Vol. 39 (2019)
No. 5

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

四元数 Sylvester 方程的 Toeplitz 约束解及其最佳逼近

黄敬频, 蓝家新, 毛利影, 王 敏
(广西民族大学理学院, 广西 南宁 530006)

摘 要: 本文研究了四元数体上 Sylvester 方程具有 Toeplitz 矩阵约束解及其最佳逼近问题. 利用四元数矩阵的实分解和矩阵 Kronecker 积, 获得四元数 Sylvester 方程 $AX-XB=C$ 具有 Toeplitz 矩阵解的充要条件及其通解表达式. 同时在 Toeplitz 解集合中, 得到与预先给定的四元数 Toeplitz 矩阵有极小 Frobenius 范数的最佳逼近解.

关键词: 四元数体; Sylvester 方程; Toeplitz 矩阵; 最佳逼近
MR(2010) **主题分类号**: 15A24 **中图分类号**: O151.21
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2019)05-0741-07

1 引言

Sylvester 方程是矩阵理论研究中非常重要的一类矩阵方程, 它在特征结构配置、航天控制技术、微分方程数值解、模式识别等领域都有实际应用 [1−3]. 目前, 关于 Sylvester 方程的解与约束解人们多在实数域或复数域上讨论, 并已取得丰富的成果 [4−8], 而在四元数体上讨论该方程的约束解问题甚少. 随着四元数矩阵在图像处理、飞行器姿态控制等方面的应用发展 [9,10], 讨论四元数 Sylvester 方程的约束解具有较大实际意义. Toeplitz 矩阵是一类特殊结构矩阵, 它在信号压缩感知、超视距雷达电离层相位扰动校正等方面有重要作用 [11−13].

本文目的是把实数域上的 Sylvester 矩阵方程 $AX-XB=C$ 推广到四元数体上讨论, 给出该方程存在 Toeplitz 约束解的条件及解法, 同时讨论它的最佳逼近问题.

用 $\mathbf{R}^{n\times n},\mathbf{C}^{n\times n},\mathbf{Q}^{n\times n}$ 分别表示全体 n 阶实矩阵、复矩阵及四元数矩阵集合; $A^T,\bar{A},A^*$ 分别表示四元数矩阵 A 的转置、共轭、共轭转置; A^+ 表示 A 的 Moore-Penrose 广义逆; $\|A\|=\sqrt{\mathrm{tr}(A^*A)}$ 表示四元数矩阵 A 的 Frobenius 范数; $\mathrm{vec}(A)$ 表示矩阵 A 按列顺序拉直向量; $A\otimes B$ 表示矩阵 A 与 B 的 Kronecker 积. 下面给出相关定义和引理.

定义 1.1 设 $T=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{Q}^{n\times n}$, 如果满足 $a_{ij}=a_{j-i}$, 即

$$T=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1}\\ a_{-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{-n+2} & a_{-n+3} & \cdots & a_0 & a_1\\ a_{-n+1} & a_{-n+2} & \cdots & a_{-1} & a_0 \end{bmatrix}, \tag{1.1}$$

则称形如 (1.1) 式的矩阵为四元数 Toeplitz 矩阵, 全体 n 阶四元数 Toeplitz 矩阵记作 $\mathrm{TQ}^{n\times n}$.

*收稿日期: 2017-11-05 接收日期: 2018-06-13
基金项目: 国家自然科学基金项目 (11661011); 广西民族大学研究生创新项目 (gxun-chxzs2017142).
作者简介: 黄敬频 (1964–), 男, 广西陆川, 教授, 主要研究方向: 数值代数.

显然, 一个四元数 Toeplitz 矩阵 (1.1) 由它的第 n 行和第 n 列共 $2n-1$ 个元素唯一确定. 记

$$\begin{aligned} l(T) &= (a_{-n+1},a_{-n+2},\cdots,a_{-1},a_0,a_1,\cdots,a_{n-2},a_{n-1})^T \in \mathbf{Q}^{2n-1}, \quad (1.2)\\ T_n &= \begin{bmatrix} e_n & e_{n-1} & \cdots & e_2 & e_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & e_n & \cdots & e_3 & e_2 & e_1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & e_n & e_{n-1} & e_{n-2} & \cdots & e_1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e_n & e_{n-1} & \cdots & e_2 & e_1 \end{bmatrix} \in \mathbf{Q}^{n^2\times(2n-1)}, \quad (1.3)\end{aligned}$$

其中 e_i 为单位矩阵 I_n 的第 i 列. 易知 $T_n\in\mathbf{R}^{n^2\times(2n-1)}$ 是列正交的. 于是有

引理 1.1 设 $T=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{Q}^{n\times n}$, 则

$$T\in \mathrm{TQ}^{n\times n} \Leftrightarrow \mathrm{vec}(T)=T_n\cdot l(T), \quad (1.4)$$

其中 $l(T),T_n$ 分别如 (1.2), (1.3) 式所示.

引理 1.2 [14] 复数域上矩阵方程 $AX=C$ 有解的充要条件是 $AA^{+}C=C$. 此方程的通解和最小二乘解集均可表示为 $X=A^{+}C+(I-A^{+}A)Y$, 其中 $Y\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 是任意矩阵, 且存在唯一极小范数最小二乘解 $X_0=A^{+}C$.

本文主要讨论如下 3 个问题.

问题 I 给定四元数矩阵 $A,B,C\in\mathbf{Q}^{n\times n}$, 求矩阵 $X\in\mathrm{TQ}^{n\times n}$, 使得 $AX-XB=C$.

问题 II 对给定的 $A,B,C\in\mathbf{Q}^{n\times n}$, 求矩阵 $X\in\mathrm{TQ}^{n\times n}$, 使得 $||AX-XB-C||=\min$.

问题 III 设问题 I 的解集 $S_E\neq\emptyset$, $M\in\mathrm{TQ}^{n\times n}$ 是已知 Toeplitz 矩阵, 求 $\tilde{X}\in S_E$, 使得 $\min\limits_{X\in S_E}||X-M||=||\tilde{X}-M||$.

2 问题 I–II 的解

设 $X\in\mathrm{TQ}^{n\times n}$, 它在实数域 $\mathbf{R}$ 上的分解式为 $X=X_0+X_1i+X_2j+X_3k$, 其中 $X_i\in\mathbf{R}^{n\times n}(i=0,1,2,3)$ 均是实 Toeplitz 矩阵. 又设 $A,B,C\in\mathbf{Q}^{n\times n}$ 在实数域 $\mathbf{R}$ 上的分解式为 $A=A_0+A_1i+A_2j+A_3k, B=B_0+B_1i+B_2j+B_3k, C=C_0+C_1i+C_2j+C_3k$, 其中 $A_i,B_i,C_i\in\mathbf{R}^{n\times n}(i=0,1,2,3)$, 则四元数体上 Sylvester 方程

$$AX-XB=C \quad (2.1)$$

等价于

$$\begin{aligned} &(A_0+A_1i+A_2j+A_3k)(X_0+X_1i+X_2j+X_3k)\\ &-(X_0+X_1i+X_2j+X_3k)(B_0+B_1i+B_2j+B_3k)\\ =\ &(C_0+C_1i+C_2j+C_3k). \quad (2.2)\end{aligned}$$

将 (2.2) 式左边展开, 并根据四元数矩阵实分解的唯一性, 可得

$$\begin{cases} A_0X_0-X_0B_0-A_1X_1+X_1B_1-A_2X_2+X_2B_2-A_3X_3+X_3B_3=C_0,\\ A_1X_0-X_0B_1+A_0X_1-X_1B_0-A_3X_2-X_2B_3+A_2X_3+X_3B_2=C_1,\\ A_2X_0-X_0B_2+A_3X_1+X_1B_3+A_0X_2-X_2B_0-A_1X_3-X_3B_1=C_2,\\ A_3X_0-X_0B_3-A_2X_1-X_1B_2+A_1X_2+X_2B_1+A_0X_3-X_3B_0=C_3, \end{cases} \quad (2.3)$$

由于 $X_i \in \mathbf{R}^{n\times n}(i=0,1,2,3)$ 均是实 Toeplitz 矩阵, 因此由引理 1.1 可得

$$\mathrm{vec}(X_i)=T_n\cdot l(X_i)\quad (i=0,1,2,3), \tag{2.4}$$

其中 T_n 如 (1.3) 式所示. 记

$$G=\begin{bmatrix} I\otimes A_0-B_0^T\otimes I & -I\otimes A_1+B_1^T\otimes I & -I\otimes A_2+B_2^T\otimes I & -I\otimes A_3+B_3^T\otimes I \\ I\otimes A_1-B_1^T\otimes I & I\otimes A_0-B_0^T\otimes I & -I\otimes A_3-B_3^T\otimes I & I\otimes A_2+B_2^T\otimes I \\ I\otimes A_2-B_2^T\otimes I & I\otimes A_3+B_3^T\otimes I & I\otimes A_0-B_0^T\otimes I & -I\otimes A_1-B_1^T\otimes I \\ I\otimes A_3-B_3^T\otimes I & -I\otimes A_2-B_2^T\otimes I & I\otimes A_1+B_1^T\otimes I & I\otimes A_0-B_0^T\otimes I \end{bmatrix},$$

$$\tilde{G}=G\begin{bmatrix} T_n & & & \\ & T_n & & \\ & & T_n & \\ & & & T_n \end{bmatrix},\quad L=\begin{bmatrix}\mathrm{vec}(C_0)\\ \mathrm{vec}(C_1)\\ \mathrm{vec}(C_2)\\ \mathrm{vec}(C_3)\end{bmatrix},\quad v=\begin{bmatrix} l(X_0)\\ l(X_1)\\ l(X_2)\\ l(X_3)\end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

由于 (2.4) 式等价于

$$\begin{bmatrix}\mathrm{vec}(X_0)\\ \mathrm{vec}(X_1)\\ \mathrm{vec}(X_2)\\ \mathrm{vec}(X_3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T_n l(X_0)\\ T_n l(X_1)\\ T_n l(X_2)\\ T_n l(X_3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} T_n & & & \\ & T_n & & \\ & & T_n & \\ & & & T_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l(X_0)\\ l(X_1)\\ l(X_2)\\ l(X_3)\end{bmatrix},$$

因此方程组 (2.3) 等价于

$$\tilde{G}v=L. \tag{2.6}$$

此外, 利用矩阵 Frobenius 范数可得

$$\begin{aligned} & ||AX-XB-C||^2 \\ = \; & ||A_0X_0-X_0B_0-A_1X_1+X_1B_1-A_2X_2+X_2B_2-A_3X_3+X_3B_3-C_0||^2+ \\ & ||A_1X_0-X_0B_1+A_0X_1-X_1B_0-A_3X_2-X_2B_3+A_2X_3+X_3B_2-C_1||^2+ \\ & ||A_2X_0-X_0B_2+A_3X_1+X_1B_3+A_0X_2-X_2B_0-A_1X_3-X_3B_1-C_2||^2+ \\ & ||A_3X_0-X_0B_3-A_2X_1-X_1B_2+A_1X_2+X_2B_1+A_0X_3-X_3B_0-C_3||^2 \\ = \; & ||\tilde{G}v-L||^2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

于是, 关于问题 I–II 的解, 有如下的结果.

定理 2.1 给定四元数矩阵 $A,B,C\in\mathbf{Q}^{n\times n}$, 则 Sylvester 方程 (2.1) 存在四元数 Toeplitz 解的充要条件是 $\tilde{G}\tilde{G}^{+}L=L$. 有解时, 它的一般 Toeplitz 解为

$$X=X_0+X_1i+X_2j+X_3k, \tag{2.8}$$

无解时, 它的最小二乘 Toeplitz 解仍为 (2.8) 式, 其中

$$\begin{aligned} & v=\tilde{G}^{+}L+(I-\tilde{G}^{+}\tilde{G})Y, \forall Y\in\mathbf{R}^{(8n-4)\times 1}, \\ & l(X_0)=v(1:2n-1), l(X_1)=v(2n:4n-2), \\ & l(X_2)=v(4n-1:6n-3), l(X_3)=v(6n-2:8n-4), \\ & \mathrm{vec}(X_i)=T_n\cdot l(X_i), i=0,1,2,3, \end{aligned}$$

这里 $\tilde{G} \in \mathbf{R}^{4n^2\times 4(2n-1)}, L \in \mathbf{R}^{4(2n-1)\times 1}$ 如 (2.5) 式所示, $v(1:2n-1)$ 表示由向量的第 1 至 $2n-1$ 个元素组成的 $2n-1$ 维向量.

证 由方程组 (2.6) 及引理 1.2 可得, 方程组 (2.1) 存在四元数 Toeplitz 解 $\Leftrightarrow$ 方程组 (2.6) 有解 $\Leftrightarrow \tilde{G}\tilde{G}^{+}L = L$. 有解时, (2.1) 的 Toeplitz 解显然由 (2.8) 式给出. 无解时, 由 (2.7) 式可得 $||AX - XB - C|| = \min \Leftrightarrow ||\tilde{G}v - L|| = \min$. 因此 (2.1) 式的最小二乘 Toeplitz 解仍为 (2.8) 式. 证毕.

3 问题 III 的解

设问题 I 的解集 $S_E \neq \emptyset, M \in \mathrm{TQ}^{n\times n}$ 是已知 Toeplitz 矩阵, 现将 M 作实分解 $M = M_0 + M_1 i + M_2 j + M_3 k$, 其中 $M_i \in \mathbf{R}^{n\times n} (i = 0, 1, 2, 3)$ 均是实 Toeplitz 矩阵. 记

$$v_M = \begin{bmatrix} l(M_0) \\ l(M_1) \\ l(M_2) \\ l(M_3) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{4(2n-1)\times 1}, \quad \hat{T} = \begin{bmatrix} T_n & & & \\ & T_n & & \\ & & T_n & \\ & & & T_n \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

则有

$$\begin{aligned} ||X - M||^2 &= \sum_{i=0}^{3} ||X_i - M_i||^2 = \sum_{i=0}^{3} ||\mathrm{vec}(X_i) - \mathrm{vec}(M_i)||^2 \\ &= \sum_{i=0}^{3} ||T_n \cdot l(X_i) - T_n \cdot l(M_i)||^2 = ||\hat{T}v - \hat{T}v_M||^2 \\ &= ||(\hat{T}^*\hat{T})^{\frac{1}{2}}(v - v_M)||^2, \end{aligned} \tag{3.2}$$

其中

$$\hat{T}^*\hat{T} = \begin{bmatrix} D & & & \\ & D & & \\ & & D & \\ & & & D \end{bmatrix}, D = \mathrm{diag}(1, \cdots, n-1, n, n-1, \cdots, 1) \in \mathbf{R}^{(2n-1)\times(2n-1)}.$$

于是关于问题 III, 有如下结果.

定理 3.1 设问题 I 的解集 $S_E \neq \emptyset, M \in \mathrm{TQ}^{n\times n}$ 是已知四元数 Toeplitz 矩阵, 则在 S_E 中使得 $||X - M|| = \min$ 的解 $\tilde{X}$ 存在, 且有如下表达式

$$\tilde{X} = X_0 + X_1 i + X_2 j + X_3 k, \tag{3.3}$$

其中

$$\begin{aligned} &\tilde{v} = \tilde{G}^{+}L + (I - \tilde{G}^{+}\tilde{G})[(\hat{T}^*\hat{T})^{\frac{1}{2}}(I - \tilde{G}^{+}\tilde{G})]^{+}(\hat{T}^*\hat{T})^{\frac{1}{2}}(v_M - \tilde{G}^{+}L), \\ &l(X_0) = \tilde{v}(1:2n-1), \quad l(X_1) = \tilde{v}(2n:4n-2), \\ &l(X_2) = \tilde{v}(4n-1:6n-3), \quad l(X_3) = \tilde{v}(6n-2:8n-4), \\ &\mathrm{vec}(X_i) = T_n \cdot l(X_i), i = 0, 1, 2, 3, \end{aligned}$$

这里的符号意义与前面所示相同.

证 当 $X \in S_E$ 时, 根据定理 2.1 及 (3.2) 式可知 $||X-M||^2=\min \Leftrightarrow ||(\hat{T}^*\hat{T})^{\frac{1}{2}}[\tilde{G}^+L+(I-\tilde{G}^+\tilde{G})Y-v_M]||^2=\min$, 其中 $\hat{T}^*\hat{T}$ 是一个正对角矩阵. 当 $\tilde{G}^+\tilde{G}\neq I$ 时, 由引理 1.2, 上式关于 Y 的最小二乘解为 $\tilde{Y}=[(\hat{T}^*\hat{T})^{\frac{1}{2}}(I-\tilde{G}^+\tilde{G})]^+(\hat{T}^*\hat{T})^{\frac{1}{2}}(v_M-\tilde{G}^+L)$, 当 $\tilde{G}^+\tilde{G}=I$ 时, (2.1) 存在唯一解 $\tilde{v}=\tilde{G}^+L$, 因此不论哪种情况均有

$$\begin{aligned}\tilde{v} &= \tilde{G}^+L+(I-\tilde{G}^+\tilde{G})\tilde{Y}\\ &= \tilde{G}^+L+(I-\tilde{G}^+\tilde{G})[(\hat{T}^*\hat{T})^{\frac{1}{2}}(I-\tilde{G}^+\tilde{G})]^+(\hat{T}^*\hat{T})^{\frac{1}{2}}(v_M-\tilde{G}^+L),\end{aligned}$$

于是存在 $\tilde{X}\in S_E$ 使得 $||X-M||=\min$ 成立, 并且 $\tilde{X}$ 由 (3.3) 式给出. 证毕.

根据定理 2.1 和定理 3.1, 我们给出问题 I–III 的求解步骤:

步 1 写出四元数矩阵 A,B,C 的实分解式, 即 $A=A_0+A_1i+A_2j+A_3k, B=B_0+B_1i+B_2j+B_3k, C=C_0+C_1i+C_2j+C_3k$.

步 2 按 (2.5) 式写出实矩阵 $\tilde{G}$ 和实向量 L.

步 3 检验条件 $\tilde{G}\tilde{G}^+L=L$ 是否成立.

i) 若条件成立, 说明问题 I 有解, 并按 (2.8) 式写出其 Toeplitz 解集 S_E;

ii) 若条件不成立, 说明问题 I 无解, 此时问题 II 的最小二乘 Toeplitz 解集仍为 S_E.

步 4 在问题 I 有解时, 对给定的四元数 Toeplitz 矩阵 M, 按 (3.1) 式写出对应的实向量 v_M.

步 5 按 (3.3) 式写出问题 III 的最佳逼近解 $\tilde{X}$, 即由 $\mathrm{vec}(X_i)=T_n\cdot l(X_i), i=0,1,2,3$, 可得出 4 个实 Toeplitz 矩阵 $X_i, i=0,1,2,3$, 从而获得 $\tilde{X}=X_0+X_1i+X_2j+X_3k$.

4 数值算例

算例 给定下列四元数矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&i&0\\0&i&j&0\\1&0&0&k\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&0&k\\0&1&0&0\\0&0&i&0\\k&0&0&j\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}-1+i+j&0.5+0.5j&1-i&1\\0.5i-0.5j&i&-0.75+0.25i&0.75-0.5i\\-1.5+0.5i-0.25j&-1.5+0.5i&0.75+0.5i&0.5-i\\2-i&-0.5-0.75i&0.5-1.5i+k&-1\end{bmatrix}.$$

试讨论 Sylvester 方程 (2.1) 的 Toeplitz 解的存在性.

解 四元数矩阵 A,B,C 的实分解矩阵分别为

$$A_0=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}, A_1=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$A_3=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},B_0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},B_1=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$B_2=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},B_3=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$C_0=\begin{bmatrix}-1&0.5&1&1\\0&0&-0.75&0.75\\-1.5&-1.5&0.75&0.5\\2&-0.5&0.5&-1\end{bmatrix},C_1=\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0.5&1&0.25&-0.5\\0.5&0.5&0.5&-1\\-1&-0.75&-1.5&0\end{bmatrix},$$

$$C_2=\begin{bmatrix}1&0.5&0&0\\-0.5&0&0&0\\-0.25&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},C_3=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}.$$

按 (2.5) 式写出实矩阵 $\tilde{G}$ 和实向量 L 并直接计算可知 $\tilde{G}\tilde{G}^{+}L=L$ 且 $\tilde{G}^{+}\tilde{G}=I$, 因此根据定理 2.1, 所给的 Sylvester 方程 (2.1) 存在唯一 Toeplitz 解 X, 且由公式 (2.8) 可得

$$X=\begin{bmatrix}0.5+0.5i+k&-0.25i+0.5j-0.5k&0.5-0.5i&-0.5j-0.5k\\1&0.5+0.5i+k&-0.25i+0.5j-0.5k&0.5-0.5i\\0.5+0.5j&1&0.5+0.5i+k&-0.25i+0.5j-0.5k\\-0.5+0.5i+j&0.5+0.5j&1&0.5+0.5i+k\end{bmatrix}.$$

5 结语

本文提出一种判断四元数 Sylvester 方程是否具有 Toeplitz 约束解的方法. 我们根据 Toeplitz 矩阵的结构特点, 给出四元数 Toeplitz 矩阵的新刻划. 利用四元数矩阵的实分解和矩阵的 Kronecker 积, 把约束方程问题转化为无约束方程问题, 解决了四元数乘法非交换的限制, 得到了四元数 Sylvester 方程具有 Toeplitz 解的充要条件, 以及它的 Toeplitz 解集和最小二乘解集 S_E. 此外, 利用矩阵 Frobenius 范数性质, 在 Toeplitz 解集 $S_E\neq\emptyset$ 的条件下, 获得 S_E 与预先给定的四元数 Toeplitz 矩阵 M 有极小 Frobenius 范数的最佳逼近解. 本文结果可为解决相关约束四元数矩阵方程问题提供有益参考.

参 考 文 献

[1] 段红梅, 王国胜, 段广仁. 二阶 Sylvester 方程的解及其在特征结构配置中的应用 [J]. 科学技术与工程, 2007, 7(20): 5246–5250.

[2] 段广仁. 空间变轨过程中的跨尺度滤波与控制研究 [J]. 科技创新导报, 2016, 13(20): 174–179.

[3] 蔡兆克, 鲍亮, 徐冬梅. 预条件件的平方 Smith 法求解大型 Sylvester 矩阵方程 [J]. 计算机工程与科学, 2017, 39(8): 1425–1430.

[4] Niu Q, Wang X, Lu L Z. A relaxed gradient based algorithm for solving Sylvester equations[J]. Asian Journal of Control, 2011, 13(3): 461–464.

[5] Xue J G, Xu S F, Li R C. Accurate solutions of M-matrix Sylvester equations[J]. Numer. Math., 2012, 120: 639–670.

[6] Zheng Q Q, Ma C F. On normal and skew-Hermitian splitting iteration methods for large spares continuous Sylvester equations[J]. J. Comput. Appl. Math., 2014, 268: 145–154.

[7] Zhou D M, Chen G L, Cai Q Y. On modified HSS iteration methods for continuous Sylvester equations[J]. Appl. Math. Comput., 2015, 263: 84–93.

[8] 顾传青, 仝霄, 张居丽. 求解 Sylvester 方程的广义非对称 PMHSS 算法 [J]. 高等学校计算数学学报, 2017, 39(2): 168–176.

[9] 王征风, 徐飞, 王波. 一种四元数矩阵建模的彩色图像质量评价方法 [J]. 航空计算技术, 2014, 44(6): 62–66.

[10] 范奎武. 用四元数描述飞行器姿态时的几个基本问题 [J]. 航天控制, 2012, 30(4): 49–53.

[11] 赵辉, 金胜杰. 基于奇异值分解的 Toeplitz 结构测量矩阵构造方法 [J]. 计算机应用与软件, 2016, 33(6): 180–184.

[12] 王川龙, 李超. Toeplitz 矩阵填充的保结构算法 [J]. 中国科学: 数学, 2016, 46(8): 1191–1206.

[13] 赵志国, 肖卉. 基于 Toeplitz 矩阵的电离层相位扰动校正方法 [J]. 系统工程与电子技术, 2017, 39(5): 1024–1029.

[14] 黄敬频, 谭云龙, 许克佶. 一类四元数矩阵方程的循环解及其最佳逼近 [J]. 数学杂志, 2014, 34(2): 353–359.

TOEPLITZ SOLUTION OF SYLVESTER EQUATION AND ITS OPTIMAL APPROXIMATION OVER QUATERNION FIELD

HUANG Jing-pin, LAN Jia-xin, MAO Li-ying, WANG Min

(*College of Science, Guangxi University for Nationalities, Nanning 530006, China*)

Abstract: In this paper, we study the Toeplitz matrix solution of Sylvester equation and its optimal approximation over quaternion field. By using the real representation of a quaternion matrix and Kronecker product of matrices, the necessary and sufficient condition for the existence of a Toeplitz matrix solution and the general solution of the quaternion Sylvester equation $AX - XB = C$ are obtained. Meanwhile, in the Toeplitz solution set, the expression of the optimal approximation solution to the given quaternion Toeplitz matrix is derived.

Keywords: quaternion field; Sylvester equation; Toeplitz matrix; optimal approximation

2010 MR Subject Classification: 15A24