xi)-2)\\
&+p'(\xi)-q'(\xi))+2(1+p(\xi)-q(\xi))a_1{}'(\xi))\left(\frac{G-G'}{G+G'}\right)^2+\frac{1}{2}(a_1(\xi)(3+6p(\xi)+3p(\xi)^2\\
&-q(\xi)^2-2p'(\xi))-4(1+p(\xi))a_1{}'(\xi)+2a_1{}''(\xi))\left(\frac{G-G'}{G+G'}\right)+\frac{1}{2}(-a_1(\xi)(1+p(\xi)^2\\
&+q(\xi)+p(\xi)(2+q(\xi))-p'(\xi)-q'(\xi))+2((1+p(\xi)+q(\xi))a_1{}'(\xi)+a_0{}''(\xi))),
\end{aligned}
$$

将上面的 u 及其各阶导数代入 (3.1) 式, 合并 $\left(\frac{G-G'}{G+G'}\right)$ 的同幂次项并比较方程两端的系数, 化简可得

$$
\left(\frac{G-G'}{G+G'}\right)^3: a_1(\xi)(-\alpha(1+p(\xi)-q(\xi))^2+\lambda(1+p(\xi)-q(\xi))a_1(\xi)+2\beta a_1(\xi)^2)=0, \tag{3.3}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{G-G'}{G+G'}\right)^2: &2(\beta\gamma-\lambda-\lambda p(\xi)+3\beta a_0(\xi))a_1(\xi)^2-2\alpha(1+p(\xi)-q(\xi))a_1{}'(\xi)+a_1(\xi)(3\alpha\\
&+3\alpha p(\xi)^2-c+\lambda a_0(\xi)+q(\xi)(c-3\alpha-\lambda a_0(\xi))+p(\xi)(-c+6\alpha-3\alpha q(\xi)\\
&+\lambda a_0(\xi))-\alpha p'(\xi)+\alpha q'(\xi)+2\lambda a_1{}'(\xi))=0,
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{G-G'}{G+G'}\right)^1: &\lambda(1+p(\xi)+q(\xi))a_1(\xi)^2+a_1(\xi)(2c-3\alpha+2\beta\delta-3\alpha p(\xi)^2+2a_0(\xi)(3\beta a_0(\xi)\\
&+2\beta\gamma-\lambda)+2p(\xi)(c-3\alpha-\lambda a_0(\xi))+\alpha(q(\xi)^2+2p'(\xi))+2\lambda a_0{}'(\xi))+(4\alpha\\
&+4\alpha p(\xi)-2c+2\lambda a_0(\xi))a_1{}'(\xi)-2\alpha a_1{}''(\xi)=0,
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{G-G'}{G+G'}\right)^0: &2\beta\gamma a_0(\xi)^2+2\beta a_0(\xi)^3-(c-\alpha-\alpha p(\xi))(1+p(\xi)+q(\xi))a_1(\xi)-2ca_0{}'(\xi)\\
&+a_0(\xi)(2\beta\delta+\lambda(1+p(\xi)+q(\xi))a_1(\xi)+2\lambda a_0{}'(\xi))-\alpha(a_1(\xi)(p'(\xi)+q'(\xi))\\
&+2((p(\xi)+q(\xi)+1)a_1{}'(\xi)+a_0{}''(\xi)))=0.
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

由 (3.3) 和 (3.4) 式, 可求得

$$
a_1(\xi)=\frac{1}{4\beta}\left(-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta}\right)(1+p(\xi)-q(\xi)), \tag{3.7}
$$

$$
\begin{aligned}
a_0(\xi)=&-\frac{(-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta})}{4\beta(1+p(\xi)-q(\xi))}((1+p(\xi))(1+p(\xi)-q(\xi))-(p'(\xi)-q'(\xi)))\\
&+\frac{-12\alpha\beta\gamma+\lambda(c-\gamma\lambda)\pm(3c+\gamma\lambda)\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta}}{4(\lambda^2+9\alpha\beta)}.
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

现令 $p(\xi)=q(\xi)+f(\xi)+k_1\xi+k_2$, 其中 $f(\xi)$ 为 ξ 的任意函数, k_1,k_2 为任意常数, 将其与 (3.7)、(3.8) 式代入 (3.5) 式, 借助 Mathematica 符号计算软件, 得到. 若

$$\begin{aligned}\Delta=&\frac{1}{\lambda^2+4\alpha\beta\mp\lambda\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta}}\Big(8\delta(\lambda^2+9\alpha\beta)^2+c(3c+2\gamma\lambda)(5\lambda^2+36\alpha\beta)\\&-\gamma^2(216\alpha^2\beta^2+36\alpha\beta\lambda^2+\lambda^4)\pm\lambda(3c+\gamma\lambda)^2\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta}\Big).\end{aligned}\tag{3.9}$$

则有以下情况

(1) 当 $\Delta>0$ 时, 有

$$p(\xi)=-R\tan\left(\frac{R\xi}{2}\mp C_1\right)+\frac{f'(\xi)+k_1}{1+f(\xi)+k_1\xi+k_2}+f(\xi)+k_1\xi+k_2,\tag{3.10}$$

$$q(\xi)=-R\tan\left(\frac{R\xi}{2}\mp C_1\right)+\frac{f'(\xi)+k_1}{1+f(\xi)+k_1\xi+k_2},\tag{3.11}$$

其中 C_1 为积分常数, $R=\pm\frac{\beta\sqrt{\Delta}}{(\lambda^2+9\alpha\beta)}$.

(2) 当 $\Delta<0$ 且 $C_1=0$ 时, 有

$$p(\xi)=R\tanh\left(\frac{R\xi}{2}\right)+\frac{f'(\xi)+k_1}{1+f(\xi)+k_1\xi+k_2}+f(\xi)+k_1\xi+k_2,\tag{3.12}$$

$$q(\xi)=R\tanh\left(\frac{R\xi}{2}\right)+\frac{f'(\xi)+k_1}{1+f(\xi)+k_1\xi+k_2},\tag{3.13}$$

其中 $R=\pm\frac{\beta\sqrt{-\Delta}}{(\lambda^2+9\alpha\beta)}$.

将上述得到的 (3.7)–(3.13) 式代入 (3.6) 式中, 得到了以下几种情况.

(1) $c=-\frac{\gamma\lambda}{3},\ \delta=\frac{2\gamma^2}{9}$, 则此时 $\Delta=-2\alpha\beta+\frac{1}{2}\lambda(-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta})$, 有

① 当 $\Delta>0$ 时, 则 $R=\pm\frac{\gamma\sqrt{\Delta}}{3\alpha}$, 结合 (3.10)、(3.11) 式, 代入 (3.7)、(3.8) 和 (2.5) 式, 可得

$$a_1(\xi)=\frac{1}{4\beta}\left(-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta}\right)(1+f(\xi)+k_1\xi+k_2),\tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}a_0(\xi)=&-\frac{(-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta})}{12\alpha\beta}\left(3\alpha(1+f(\xi)+k_1\xi+k_2)-\gamma\sqrt{\Delta}\tan\left(\frac{\gamma\sqrt{\Delta}\xi}{6\alpha}\mp C_1\right)\right)\\&-\frac{\gamma}{3},\end{aligned}\tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{G-G'}{G+G'}\right)=&-\frac{8\gamma\sqrt{\Delta}\cos C_1}{2C_2\gamma\sqrt{\Delta}\cos {C_1}^2+(12\alpha\mp C_2\gamma\sqrt{\Delta}\sin(2C_1))\tan\left(\frac{\gamma\sqrt{\Delta}\xi}{6\alpha}\right)}\\&\cdot\frac{1}{\cos\left(\frac{\gamma\sqrt{\Delta}\xi}{3\alpha}\mp C_1\right)+\cos C_1}\cdot\frac{1}{1+f(\xi)+k_1\xi+k_2}+1,\end{aligned}\tag{3.16}$$

其中 C_1,C_2 为积分常数. 再将 (3.14)–(3.16) 式代入 (3.2) 式, 则得到了方程 (1.1) 的解

$$u(\xi)=\frac{\gamma(-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta})\left(-6\alpha\sqrt{\Delta}\cos\left(\frac{\gamma\sqrt{\Delta}\xi}{6\alpha}\right)+C_2\gamma\Delta\cos C_1\sin\left(\frac{\gamma\sqrt{\Delta}\xi}{6\alpha}\mp C_1\right)\right)}{12\alpha\beta\left(C_2\gamma\sqrt{\Delta}\cos\left(\frac{\gamma\sqrt{\Delta}\xi}{6\alpha}\mp C_1\right)\cos C_1+6\alpha\sin\left(\frac{\gamma\sqrt{\Delta}\xi}{6\alpha}\right)\right)}-\frac{\gamma}{3}.$$

② 当 $\Delta<0$ 且 $C_1=0$ 时, 则 $R=\pm\frac{\gamma\sqrt{-\Delta}}{3\alpha}$, 结合 (3.12)、(3.13) 式, 代入 (3.7)、(3.8) 和 (2.5) 式, 可得

$$\begin{aligned}
a_1(\xi) &= \frac{1}{4\beta}\left(-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta}\right)(1+f(\xi)+k_1\xi+k_2), &(3.17)\\
a_0(\xi) &= -\frac{(-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta})}{12\alpha\beta}\left(3\alpha(1+f(\xi)+k_1\xi+k_2)+\gamma\sqrt{-\Delta}\tanh\left(\frac{\gamma\sqrt{-\Delta}\xi}{6\alpha}\right)\right)\\
&\quad -\frac{\gamma}{3}, &(3.18)\\
\left(\frac{G-G'}{G+G'}\right) &= 1-\frac{4\gamma\sqrt{-\Delta}}{C_2\gamma\sqrt{-\Delta}+6\alpha\tanh\left(\frac{\gamma\sqrt{-\Delta}\xi}{6\alpha}\right)}\cdot\frac{1}{1+\cosh\left(\frac{\gamma\sqrt{-\Delta}\xi}{3\alpha}\right)}\\
&\quad\cdot\frac{1}{(1+f(\xi)+k_1\xi+k_2)}, &(3.19)
\end{aligned}$$

其中 C_2 为积分常数. 再将 (3.17)–(3.19) 式代入 (3.2) 式, 则得到了方程 (1.1) 的解

$$u(\xi)=-\frac{\gamma(-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta})\left(6\alpha\sqrt{-\Delta}-C_2\gamma\Delta\tanh\left(\frac{\gamma\sqrt{-\Delta}\xi}{6\alpha}\right)\right)}{12\alpha\beta\left(C_2\gamma\sqrt{-\Delta}+6\alpha\tanh\left(\frac{\gamma\sqrt{-\Delta}\xi}{6\alpha}\right)\right)}-\frac{\gamma}{3}.$$

(2) $c=\frac{\gamma}{4}(-\lambda+\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta})$, $\delta=\frac{\gamma^2(8\alpha\beta(36\alpha\beta+5\lambda^2)-2\lambda(6\alpha\beta+\lambda^2)(-\lambda+\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta}))}{16(\lambda^2+9\alpha\beta)^2}$, 则此时 $\Delta=-18\alpha\beta-\frac{1}{2}\lambda(5\lambda+3\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta})$, 有

① 当 $\Delta>0$ 时, 则 $R=\pm\frac{\beta\gamma\sqrt{\Delta}}{2(\lambda^2+9\alpha\beta)}$, 结合 (3.10)、(3.11) 式, 代入 (3.7)、(3.8) 和 (2.5) 式, 可得

$$\begin{aligned}
a_1(\xi) &= \frac{1}{4\beta}\left(-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta}\right)(1+f(\xi)+k_1\xi+k_2), &(3.20)\\
a_0(\xi) &= -\frac{(-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta})}{4\beta}\left(1+f(\xi)+k_1\xi+k_2-\tan\left(\frac{\beta\gamma\sqrt{\Delta}\xi}{4(\lambda^2+9\alpha\beta)}\mp C_1\right)\right. &(3.21)\\
&\quad\left.\cdot\frac{\beta\gamma\sqrt{\Delta}}{2(\lambda^2+9\alpha\beta)}\right)+\frac{\gamma(-48\alpha\beta-5\lambda^2+\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta}(\lambda\pm(3\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta}+\lambda))}{16(\lambda^2+9\alpha\beta)},\\
\left(\frac{G-G'}{G+G'}\right) &= \frac{-8\beta\gamma\sqrt{\Delta}\cos C_1}{2C_2\beta\gamma\sqrt{\Delta}\cos {C_1}^2+(72\alpha\beta+8\lambda^2\pm C_2\beta\gamma\sqrt{\Delta}\sin(2C_1))\tan\left(\frac{\beta\gamma\sqrt{\Delta}\xi}{4(\lambda^2+9\alpha\beta)}\right)}\\
&\quad\cdot\frac{1}{\cos\left(\frac{\beta\gamma\sqrt{\Delta}\xi}{2(\lambda^2+9\alpha\beta)}\mp C_1\right)+\cos C_1}\cdot\frac{1}{1+f(\xi)+k_1\xi+k_2}+1, &(3.22)
\end{aligned}$$

其中 C_1,C_2 为积分常数. 再将 (3.20)–(3.22) 式代入 (3.2) 式, 则得到了方程 (1.1) 的解

$$\begin{aligned}
u(\xi)=&-\frac{-4(\lambda^2+9\alpha\beta)\cos\left(\frac{\beta\gamma\sqrt{\Delta}\xi}{4(\lambda^2+9\alpha\beta)}\right)+C_2\beta\gamma\sqrt{\Delta}\cos C_1\sin\left(\frac{\beta\gamma\sqrt{\Delta}\xi}{4(\lambda^2+9\alpha\beta)}\mp C_1\right)}{C_2\beta\gamma\sqrt{\Delta}\cos\left(\frac{\beta\gamma\sqrt{\Delta}\xi}{4(\lambda^2+9\alpha\beta)}\mp C_1\right)\cos C_1+4(\lambda^2+9\alpha\beta)\sin\left(\frac{\beta\gamma\sqrt{\Delta}\xi}{4(\lambda^2+9\alpha\beta)}\right)}\\
&\cdot\frac{2\gamma\sqrt{\Delta}(\lambda\pm\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta})}{16(\lambda^2+9\alpha\beta)}+\frac{\gamma(-48\alpha\beta-5\lambda^2+\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta}(\lambda\pm(3\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta}+\lambda))}{16(\lambda^2+9\alpha\beta)}.
\end{aligned}$$

② 当 $\Delta < 0$, 且 $C_1 = 0$ 时, 则 $R = \pm\frac{\beta\gamma\sqrt{-\Delta}}{2(\lambda^2+9\alpha\beta)}$, 结合 (3.12)、(3.13) 式, 代入 (3.7)、(3.8) 和 (2.5) 式可得

$$a_1(\xi) = \frac{1}{4\beta}\left(-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta}\right)(1+f(\xi)+k_1\xi+k_2), \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} a_0(\xi) = &-\frac{(-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta})}{4\beta}\left(1+f(\xi)+k_1\xi+k_2+\tanh\left(\frac{\beta\gamma\sqrt{-\Delta}\xi}{4(\lambda^2+9\alpha\beta)}\right)\right. \\ &\left.\cdot\frac{\beta\gamma\sqrt{-\Delta}}{2(\lambda^2+9\alpha\beta)}\right) + \frac{\gamma(-48\alpha\beta-5\lambda^2+\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta}(\lambda \pm (3\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta}+\lambda))}{16(\lambda^2+9\alpha\beta)}, \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{G-G'}{G+G'}\right) = &-\frac{4\beta\gamma\sqrt{-\Delta}}{C_2\beta\gamma\sqrt{-\Delta}+4(\lambda^2+9\alpha\beta)\tanh\left(\frac{\beta\gamma\sqrt{-\Delta}\xi}{4(\lambda^2+9\alpha\beta)}\right)}\cdot\frac{1}{1+\cosh\left(\frac{\beta\gamma\sqrt{-\Delta}\xi}{2(\lambda^2+9\alpha\beta)}\right)} \\ &\cdot\frac{1}{1+f(\xi)+k_1\xi+k_2}+1, \end{aligned} \tag{3.25}$$

其中 C_2 为积分常数. 再将 (3.23)–(3.25) 式代入 (3.2) 式, 则得到了方程 (1.1) 的解

$$\begin{aligned} u(\xi) = &\frac{4(\lambda^2+9\alpha\beta)+C_2\beta\gamma\sqrt{-\Delta}\tanh\left(\frac{\beta\gamma\sqrt{-\Delta}\xi}{4(\lambda^2+9\alpha\beta)}\right)}{C_2\beta\gamma\sqrt{-\Delta}+4(\lambda^2+9\alpha\beta)\tanh\left(\frac{\beta\gamma\sqrt{-\Delta}\xi}{4(\lambda^2+9\alpha\beta)}\right)}\cdot\frac{2\gamma\sqrt{-\Delta}(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta})}{16(\lambda^2+9\alpha\beta)} \\ &+\frac{\gamma(-48\alpha\beta-5\lambda^2+\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta}(\lambda \pm (3\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta}+\lambda))}{16(\lambda^2+9\alpha\beta)}. \end{aligned}$$

(3) $c = \frac{\gamma}{4}(-\lambda - \sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta})$, $\delta = \frac{\gamma^2(8\alpha\beta(36\alpha\beta+5\lambda^2)-2\lambda(6\alpha\beta+\lambda^2)(-\lambda-\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta}))}{16(\lambda^2+9\alpha\beta)^2}$, 则此时 $\Delta = -18\alpha\beta + \frac{1}{2}\lambda(-5\lambda+3\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta})$, 有

① 当 $\Delta > 0$ 时, 则 $R = \pm\frac{\beta\gamma\sqrt{\Delta}}{2(\lambda^2+9\alpha\beta)}$, 结合 (3.10)、(3.11) 式, 代入 (3.7)、(3.8) 和 (2.5) 式, 可得

$$a_1(\xi) = \frac{1}{4\beta}\left(-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta}\right)(1+f(\xi)+k_1\xi+k_2), \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned} a_0(\xi) = &-\frac{(-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta})}{4\beta}\left(1+f(\xi)+k_1\xi+k_2-\tan\left(\frac{\beta\gamma\sqrt{\Delta}\xi}{4(\lambda^2+9\alpha\beta)} \mp C_1\right)\right. \\ &\left.\cdot\frac{\beta\gamma\sqrt{\Delta}}{2(\lambda^2+9\alpha\beta)}\right) + \frac{\gamma(-48\alpha\beta-5\lambda^2+\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta}(-\lambda \pm (3\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta}-\lambda))}{16(\lambda^2+9\alpha\beta)}, \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{G-G'}{G+G'}\right) = &\frac{-8\beta\gamma\sqrt{\Delta}\cos C_1}{2C_2\beta\gamma\sqrt{\Delta}\cos {C_1}^2+(72\alpha\beta+8\lambda^2 \pm C_2\beta\gamma\sqrt{\Delta}\sin(2C_1))\tan\left(\frac{\beta\gamma\sqrt{\Delta}\xi}{4(\lambda^2+9\alpha\beta)}\right)} \\ &\cdot\frac{1}{\cos\left(\frac{\beta\gamma\sqrt{\Delta}\xi}{2(\lambda^2+9\alpha\beta)} \mp C_1\right)+\cos C_1}\cdot\frac{1}{1+f(\xi)+k_1\xi+k_2}+1, \end{aligned} \tag{3.28}$$

其中 C_1, C_2 为积分常数. 再将 (3.26)–(3.28) 式代入 (3.2) 式, 则得到了方程 (1.1) 的解

$$
\begin{aligned}
u(\xi)=&-\frac{-4(\lambda^2+9\alpha\beta)\cos\left(\frac{\beta\gamma\sqrt{\Delta}\xi}{4(\lambda^2+9\alpha\beta)}\right)+C_2\beta\gamma\sqrt{\Delta}\cos C_1\sin\left(\frac{\beta\gamma\sqrt{\Delta}\xi}{4(\lambda^2+9\alpha\beta)}\mp C_1\right)}{C_2\beta\gamma\sqrt{\Delta}\cos\left(\frac{\beta\gamma\sqrt{\Delta}\xi}{4(\lambda^2+9\alpha\beta)}\mp C_1\right)\cos C_1+4(\lambda^2+9\alpha\beta)\sin\left(\frac{\beta\gamma\sqrt{\Delta}\xi}{4(\lambda^2+9\alpha\beta)}\right)}\\
&\cdot\frac{2\gamma\sqrt{\Delta}(\lambda\pm\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta})}{16(\lambda^2+9\alpha\beta)}+\frac{\gamma(-48\alpha\beta-5\lambda^2+\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta}(-\lambda\pm(3\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta}-\lambda))}{16(\lambda^2+9\alpha\beta)}.
\end{aligned}
$$

② 当 $\Delta<0$, 且 $C_1=0$ 时, 则 $R=\pm\frac{\beta\gamma\sqrt{-\Delta}}{2(\lambda^2+9\alpha\beta)}$, 结合 (3.12)、(3.13) 式, 代入 (3.7)、(3.8) 和 (2.5) 式, 可得

$$
\begin{aligned}
a_1(\xi)&=\frac{1}{4\beta}\left(-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta}\right)(1+f(\xi)+k_1\xi+k_2), &(3.29)\\
a_0(\xi)&=-\frac{(-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta})}{4\beta}\left(1+f(\xi)+k_1\xi+k_2+\tanh\left(\frac{\beta\gamma\sqrt{-\Delta}\xi}{4(\lambda^2+9\alpha\beta)}\right)\right. &(3.30)\\
&\left.\cdot\frac{\beta\gamma\sqrt{-\Delta}}{2(\lambda^2+9\alpha\beta)}\right)+\frac{\gamma(-48\alpha\beta-5\lambda^2+\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta}(-\lambda\pm(3\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta}-\lambda))}{16(\lambda^2+9\alpha\beta)},\\
\left(\frac{G-G'}{G+G'}\right)&=\frac{-4\beta\gamma\sqrt{-\Delta}}{C_2\beta\gamma\sqrt{-\Delta}+4(\lambda^2+9\alpha\beta)\tanh\left(\frac{\beta\gamma\sqrt{-\Delta}\xi}{4(\lambda^2+9\alpha\beta)}\right)}\cdot\frac{1}{1+\cosh\left(\frac{\beta\gamma\sqrt{-\Delta}\xi}{2(\lambda^2+9\alpha\beta)}\right)}\\
&\cdot\frac{1}{1+f(\xi)+k_1\xi+k_2}+1, &(3.31)
\end{aligned}
$$

其中 C_2 为积分常数. 再将 (3.29)–(3.31) 式代入 (3.2) 式, 则得到了方程 (1.1) 的解

$$
\begin{aligned}
u(\xi)=&\frac{4(\lambda^2+9\alpha\beta)+C_2\beta\gamma\sqrt{-\Delta}\tanh\left(\frac{\beta\gamma\sqrt{-\Delta}\xi}{4(\lambda^2+9\alpha\beta)}\right)}{C_2\beta\gamma\sqrt{-\Delta}+4(\lambda^2+9\alpha\beta)\tanh\left(\frac{\beta\gamma\sqrt{-\Delta}\xi}{4(\lambda^2+9\alpha\beta)}\right)}\cdot\frac{2\gamma\sqrt{-\Delta}(\lambda\pm\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta})}{16(\lambda^2+9\alpha\beta)}\\
&+\frac{\gamma(-48\alpha\beta-5\lambda^2+\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta}(-\lambda\pm(3\sqrt{\lambda^2+8\alpha\beta}-\lambda))}{16(\lambda^2+9\alpha\beta)}.
\end{aligned}
$$

4 结论

本文构造了一种满足一类二阶非线性变系数常微分方程的 $\left(\frac{G-G'}{G+G'}\right)$ 展开法. 通过此展开法, 并结合齐次平衡法和 Mathematica 符号计算软件, 求得了 Burgers-KPP 方程多个新的三角函数形式和双曲函数形式的显式行波解, 扩大了该类方程的解的范围, 同时也验证了该展开法对于求解非线性偏微分方程的精确解是简单有效的.

参 考 文 献

[1] Wang M L, Li X Z, Zhang J L. The (G'/G)-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics [J]. Phys. Lett. A, 2008, 372: 417–423.

[2] Wang M L, Zhang J L, Li X Z. Application of the (G'/G)-expansion to travelling wave solutions of the Broer-Kaup and theapproximate long water wave equations [J]. Appl. Math. Comput., 2008, 206: 321–326.

[3] Li L X, Wang M L. The (G'/G)-expansion method and travelling wave solutions for a higher-order nonlinear schrodinger equation [J]. Appl. Math. Comput., 2009, 208: 440–445.

[4] 邢秀芝, 杨红艳, 卜春霞. 利用推广的 (G'/G) 展开法求解 (2+1) 维 BBM 方程 [J]. 数学的实践与认识, 2011, 41(16): 240–243.

[5] LI L X, LI E Q, Wang M L. The $(G'/G, 1/G)$-expansion method and its application to travelling wave solutions of the Zakharov equations[J]. Appl. Math. J. Chinese Univ., 2010, 25: 454–462.

[6] 冯庆江. 应用 $(G'/(G+G'))$ 展开法求 EqualWidth 方程的精确解 [J]. 山西师范大学学报 (自然科学版), 2012, 26(2): 5–7.

[7] 曾娇, 崔泽建, 王雄瑞. $(G'/(G+G'))$ 展开法求 KPP 方程的精确解 [J]. 宜宾学院学报, 2016, 16(6): 54–56.

[8] 尹君毅. 扩展的 (G'/G) 展开法和 Zakharov 方程组的新精确解 [J]. 物理学报, 2013, 62 (20): 200202.

[9] 王鑫, 邢文雅, 李胜军. 一类推广的 KdV 方程的新行波解 [J]. 数学杂志, 2017, 37(4): 851–864.

[10] 王思源, 陈浩. 求解 KdV 方程和 mKdV 方程的新方法:(g'/g^2) 展开法 [J]. 华南师范大学学报 (自然科学版), 2014, 46(1): 42–45.

[11] 柴岩. 函数变换法及非线性演化方程的精确解 [J]. 辽宁工程技术大学学报 (自然科学版), 2002, 21(4): 249–251.

[12] Xia Tiecheng, Zhang Hongqing, Li Peichun. New explicit and exact travelling wave solutions for Burgers-Kolmogorov-Petrovskii-Piscounov equations[J]. Chin. Quart. J. Math., 2003, 18(2): 129–133.

[13] 陈自高, 张愿章. 变系数辅助方程法求解广义 Burgers-KPP 方程 [J]. 华北水利水电学院学报, 2010, 31(6): 149–152.

NEW EXACT SOLUTIONS FOR BURGERS-KPP EQUATIONS

WANG Xin

(*College of Information Science and Technology, Hainan University, Haikou 570228, China*)

Abstract: In this paper, we study the explicit and exact solutions of the Burgers-KPP equation. Based on the (G'/G) expansion method, we construct a kind of G expansion method for satisfying a class of variable coefficient equations. The Burgers-KPP equation is solved by this kind of expansion method, several new explicit traveling wave solutions of trigonometric functions and hyperbolic functions are obtained, which enrich the scope of the solutions of the equation.

Keywords: Burgers-KPP equations; variable coefficient equations; G expansion method; exact solutions

2010 MR Subject Classification: 35Q53; 35C07