

交换环上反对称矩阵李代数的局部导子和 2 - 局部导子

王 迪, 王 颖

(大连理工大学数学科学学院, 辽宁 大连 116024)

摘 要: 令 R 是有单位元 1 的 2 - 挠自由交换环, $L_n(R)$ 是由 R 上所有 n 阶反对称矩阵构成的李代数. 本文研究了 $L_n(R) (n \geq 3)$ 上局部导子和 2 - 局部导子的性质. 利用 $L_n(R)$ 作为李代数的完备性和矩阵计算技巧, 证明了 $L_n(R)$ 上的每个局部导子和 2 - 局部导子都是导子. 推广了 $L_n(R)$ 上关于导子的主要结果.

关键词: 导子; 局部导子; 2 - 局部导子; 反对称矩阵李代数; 交换环

MR(2010) 主题分类号: 17B40; 17B99

中图分类号: O152.5

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2019)05-0757-10

1 引言

在上世纪 90 年代, Larson, Sourour 和 Kadison 在文献 [1, 2] 中分别独立地提出了局部导子的概念. 之后, 学者们开始研究结合代数和非结合代数上的局部导子的结构. 设 $\mathcal{H}$ 是 Banach 空间, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是 $\mathcal{H}$ 上有界线性算子全体构成的代数. Larson 和 Sourour 在文献 [1] 中证明了 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上的局部导子都是导子; Kadison 在文献 [2] 中证明了 Von Neumann 代数 $\mathcal{B}$ 到它的对偶 Banach 模的任一范数连续的局部导子是导子; 在文献 [3] 中, 作者证明了 C^* 代数 $\mathfrak{U}$ 到 Banach $\mathfrak{U}$ - 双模上的局部导子是导子; 在文献 [4] 中, 作者证明了因子 von Neumann 代数的套子代数的任一范数连续线性局部导子是导子; 赵延霞和王丽在文献 [5] 中证明了可交换环上上三角矩阵李代数的局部导子是导子; Ayupov 和 Kudaybergenov 在文献 [6] 中证明了特征为 0 的代数闭域上有限维半单李代数上的局部导子是导子并且证明了维数大于 3 的有限维幂零李代数上存在不是导子的局部导子.

2 - 局部导子可看作局部导子的一种非线性推广, 它的概念是由 Šemrl 在文献 [7] 中提出的. 令 H 是无限维可分离 Hilbert 空间, $\mathcal{B}(H)$ 是 H 上所有有界线性算子构成的代数. Šemrl 在文献 [7] 中证明了 $\mathcal{B}(H)$ 上的所有 2 - 局部导子都是导子; 2011 年, Ayupov 和 Kudaybergenov 在文献 [8] 中将 Šemrl 的结论推广到任意 Hilbert 空间上, 即当 H 是任意 Hilbert 空间时, $\mathcal{B}(H)$ 上的任一 2 - 局部导子都是导子. 此外, Ayupov 等人还给出了其他代数上 2 - 局部导子的结构. 例如, 在文献 [9] 中, 作者们给出了交换正则代数上存在非导子的 2 - 局部导子的充分必要条件, 同时证明了交换正规代数上矩阵代数的 2 - 局部导子是导子; 在文献 [10] 中, 作者们证明了特征为 0 的代数闭域上有限维半单李代数上的 2 - 局部导子都是导子, 同时给出了有限维幂零李代数上 2 - 局部导子不是导子的例子.

令 R 表示有单位元 1 的 2 - 挠自由交换环, $L_n(R)$ 表示 R 上所有 $n \times n$ 反对称矩阵构成的一个李代数. 在 $L_n(R)$ 上的李乘定义为 $[A, B] = AB - BA$, 其中 $A, B \in L_n(R)$.

*收稿日期: 2018-06-15

接收日期: 2018-11-05

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11471090).

作者简介: 王迪 (1994-), 女, 河北邢台, 硕士, 主要研究方向: 李代数.

2009 年, 作者们在文献 [11] 中证明了 $L_n(R)$ ($n \geq 3$) 是完备李代数; 2013 年, 文献 [12] 证明了 $L_n(R)$ ($n \geq 5$) 上 BZ 导子的分解式唯一, 进一步得出 $L_n(R)$ ($n \geq 5$) 是完备李代数. 由于 $L_n(R)$ 是完备李代数, 所以 $L_n(R)$ 上的导子都是内导子. 本文将利用这一结果证明 $L_n(R)$ ($n \geq 3$) 上的 2-局部导子和局部导子是导子.

2 基础知识

定义 $L_n(R)$ 上李乘为 $[A, B] = AB - BA$, $A, B \in L_n(R)$. 设 E_{ij} 为 (i, j) 位置为 1, 其余位置为 0 的 n 阶方阵. 令 $A_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$, 则 $A_{ij} \in L_n(R)$, $A_{ij} = -A_{ji}$, $A_{ii} = 0$. 根据 $L_n(R)$ 上李乘的定义可知

$$[A_{ij}, A_{sk}] = \delta_{ik}A_{js} + \delta_{js}A_{ik} - \delta_{is}A_{jk} - \delta_{jk}A_{is}, 1 \leq i, j, k, s \leq n.$$

本文选择 $\{A_{kl} | 1 \leq k < l \leq n\}$ 作为 $L_n(R)$ 的一组基底. 设 $X = \sum_{1 \leq k < l \leq n} x_{kl}A_{kl} \in L_n(R)$, $x_{kl} \in R$, 那么

$$[X, A_{ij}] = \sum_{1 \leq k < l \leq n} x_{kl}[A_{kl}, A_{ij}] = \sum_{k=1}^{i-1} x_{ki}A_{kj} - \sum_{l=i+1, l \neq j}^n x_{il}A_{lj} - \sum_{k=1, k \neq i}^{j-1} x_{kj}A_{ki} + \sum_{l=j+1}^n x_{jl}A_{li}.$$

定义 2.1 ^[13] 令 R 是有 1 的交换环, L 是 R 上的李代数. 若 R -线性映射 $\phi: L \rightarrow L$ 满足

$$\phi[x, y] = [\phi(x), y] + [x, \phi(y)], x, y \in L,$$

则称 ϕ 为导子. 特别的, 任意 $z \in L$, $\text{adz}: L \rightarrow L$, $\text{adz}(x) = [z, x]$, $x \in L$ 也是一个导子, 称这种形式的导子为内导子.

定义 2.2 ^[14] 令 R 是有 1 的交换环, L 是 R 上的李代数. 若满足

- (i) $Z(L) = \{x \in L | [x, y] = 0, y \in L\} = 0$,
- (ii) L 的导子都是内导子,

则称 L 是完备李代数.

命题 2.3 (见文献 [11, Theorem 3.2]) 令 R 是有 1 的 2-挠自由交换环, 那么 $L_n(R)$ ($n \geq 3$) 是完备李代数.

定义 2.4 ^[6] 令 R 是有 1 的交换环, L 是 R 上的李代数. 若 R -线性映射 $\Delta: L \rightarrow L$ 满足: 对于任意 $x \in L$ 都存在一个导子 D_x (与 x 有关) 使得 $\Delta(x) = D_x(x)$, 则称 Δ 为 L 的局部导子.

定义 2.5 ^[10] 令 R 是有 1 的交换环, L 是 R 上的李代数. 若映射 $T: L \rightarrow L$ 满足: 对于任意 $x, y \in L$ 都存在一个导子 $D_{x,y}$ (与 x, y 有关) 使得 $T(x) = D_{x,y}(x)$, $T(y) = D_{x,y}(y)$, 则称 T 为 L 的 2-局部导子.

显然, 导子是局部导子, 也是 2-局部导子. 反之, 不一定成立.

下文设 T 和 Δ 分别是 $L_n(R)$ 上的 2-局部导子和局部导子.

由命题 2.3 直接可得 $L_n(R)$ ($n \geq 3$) 上的导子都是内导子, 因此对于任意 $A, B \in L_n(R)$, 存在 $M_{A,B} \in L_n(R)$, 满足 $T(x) = [M_{A,B}, A]$, $T(y) = [M_{A,B}, B]$. 对于任意 $A \in L_n(R)$, 存在 $M_A \in L_n(R)$, 满足 $\Delta(x) = [M_A, A]$.

3 局部导子

根据局部导子定义可得, 存在 $A \in L_n(R)$ ($n \geq 3$) 使得 $\Delta(A_{12}) = [A, A_{12}]$. 令 $\Delta' = \Delta - \text{ad}A$, 则 $\Delta'(A_{12}) = 0$. 显然, 如果 Δ' 是导子, 那么 Δ 是导子. 下文中用 Δ 表示 Δ' , 并将证明 Δ 是一个导子.

引理 3.1 设 Δ 是 $L_3(R)$ 上的局部导子. 若 $\Delta(A_{12}) = 0$, 则 Δ 是导子.

证 显然, A_{12}, A_{13}, A_{23} 可作为 $L_3(R)$ 的一组基. 根据局部导子的定义, 存在 $x, y \in L_3(R)$, 使得 $\Delta(A_{13}) = [x, A_{13}]$, $\Delta(A_{23}) = [y, A_{23}]$. 设

$$x = x_1 A_{12} + x_2 A_{13} + x_3 A_{23}, \quad y = y_1 A_{12} + y_2 A_{13} + y_3 A_{23},$$

那么 $\Delta(A_{13}) = -x_1 A_{23} + x_3 A_{12}$, $\Delta(A_{23}) = y_1 A_{13} - y_2 A_{12}$.

对 $A_{12} + A_{13}$, 存在 $m \in L_3(R)$, $m = m_1 A_{12} + m_2 A_{13} + m_3 A_{23}$, 使得 $\Delta(A_{12} + A_{13}) = [m, A_{12} + A_{13}]$. 因为 Δ 是线性映射, 所以 $\Delta(A_{12} + A_{13}) = \Delta(A_{12}) + \Delta(A_{13})$, 即 $[m, A_{12} + A_{13}] = 0 + [x, A_{13}] = [x, A_{13}]$. 将 m 和 x 的基底表示代入等式, 整理得 $x_3 = m_3 = 0$. 同理, 对 $A_{12} + A_{23}$ 和 $A_{13} + A_{23}$ 分别进行如上操作可得 $y_2 = 0$ 和 $x_1 = y_1$. 所以

$$\Delta(A_{13}) = -x_1 A_{23} = [x_1 A_{12}, A_{13}], \quad \Delta(A_{23}) = y_1 A_{13} = x_1 A_{13} = [x_1 A_{12}, A_{23}].$$

令 $\Delta_1 = \Delta - \text{ad}(x_1 A_{12})$, 那么 $\Delta_1(A_{12}) = \Delta_1(A_{13}) = \Delta_1(A_{23}) = 0$, 所以 $\Delta_1 = 0$, 即 $\Delta = \text{ad}(x_1 A_{12})$. 因此 $L_3(R)$ 上的局部导子 Δ 是导子.

在 $L_n(R)$ ($n \geq 4$) 中, 当 $3 \leq j \leq n$ 时, 由局部导子定义可得, 存在

$$a^{(j)} = \sum_{1 \leq k < l \leq n} a_{kl}^{(j)} A_{kl} \in L_n(R), \quad b^{(j)} = \sum_{1 \leq k < l \leq n} b_{kl}^{(j)} A_{kl} \in L_n(R).$$

使得

$$\Delta(A_{1j}) = [a^{(j)}, A_{1j}] = \sum_{k=2}^n a_{1k}^{(j)} A_{jk} + \sum_{k=2}^{j-1} a_{kj}^{(j)} A_{1k} - \sum_{k=j+1}^n a_{jk}^{(j)} A_{1k}, \quad (3.1)$$

$$\Delta(A_{2j}) = [b^{(j)}, A_{2j}] = b_{12}^{(j)} A_{1j} + \sum_{k=3}^n b_{2k}^{(j)} A_{jk} + \sum_{k=1}^{j-1} b_{kj}^{(j)} A_{2k} - \sum_{k=j+1}^n b_{jk}^{(j)} A_{2k}. \quad (3.2)$$

引理 3.2 设 Δ 是 $L_n(R)$ ($n \geq 4$) 上的局部导子. 若 $\Delta(A_{12}) = 0$, 那么存在 $m \in L_n(R)$, 令 $\Delta_1 = \Delta - \text{ad}m$, 使得

$$\begin{aligned} \Delta_1(A_{1j}) &= \sum_{k=3}^{j-1} a_{kj}^{(j)} A_{1k} - \sum_{k=j+1}^n a_{jk}^{(j)} A_{1k}, \quad j = 3, 4, \dots, n; \\ \Delta_1(A_{2j}) &= \sum_{k=3}^{j-1} a_{kj}^{(j)} A_{2k} - \sum_{k=j+1}^n a_{jk}^{(j)} A_{2k}, \quad j = 3, 4, \dots, n; \\ \Delta_1(A_{ij}) &= \sum_{k=3}^{i-1} a_{ki}^{(i)} A_{kj} - \sum_{k=i+1, k \neq j}^n a_{ik}^{(i)} A_{kj} - \sum_{k=3, k \neq i}^{j-1} a_{kj}^{(j)} A_{ki} + \sum_{k=j+1}^n a_{jk}^{(j)} A_{ki}, \quad 3 \leq i < j \leq n, \end{aligned}$$

且当 $3 \leq i < j \leq n$ 时, $a_{ij}^{(j)} = a_{ij}^{(i)}$.

证 在引理 3.2 的证明中, 始终假设 $3 \leq i, j \leq n$.

根据局部导子定义, 存在 $x = \sum_{1 \leq k < l \leq n} x_{kl} A_{kl} \in L_n(R)$, $y = \sum_{1 \leq k < l \leq n} y_{kl} A_{kl} \in L_n(R)$, 使得 $\Delta(A_{12} + A_{1j}) = [x, A_{12} + A_{1j}]$, $\Delta(A_{12} + A_{2j}) = [y, A_{12} + A_{2j}]$. 因为 Δ 是线性映射, 所以

$$\Delta(A_{12} + A_{1j}) = \Delta(A_{12}) + \Delta(A_{1j}) = \Delta(A_{1j}), \Delta(A_{12} + A_{2j}) = \Delta(A_{12}) + \Delta(A_{2j}) = \Delta(A_{2j}).$$

即 $[x, A_{12} + A_{1j}] = [a^{(j)}, A_{1j}]$, $[y, A_{12} + A_{2j}] = [b^{(j)}, A_{2j}]$,

$$\begin{aligned} [x, A_{12} + A_{1j}] &= \sum_{1 \leq k < l \leq n} x_{kl} [A_{kl}, A_{12}] + \sum_{1 \leq k < l \leq n} x_{kl} [A_{kl}, A_{1j}] \\ &= \sum_{k=3}^n x_{1k} A_{2k} - \sum_{k=3}^n x_{2k} A_{1k} + \sum_{k=2}^n x_{1k} A_{jk} + \sum_{k=2}^{j-1} x_{kj} A_{1k} - \sum_{k=j+1}^n x_{jk} A_{1k} \\ &= \sum_{k=2}^n a_{1k}^{(j)} A_{jk} + \sum_{k=2}^{j-1} a_{kj}^{(j)} A_{1k} - \sum_{k=j+1}^n a_{jk}^{(j)} A_{1k} \\ &= [a^{(j)}, A_{1j}], \end{aligned}$$

所以 $a_{1k}^{(j)} = x_{1k}, k = 3, \dots, n, k \neq j; x_{1k} = 0, k = 3, \dots, n, k \neq j$, 即 $a_{1k}^{(j)} = 0, k = 3, \dots, n, k \neq j$. 同理 $b_{2k}^{(j)} = y_{2k}, k = 3, \dots, n, k \neq j; y_{2k} = 0, k = 3, \dots, n, k \neq j$, 即 $b_{2k}^{(j)} = 0, k = 3, \dots, n, k \neq j$. 以上结果代入式 (3.1), (3.2) 式得

$$\Delta(A_{1j}) = \sum_{k=3}^{j-1} a_{kj}^{(j)} A_{1k} - \sum_{k=j+1}^n a_{jk}^{(j)} A_{1k} + a_{2j}^{(j)} A_{12} - a_{12}^{(j)} A_{2j}, j = 3, 4, \dots, n, \quad (3.3)$$

$$\Delta(A_{2j}) = \sum_{k=3}^{j-1} b_{kj}^{(j)} A_{2k} - \sum_{k=j+1}^n b_{jk}^{(j)} A_{2k} - b_{1j}^{(j)} A_{12} + b_{12}^{(j)} A_{1j}, j = 3, 4, \dots, n. \quad (3.4)$$

存在 $d = \sum_{1 \leq k < l \leq n} d_{kl} A_{kl} \in L_n(R)$, 使得 $\Delta(A_{1j} + A_{1i}) = [d, A_{1j} + A_{1i}]$, 不妨设 $i < j$. 又因为 $\Delta(A_{1j} + A_{1i}) = \Delta(A_{1j}) + \Delta(A_{1i})$, 即 $[d - a^{(j)}, A_{1j}] = [a^{(i)} - d, A_{1i}]$, 所以

$$a_{12}^{(i)} = a_{12}^{(j)}, a_{ij}^{(i)} = a_{ij}^{(j)}, 3 \leq i < j \leq n. \quad (3.5)$$

存在 $h = \sum_{1 \leq k < l \leq n} h_{kl} A_{kl} \in L_n(R)$, 满足 $\Delta(A_{1j} + A_{2j}) = [h, A_{1j} + A_{2j}]$. 同理可得 $[h - a^{(j)}, A_{1j}] = [b^{(j)} - d, A_{2j}]$, 所以

$$a_{12}^{(j)} = b_{12}^{(j)}, \quad (3.6)$$

$$a_{kj}^{(j)} = b_{kj}^{(j)}, k = 3, \dots, j-1, \quad (3.7)$$

$$a_{jk}^{(j)} = b_{jk}^{(j)}, k = j+1, \dots, n. \quad (3.8)$$

存在 $z = \sum_{1 \leq k < l \leq n} z_{kl} A_{kl} \in L_n(R)$, 满足 $\Delta(A_{1j} + A_{2i}) = [z, A_{1j} + A_{2i}]$, 假设 $i \neq j$. 同理可得 $[z, A_{1j} + A_{2i}] = [a^{(j)}, A_{1j}] + [b^{(i)}, A_{2i}]$. 在上式展开式中有 $(z_{2j} - z_{1i}) A_{12} = (a_{2j}^{(j)} - b_{1i}^{(i)}) A_{12}$

和 $(z_{2j} - z_{1i})A_{ij} = 0$. 所以 $z_{2j} - z_{1i} = a_{2j}^{(j)} - b_{1i}^{(i)}$, $z_{2j} - z_{1i} = 0$. 因此

$$a_{2j}^{(j)} = b_{1i}^{(i)}, 3 \leq i \neq j \leq n. \quad (3.9)$$

由式 (3.5) 第一个式子和式 (3.6) 可得

$$a_{12}^{(j)} = b_{12}^{(i)}, i, j = 3, \dots, n. \quad (3.10)$$

因此不妨设 $a = a_{12}^{(j)}$.

令 $m = aA_{12}$, $\Delta_1 = \Delta - \text{adm}$. 将 (3.7) 和 (3.8) 式分别代入 (3.3) 和 (3.4) 式, 得

$$\Delta_1(A_{1j}) = \sum_{k=3}^{j-1} a_{kj}^{(j)} A_{1k} - \sum_{k=j+1}^n a_{jk}^{(j)} A_{1k} + a_{2j}^{(j)} A_{12}, j = 3, 4, \dots, n, \quad (3.11)$$

$$\Delta_1(A_{2j}) = \sum_{k=3}^{j-1} a_{kj}^{(j)} A_{2k} - \sum_{k=j+1}^n a_{jk}^{(j)} A_{2k} - b_{1j}^{(j)} A_{12}, j = 3, 4, \dots, n. \quad (3.12)$$

此时 $\Delta_1(A_{12}) = 0$, 且 Δ_1 仍然是一个局部导子.

存在 $c = \sum_{1 \leq k < l \leq n} c_{kl} A_{kl} \in L_n(R)$, 使得

$$\begin{aligned} \Delta_1(A_{ij}) &= [c, A_{ij}] \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} c_{ki} A_{kj} - \sum_{k=i+1}^n c_{ik} A_{kj} - \sum_{k=1}^{j-1} c_{kj} A_{ki} + \sum_{k=j+1}^n c_{jk} A_{ki}, 3 \leq i < j \leq n. \end{aligned} \quad (3.13)$$

存在 $t = \sum_{1 \leq k < l \leq n} t_{kl} A_{kl} \in L_n(R)$, 满足 $\Delta_1(A_{12} + A_{ij}) = [t, A_{12} + A_{ij}]$. 因为 Δ_1 是线性映射, 所以 $\Delta_1(A_{12} + A_{ij}) = \Delta_1(A_{12}) + \Delta_1(A_{ij}) = \Delta_1(A_{ij})$, 即 $[t, A_{12} + A_{ij}] = [c, A_{ij}]$. 在展开式中有 $c_{1i} A_{1j} = (t_{1i} - t_{2j}) A_{1j}$, $c_{2i} A_{2j} = (t_{1j} + t_{2i}) A_{2j}$, $c_{1j} A_{1i} = (t_{2i} + t_{1j}) A_{1i}$, $-c_{2j} A_{2i} = (t_{1i} - t_{2j}) A_{2i}$, 所以 $c_{1i} = t_{1i} - t_{2j}$, $c_{2i} = t_{1j} + t_{2i}$, $c_{1j} = t_{2i} + t_{1j}$, $-c_{2j} = t_{1i} - t_{2j}$. 因此

$$c_{1i} = -c_{2j}, c_{2i} = c_{1j}. \quad (3.14)$$

存在 $u = \sum_{1 \leq k < l \leq n} u_{kl} A_{kl} \in L_n(R)$, 满足 $\Delta_1(A_{1j} + A_{ij}) = [u, A_{1j} + A_{ij}]$. 因为 Δ_1 是线性映射, 所以 $\Delta_1(A_{1j} + A_{ij}) = \Delta_1(A_{1j}) + \Delta_1(A_{ij})$, 即 $[u, A_{1j} + A_{ij}] = [c, A_{ij}] + [a^{(j)} - m, A_{1j}]$. 式子展开后可得

$$a_{2j}^{(j)} = u_{2j} = c_{2j}; \quad (3.15)$$

$$-c_{1i} = -u_{1i} = 0; \quad (3.16)$$

$$a_{kj}^{(j)} = u_{kj} = c_{kj}, k = 3, \dots, j-1, k \neq i; \quad (3.17)$$

$$a_{jk}^{(j)} = u_{jk} = c_{jk}, k = j+1, \dots, n. \quad (3.18)$$

由 (3.9), (3.15) 和 (3.16) 式可知, $a_{2j}^{(j)} = b_{1j}^{(j)} = 0, 3 \leq j \leq n$.

同理, 存在 $v = \sum_{1 \leq k < l \leq n} v_{kl} A_{kl} \in L_n(R)$, 满足 $\Delta_1(A_{1i} + A_{ij}) = [v, A_{1i} + A_{ij}]$. 因为 Δ_1 是线性映射, 所以 $\Delta_1(A_{1i} + A_{ij}) = \Delta_1(A_{1i}) + \Delta_1(A_{ij})$, 即

$$[v, A_{1i} + A_{ij}] = [c, A_{ij}] + [a^{(i)} - m, A_{1i}].$$

式子展开后可得

$$c_{1j} = v_{1j} = 0; \quad (3.19)$$

$$c_{ki} = v_{ki} = a_{ki}^{(i)}, k = 3, \dots, i-1, k \neq i; \quad (3.20)$$

$$c_{ik} = v_{ik} = a_{ik}^{(i)}, k = i+1, \dots, n. \quad (3.21)$$

将 (3.14)–(3.21) 式代入 (3.11)–(3.13) 式, 可得

$$\Delta_1(A_{1j}) = \sum_{k=3}^{j-1} a_{kj}^{(j)} A_{1k} - \sum_{k=j+1}^n a_{jk}^{(j)} A_{1k}, j = 3, 4, \dots, n;$$

$$\Delta_1(A_{2j}) = \sum_{k=3}^{j-1} a_{kj}^{(j)} A_{2k} - \sum_{k=j+1}^n a_{jk}^{(j)} A_{2k}, j = 3, 4, \dots, n;$$

$$\Delta_1(A_{ij}) = \sum_{k=3}^{i-1} a_{ki}^{(i)} A_{kj} - \sum_{k=i+1, k \neq j}^n a_{ik}^{(i)} A_{kj} - \sum_{k=3, k \neq i}^{j-1} a_{kj}^{(j)} A_{ki} + \sum_{k=j+1}^n a_{jk}^{(j)} A_{ki}, 3 \leq i < j \leq n.$$

引理证毕.

定理 3.3 $L_n(R) (n \geq 3)$ 上的局部导子 Δ 是导子.

证 由引理 3.1 可知, $L_3(R)$ 上的局部导子都是导子, 所以只需证明 $n \geq 4$ 时结论成立.

因为 Δ_1 是线性映射, 所以如果对基底中任意两个元素 $A_{ij}, A_{kl}, 1 \leq i, j, k, l \leq n$ 都满足以下等式

$$[\Delta_1(A_{ij}), A_{kl}] + [A_{ij}, \Delta_1(A_{kl})] = \Delta_1([A_{ij}, A_{kl}]).$$

则对任意 $x \in L_n(R), y \in L_n(R)$, 都有 $[\Delta_1(x), y] + [x, \Delta_1(y)] = \Delta_1([x, y])$ 成立, 即 Δ_1 是导子. 现将基底分为四部分: $A_{12}, \{A_{1p}\}_{3 \leq p \leq n}, \{A_{2p}\}_{3 \leq p \leq n}, \{A_{pq}\}_{3 \leq p < q \leq n}$. 因此只需验证以下 10 个等式成立即可,

$$\begin{aligned} & [\Delta_1(A_{12}), A_{ij}] + [A_{12}, \Delta_1(A_{ij})] = 0; \\ & [\Delta_1(A_{12}), A_{2j}] + [A_{12}, \Delta_1(A_{2j})] = \Delta_1(A_{1j}); \\ & [\Delta_1(A_{12}), A_{1j}] + [A_{12}, \Delta_1(A_{1j})] = -\Delta_1(A_{2j}); \\ & [\Delta_1(A_{1i}), A_{2j}] + [A_{1i}, \Delta_1(A_{2j})] = 0; \\ & [\Delta_1(A_{1j}), A_{2j}] + [A_{1j}, \Delta_1(A_{2j})] = 0; \\ & [\Delta_1(A_{ij}), A_{kl}] + [A_{ij}, \Delta_1(A_{kl})] = 0; \\ & [\Delta_1(A_{ij}), A_{il}] + [A_{ij}, \Delta_1(A_{il})] = -\Delta_1(A_{jl}); \\ & [\Delta_1(A_{sj}), A_{kl}] + [A_{sj}, \Delta_1(A_{kl})] = 0, s = 1, 2; \\ & [\Delta_1(A_{si}), A_{ij}] + [A_{si}, \Delta_1(A_{ij})] = \Delta_1(A_{sj}), s = 1, 2; \\ & [\Delta_1(A_{si}), A_{sj}] + [A_{si}, \Delta_1(A_{sj})] = -\Delta_1(A_{ij}), s = 1, 2, \end{aligned}$$

其中 $3 \leq i, j, k, l \leq n$, 且 i, j, k, l 互不相等.

以下验证第 7 个等式成立, 不妨假设 $i < j < l$,

$$\begin{aligned}
 [\Delta_1(A_{ij}), A_{il}] &= -a_{il}^{(i)}[A_{lj}, A_{il}] - \sum_{k=3, k \neq i}^{j-1} a_{kj}^{(j)}[A_{ij}, A_{il}] + \sum_{k=j+1}^n a_{jk}^{(j)}[A_{ki}, A_{il}] \\
 &= a_{il}^{(l)}A_{ij} - \sum_{k=3, k \neq i}^{j-1} a_{kj}^{(j)}A_{kl} + \sum_{k=j+1, k \neq l}^n a_{jk}^{(j)}A_{kl}, \\
 [A_{ij}, \Delta_1(A_{il})] &= -a_{ij}^{(i)}[A_{ij}, A_{jl}] - \sum_{k=3, k \neq i}^{l-1} a_{kl}^{(l)}[A_{ij}, A_{ki}] + \sum_{k=l+1}^n a_{lk}^{(l)}[A_{ij}, A_{ki}] \\
 &= -a_{ij}^{(j)}A_{il} - \sum_{k=3, k \neq i, j}^{l-1} a_{kl}^{(l)}A_{jk} + \sum_{k=l+1}^n a_{lk}^{(l)}A_{jk},
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 &[\Delta_1(A_{ij}), A_{il}] + [A_{ij}, \Delta_1(A_{il})] \\
 &= -\sum_{k=3}^{j-1} a_{kj}^{(j)}A_{kl} + \sum_{k=j+1, k \neq l}^n a_{jk}^{(j)}A_{kl} + \sum_{k=3, k \neq j}^{l-1} a_{kl}^{(l)}A_{kj} - \sum_{k=l+1}^n a_{lk}^{(l)}A_{kj}, \\
 &= -\Delta_1(A_{jl}).
 \end{aligned}$$

由以上可得等式 $[\Delta_1(A_{ij}), A_{il}] + [A_{ij}, \Delta_1(A_{il})] = -\Delta_1(A_{jl})$ 成立, 其余等式类似可得. 因此 Δ_1 是导子, 根据命题 2.3 可知存在 $X \in L_n(R)$, 使得 $\Delta_1 = \text{ad}X$. 所以

$$\Delta = \Delta_1 + \text{adm} = \text{ad}(X + m),$$

即 Δ 是一个导子. 定理得证.

4 2 - 局部导子

引理 4.1 $L_n(R)$ ($n \geq 3$) 上的 2 - 局部导子是线性映射.

证 用 $\text{tr}(X)$ 表示矩阵 X 的迹, 即 X 的对角元素之和. 令 $f(A, B) = \text{tr}(AB)$, $A, B \in L_n(R)$, 则

$$\begin{aligned}
 f(A, B) &= f(B, A), \\
 f(A_1 + A_2, B_1 + B_2) &= f(A_1, B_1) + f(A_1, B_2) + f(A_2, B_1) + f(A_2, B_2), \\
 f(rA, tB) &= rt f(A, B), \\
 f([A, B], C) &= f(A, [B, C]),
 \end{aligned}$$

其中 $A, B, A_1, A_2, B_1, B_2 \in L_n(R)$, $r, t \in R$.

若 $x = \sum_{1 \leq k < l \leq n} x_{kl}A_{kl} \in L_n(R)$ 满足 $f(A, x) = 0$, $\forall A \in L_n(R)$, 那么 $f(x, A_{ij}) = -2x_{ij} = 0$, $1 \leq i < j \leq n$, 所以 $x_{ij} = 0$, 即 $x = 0$.

由以上可得 f 是 $L_n(R)$ 上非退化的对称双线性型.

设 T 是 $L_n(R)$ ($n \geq 3$) 上的 2 - 局部导子, 那么对于任意 $A, B, C \in L_n(R)$, 有

$$\begin{aligned} f(T(A+B), C) &= f([M_{A+B, C}, A+B], C) = -f(A+B, [M_{A+B, C}, C]) \\ &= -f(A+B, T(C)) = -f(A, T(C)) - f(B, T(C)) \\ &= -f(A, [M_{A, C}, C]) - f(B, [M_{B, C}, C]) \\ &= f([M_{A, C}, A], C) + f([M_{B, C}, B], C) \\ &= f(T(A), C) + f(T(B), C) \\ &= f(T(A) + T(B), C), \end{aligned}$$

所以 $T(A+B) = T(A) + T(B)$.

对于任意 $A \in L_n(R), r \in R$, 存在 $M_{A, rA}$ 使得 $T(A) = [M_{A, rA}, A]$, $T(rA) = [M_{A, rA}, rA]$, 显然 $T(rA) = rT(A)$. 因此 T 是线性映射. 引理得证.

定理 4.2 $L_n(R)$ ($n \geq 3$) 上的 2 - 局部导子是导子.

证 由引理 4.1 知 T 具有线性性, 因此只需证明 $[T(A_{ij}), A_{kl}] + [A_{ij}, T(A_{kl})] = T([A_{ij}, A_{kl}])$ 成立即可.

分两种情况证明.

(i) 当 $[A_{ij}, A_{kl}] = 0$ 时, 根据 2 - 局部导子定义, 存在 $m \in L_n(R)$, 使得 $T(A_{ij}) = [m, A_{ij}]$, $T(A_{kl}) = [m, A_{kl}]$, 那么

$$[T(A_{ij}), A_{kl}] + [A_{ij}, T(A_{kl})] = [m, [A_{ij}, A_{kl}]] = 0 = T([A_{ij}, A_{kl}]).$$

等式成立.

(ii) 当 $[A_{ij}, A_{kl}] \neq 0$ 时, 不妨写成 $[A_{ij}, A_{is}] = -A_{js}$, 其中 $i < j < s$. 根据 2 - 局部导子的定义, 存在

$$x = \sum_{1 \leq k < l \leq n} x_{kl} A_{kl}, \quad y = \sum_{1 \leq k < l \leq n} y_{kl} A_{kl}, \quad m = \sum_{1 \leq k < l \leq n} m_{kl} A_{kl} \in L_n(R),$$

满足 $T(A_{ij}) = [x, A_{ij}] = [m, A_{ij}]$, $T(A_{is}) = [y, A_{is}] = [m, A_{is}]$, $T(A_{js}) = [x, A_{js}] = [y, A_{js}]$. 因此可得

$$\begin{aligned} 0 &= [x - m, A_{ij}] = \sum_{k=1}^{i-1} (x_{ki} - m_{ki}) A_{kj} - \sum_{k=i+1, k \neq j}^n (x_{ik} - m_{ik}) A_{kj} \\ &\quad - \sum_{k=1, k \neq i}^{j-1} (x_{kj} - m_{kj}) A_{ki} + \sum_{k=j+1}^n (x_{jk} - m_{jk}) A_{ki}, \\ 0 &= [y - m, A_{is}] = \sum_{k=1}^{i-1} (y_{ki} - m_{ki}) A_{ks} - \sum_{k=i+1, k \neq s}^n (y_{ik} - m_{ik}) A_{ks} \\ &\quad - \sum_{k=1, k \neq i}^{s-1} (y_{ks} - m_{ks}) A_{ki} + \sum_{k=s+1}^n (y_{sk} - m_{sk}) A_{ki}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = [x - y, A_{js}] &= \sum_{k=1}^{j-1} (x_{kj} - y_{kj}) A_{ks} - \sum_{k=j+1, k \neq s}^n (x_{jk} - y_{jk}) A_{ks} \\
&\quad - \sum_{k=1, k \neq j}^{s-1} (x_{ks} - y_{ks}) A_{kj} + \sum_{k=s+1}^n (x_{sk} - y_{sk}) A_{kj}.
\end{aligned}$$

将上式各项展开可得

$$\begin{aligned}
&x_{ki} - m_{ki} = 0, k = 1, \dots, i-1; x_{ik} - m_{ik} = 0, k = i+1, \dots, n, k \neq j; \\
&x_{kj} - m_{kj} = 0, k = 1, \dots, j-1, k \neq i; x_{jk} - m_{jk} = 0, k = j+1, \dots, n; \\
&y_{ki} - m_{ki} = 0, k = 1, \dots, i-1; y_{ik} - m_{ik} = 0, k = i+1, \dots, n, k \neq s; \\
&y_{ks} - m_{ks} = 0, k = 1, \dots, s-1, k \neq i; y_{sk} - m_{sk} = 0, k = s+1, \dots, n; \\
&x_{kj} - y_{kj} = 0, k = 1, \dots, j-1; x_{jk} - y_{jk} = 0, k = j+1, \dots, n, k \neq s. \\
&x_{ks} - y_{ks} = 0, k = 1, \dots, s-1, k \neq j; x_{sk} - y_{sk} = 0, k = s+1, \dots, n;
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&x_{kj} = m_{kj}, k = 1, \dots, j-1; x_{jk} = m_{jk}, k = j+1, \dots, n, k \neq s; \\
&x_{ks} = m_{ks}, k = 1, \dots, s-1, k \neq j; x_{sk} = m_{sk}, k = s+1, \dots, n.
\end{aligned}$$

即 $[x - m, A_{js}] = 0$. 所以 $T(A_{js}) = [x, A_{js}] = [m, A_{js}]$. 因此

$$[T(A_{ij}), A_{is}] + [A_{ij}, T(A_{is})] = [m, [A_{ij}, A_{is}]] = -T(A_{js}).$$

定理得证.

参 考 文 献

- [1] Larson D R, Sourour A R. Local derivations and local automorphisms of $\mathcal{B}(X)[J]$. Proc. Symposia Pure Math., 1990, 51(2): 187–194.
- [2] Kadison R V. Local derivations[J]. J. Algebra, 1990, 130(2): 494–509.
- [3] Johnson B. Local derivations on C^* -algebras are derivations[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 2000, 353(1): 313–325.
- [4] Zhang Jianhua, Ji Guoxing, Cao Huaixin. Local derivations of nest subalgebras of von Neumann algebras[J]. Linear Alg. Appl., 2004, 392: 61–69.
- [5] Zhao Yanxia, Wang Li. Local automorphisms and local derivations of upper triangular matrix Lie algebra over a commutative ring[J]. J. Math., 2015, 35(5): 1042–1052.
- [6] Ayupov S, Kudaybergenov K. Local derivations on finite-dimensional Lie algebras[J]. Linear Alg. Appl., 2016, 493: 381–398.
- [7] Šemrl P. Local automorphisms and derivations on $\mathcal{B}(H)[J]$. Proc. Amer. Math. Soc., 1997, 125(9): 2677–2680.
- [8] Ayupov S, Kudaybergenov K. 2-Local derivations and automorphisms on $\mathcal{B}(H)[J]$. J. Math. Anal. Appl., 2012, 395(1): 15–18.

- [9] Ayupov S, Kudaybergenov K, Alauadinov A. 2-Local derivations on matrix algebras over commutative regular algebras[J]. Linear Alg. Appl., 2013, 439: 1294–1311.
- [10] Ayupov S, Kudaybergenov K, Rakhimov I. 2-Local derivations on finite-dimensional Lie algebras[J]. Linear Alg. Appl., 2015, 474: 1–11.
- [11] Zhao Yanxia, Yao Ruiping, Wang Dengyin. One kind of complete Lie algebra over a commutative ring [J]. J. Math. Res. Expos., 2009, 29(1): 85–90.
- [12] Wang Ying, Gou Wenjie, Li Hailing. BZ derivations for the Lie algebra of anti-symmetric matrices over a commutative ring[J]. Intern. J. Alg., 2013, 7(6): 281–288.
- [13] Humphreys J E. Introduction to Lie algebras and representation theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1972: 4.
- [14] 苏育才, 卢才辉, 崔一敏. 有限维半单李代数简明教程 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.

LOCAL DERIVATIONS AND 2-LOCAL DERIVATIONS ON THE LIE ALGEBRA OF ANTISYMMETRIC MATRICES OVER A COMMUTATIVE RING

WANG Di, WANG Yin

(*School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024*)

Abstract: Let R be a 2-torsion free commutative ring with identity 1 and $L_n(R)$ a Lie algebra consisting of all $n \times n$ antisymmetric matrices over R . The aim of this paper is to study the character of the local derivations and 2-local derivations of $L_n(R)$. By using that $L_n(R)$ is a complete Lie algebra and the skill of matrix computation, it is proved that every local derivation and every 2-local derivation of $L_n(R)$ are derivations, which extends the main result of derivations of $L_n(R)$.

Keywords: derivation; local derivation; 2-local derivation; Lie algebra of antisymmetric matrices; commutative ring

2010 MR Subject Classification: 17B40; 17B99