

加权 Laplace 在积分 Ricci 曲率条件下的特征值估计

侯 标

(武汉大学数学与统计学院, 湖北 武汉 430072)

摘 要: 本文研究了积分 Ricci 曲率条件下加权 Laplace 算子的第一特征值估计的问题. 利用 Bochner 公式与加权 Reilly 公式等处理特征值问题的方法, 获得了加权 Laplace 在积分 Ricci 曲率条件下第一特征值估计下界的估计.

关 键 词: 积分 Ricci 曲率; 第一特征值; 加权 Laplace

MR(2010) 主题分类号: 53C21; 53C23

中图分类号: O186.12

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2019)05-0733-08

1 引言

特征值问题是几何分析的一个重要研究课题, 且在偏微分方程以及物理学科有着广泛的应用. 其中关于黎曼流形上 Laplace 算子第一特征值的估计问题, 就已经得到许多重要的结果. Lichnerowicz^[1] 首先得到了紧致无边流形在满足 $\text{Ric} \geq (n-1)K (K > 0)$ 的 Laplace 算子的第一特征值估计. 进一步地, Li-Yau^[2] 利用梯度估计的方法考虑了, 完备流形 M 本身 $\text{Ric} > 0$ 的情况, 得到了 Laplace 算子的第一非零特征值估计. 然而, 这个估计并不是最优的. 1984 Zhong-Yang^[3] 给出了这种情形下的最优估计. 同样地, 在考虑带边的黎曼流形时, 1980 年, Li-Yau^[2] 证明了紧致带边流形 M $\text{Ric} \geq 0$ ∂M 是凸的情况下, Neumann 边值条件下 Laplace 算子的第一非零特征值估计. 其他边值条件下相应的特征值估计问题也得到了 (参考文献 [4]).

当 Laplace 算子推广到加权 Laplace 算子时, 加权 Laplace 算子第一非零特征值也逐步被得到. 加权 Laplace, 定义为

$$\Delta_{\Phi} = \Delta - \nabla \Phi \cdot \nabla, \quad (1.1)$$

其中 Φ 是流形 M^k 的函数. 它是 $L^2(M, d\mu)$ 上的一个自伴随算子. 称 λ 是加权 Laplace 算子 Δ_{Φ} 的特征值是指如果存在一个非零的函数 $u \in C^{\infty}(M)$ 满足

$$\Delta_{\Phi} u = -\lambda u. \quad (1.2)$$

一般的, 在这种情形下需要引入新的曲率条件, m -Bakry-Émery Ricci 曲率

$$\text{Ric}_{\Phi}^m = \text{Ric} + \text{Hess}\Phi - \frac{\nabla \Phi \otimes \nabla \Phi}{m-n} \quad (n < m \leq \infty).$$

特别地, 当 $m = \infty$, $\text{Ric}_{\Phi}^{\infty} := \text{Ric}_{\Phi} := \text{Ric} + \text{Hess}\Phi$ 是 Bakry-Émery^[5] 在研究扩散过程中所引入的经典的 Bakry-Émery Ricci 曲率 (参考文献 [6]). 这种曲率随后被广泛地应用到 Ricci 流的研究当中. 当 Φ 是常函数时, 规定此时对应 $m = \infty$.

*收稿日期: 2019-01-25

接收日期: 2019-04-18

作者简介: 侯标 (1994-), 男, 安徽亳州, 硕士, 研究方向: 微分几何与几何分析.

对于紧致无边的黎曼流形或者紧致带有凸边界的黎曼流形上加权 Laplace 的第一非零特征值问题, Bakry-Qian^[7] 得到了一个在流形 m -Bakry-Émery Ricci 曲率有下界情形下第一特征值的统一的下界. 受到最近关于 Ricci 孤立子和自收缩子研究的启发, 通过假定光滑度量测度空间 m -Bakry-Émery Ricci 曲率, 得到了许多关于加权 Laplace 算子的梯度估计和特征值估计的结果. 更多结果可以参考文献 [8–10] 以及它们的引用.

最近, 在假定流形积分 Ricci 曲率有界的条件, Wei^[11] 证明了一类紧致无边流形上 Laplace 算子的第一非零特征值的下界估计.

受到上述工作的启发, 我们考虑了在光滑度量测度空间 $(M, g, d\mu)$ 上, 当积分 Ricci 曲率有界时, 加权 Laplace 算子的第一非零特征值的估计问题. 通过运用 Bochner 公式和加权 Reilly 公式^[12], 我们首先得到了完备无边流形加权 Laplace 算子的第一非零特征值的下界估计.

定理 1 (Lichnerowicz-Obata 型估计) 令 $(M, g, d\mu)$ 为一个光滑度量测度空间, 其中 (M, g) 为 n 维完备无边的黎曼流形, $d\mu = e^{-\Phi} dv$, Φ 是流形 M 上的光滑函数. 对任意的 $q > \frac{n}{2}$ 以及 $K > 0$, 都存在 $\epsilon = \epsilon(n, q, K)$ 使得如果 $\|\text{Ric}_-^K\|_q^* < \epsilon$, 则加权 Laplace 的第一非零特征值 λ_1 满足

$$\lambda_1 \geq (1 - \frac{1}{2}C_\Phi)((n-1)K - 2\|\text{Ric}_-^K\|_q^*) - \frac{1}{2}C_\Phi, \quad (1.3)$$

其中 $C_\Phi = \max |\nabla \Phi|$, 这里要求 $C_\Phi < \frac{2((n-1)K - 2\|\text{Ric}_-^K\|_q^*)}{(n-1)K - 2\|\text{Ric}_-^K\|_q^* + 1}$.

推论 1 特别地, 当 $\text{Ric}_M \geq (n-1)K$, $\Phi = 0$, 有

$$\lambda_1 \geq (n-1)K.$$

这刚好是对应的流形上的 Lichnerowicz-Obata 型估计.

推论 2 当流形 M 上的函数 Φ 为常函数时, 此时对应的结果刚好是文献 [11] 在研究 p -Laplace 算子时 $p = 2$ 的情形.

我们还得到了度量测度空间在流形本身带有边界的情形. 为了定理的叙述, 还需要一些概念. 令 ν 表示 ∂M 的单位外法向量场, ∂M 的第二基本形式定义为 $II(X, Y) = \langle \nabla_X \nu, Y \rangle$ 对任意的 ∂M 的向量场 X 和 Y , 定义

$$H(x) = \text{tr}(II_x), \quad H_\Phi(x) = H(x) - \langle \nabla \Phi(x), \nu(x) \rangle \quad (1.4)$$

为在 $x \in M$ 上的平均曲率和加权平均曲率. 称 ∂M 是凸的如果第二基本形式 $II \geq 0$. 如果 $\partial M \neq \emptyset$, 假设 Dirichlet 边界条件 $u = 0$ 或者 Neumann 边界条件 $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$. 相应地, 分别用 λ_D 和 λ_N 表示加权 Laplace 第一非零 Dirichlet 特征值和第一非零 Neumann 特征值.

定理 2 令 $(M, g, d\mu)$ 为一个光滑度量测度空间, 其中 (M, g) 为 n 维紧致带边的黎曼流形, $d\mu = e^{-\Phi} dv$, Φ 是流形 M 上的光滑函数. 对任意的 $q > \frac{n}{2}$ 以及 $K > 0$, 都存在 $\epsilon = \epsilon(n, q, K)$ 使得如果 $\|\text{Ric}_-^K\|_q^* < \epsilon$ 以及

(1) 如果 ∂M 上的加权平均曲率 $H - \Phi_\nu$ 是非负的, 则第一非零 Dirichlet 特征值 λ_D 满足

$$\lambda_D \geq e^{-2s}((n-1)K - 2\|\text{Ric}_-^K\|_q^* - t),$$

这里需要 $|\Phi| \leq s$, s 是常数, $t = \max |\nabla^2 \Phi| < (n-1)K - 2\|\text{Ric}_-^K\|_q^*$.

(2) 如果 ∂M 是凸的, 也就是说, 第二基本形式 (定义为 $h(X, Y) = g(\nabla_X v, Y)$) 是非负的, 则第一非零 Neumann 特征值 λ_N 满足

$$\lambda_N \geq e^{-2s}((n-1)K - 2\|\text{Ric}_-^K\|_q^* - t),$$

这里要求 $|\Phi| \leq s$, s 是常数, $t = \max |\nabla^2 \Phi| < (n-1)K - 2\|\text{Ric}_-^K\|_q^*$.

同时, 由于带边流形上也有 Rielly 公式, 自然可以考虑到超曲面情形. 通过定义, M 上的一个极小的 Φ -超曲面 P 是指一个超曲面 P 满足 $H - \Phi_\nu = 0$, 其中 ν 是定义在 P 上第二基本形式的单位外法向量. 用 Δ_P 表示 P 内度量的 Laplace 算子, Δ_Φ^P 表示 P 内度量的加权 Laplace 算子, 那么得到

定理 3 (Choi-Wang 型估计) 令 $(M, g, d\mu)$ 为一个光滑度量测度空间, 其中 (M, g) 为 n 维闭的可定向的黎曼流形, $d\mu = e^{-\Phi} dv$, Φ 是流形 M 上的光滑函数. 令 $P \subset M$ 为一个嵌入的极小 Φ -超曲面把 M 分成 2 个子流形 M_1 和 M_2 (i.e., $H = \Phi_\nu$, 这个等式不依赖于单位法向 ν). 对任意 $q > \frac{n}{2}$ 以及 $K > 0$, 都存在 $\epsilon_1 = \epsilon_1(n, q, K)$ 和 $\epsilon_2 = \epsilon_2(n, q, K)$ 使得 M_1, M_2 满足如果 $\|\text{Ric}_-^K\|_{q, M_1}^* < \epsilon_1$, $\|\text{Ric}_-^K\|_{q, M_2}^* < \epsilon_2$, 则对于加权 Laplace $\Delta_\Phi^P = \Delta_P - \nabla_P \Phi \cdot \nabla_P$, 在 P 上的第一非零特征值 λ_1 满足

$$\lambda_1(\Delta_\Phi^P) \geq \frac{(n-1)K - 2\epsilon_0 - t}{2},$$

其中 $t = \max |\nabla^2 \Phi| < (n-1)K - 2\epsilon_0$, $\epsilon_0 = \max(\epsilon_1, \epsilon_2)$.

推论 3 当取 Φ 为常函数以及时 $\|\text{Ric}_-^K\|_{q, M_1}^* = 0$, $\|\text{Ric}_-^K\|_{q, M_2}^* = 0$ 时, 这个就是对经典的 Choi-Wang 的结果.

推论 4 这个也是对 Li-Sheng 等人工作的推广, 详细可参考文献 [12].

2 预备知识

我们准备介绍一下积分曲率条件. 对每一个 $x \in M^n$, 让 $\rho(x)$ 表示 Ric 张量的最小的特征值 $\text{Ric} : T_x M \rightarrow T_x M$. 令

$$\text{Ric}_-^K(x) = ((n-1)K - \rho(x))_+ = \max\{0, (n-1)K - \rho(x)\}, \quad (2.1)$$

$$\|\text{Ric}_-^K\|_{q, R} = \sup_{x \in M} \left(\int_{B(x, R)} (\text{Ric}_-^K)^q d\text{vol} \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (2.2)$$

则 $\|\text{Ric}_-^K\|_{q, R}$ 可以用来表示流形本身 Ricci 曲率有下界, 比如 $(n-1)K$. 显然在 L^q 范数意义下,

$$\|\text{Ric}_-^K\|_{q, R} = 0 \iff \text{Ric}_M \geq (n-1)K, \quad (2.3)$$

用 $\|\text{Ric}_-^K\|_q$ 表示 $R \rightarrow \infty$, 则 $\|\text{Ric}_-^K\|_q$ 可以表示为流形整体上的一个不变量. 对于流形上的基本工具, 拉普拉斯比较定理和体积比较定理也就自然而然地可以推广到这种积分曲率条件下 (见文献 [11]). 用 $\|f\|_{q, \Omega}^*$ 表示为区域 Ω 上的 L^q 平均范数, 定义

$$\|f\|_{q, \Omega}^* = \left(\frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_{\Omega} |f|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (2.4)$$

3 定理证明

首先给出一个引理.

引理 1 给定任意的 $q > \frac{n}{2}$ 以及 $K > 0$, 都存在一个 $\epsilon = \epsilon(n, q, K)$ 使得 M^n 是一个完备黎曼流形满足 $\|\text{Ric}_-^K\|_q^* < \epsilon$, 则存在一个依赖于 n, q, K 常数 $C_s(n, q, K)$ 使得

$$\int_M \text{Ric}(\nabla u, \nabla u) dv \geq ((n-1)K - 2\|\text{Ric}_-^K\|_q^*) \int_M |\nabla u|^2 dv - C_s \|\text{Ric}_-^K\|_q^* \int_M |\nabla |\nabla u||^2 dv, \quad (3.1)$$

对所有的函数 $u \in W^{1,2}$.

为了引理证明, 需要给出 2 个命题.

命题 1 (Aubty 直径估计^[13]) 令 (M^n, g) 为 n 维的完备黎曼流形以及 $p > \frac{n}{2}$. 如果存在一个 $C(p, n)$ 使得 $\|\text{Ric}_-^K\|_p^* \leq (\frac{1}{C(p, n)})^{\frac{1}{p}}$, 其中 $C(p, n)$ 表示仅依赖于 p 和 n 的常数, 则流形 M 是紧致的且有

$$\text{Diam}(M, g) \leq \pi[1 + C(p, n)(\|\text{Ric}_-^K\|_p^*)^{\frac{p}{p-2}}].$$

注 1 这个命题不仅告诉只要积分 Ricci 曲率有界, 就一定能保证流形 M 本身是紧致的. 更为重要的是, 它给出了在积分 Ricci 条件下流形本身的直径与曲率的关系, 建立了流形上拓扑性质与几何条件的联系.

命题 2 (Gallot 等周常数估计^[14]) 给定 $q > \frac{n}{2}$ 和 $K > 0$, 存在一个 $\epsilon = \epsilon(n, q, K)$ 使得如果 M^n 是一个带有积分曲率 $\|\text{Ric}_-^K\|_q^* < \epsilon$ 的完备黎曼流形, 则存在一个依赖于 n, q, K 的常数 $C_s(n, q, K)$ 使得

$$(\int_M |u|^{\frac{2q}{q-1}} dv)^{\frac{q-1}{q}} \leq C_s(n, q, K) \int_M |\nabla u|^2 dv + 2 \int_M |u|^2 dv, \quad (3.2)$$

对任意的函数 $u \in W^{1,2}$.

证 由式 (2.1), 得到

$$\begin{aligned} \int_M \text{Ric}(\nabla u, \nabla u) dv &\geq (n-1)K \int_M |\nabla u|^2 dv - \int_M |\text{Ric}_-^K| |\nabla u|^2 dv \\ &\geq (n-1)K \int_M |\nabla u|^2 dv - \|\text{Ric}_-^K\|_q^* (\int_M |\nabla u|^{\frac{2q}{q-1}} dv)^{\frac{q-1}{q}}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

对函数 $|\nabla u|$ 应用命题 2 得到

$$(\int_M |\nabla u|^{\frac{2q}{q-1}} dv)^{\frac{q-1}{q}} \leq C_s(n, q, K) \int_M |\nabla |\nabla u||^2 dv + 2 \int_M |\nabla u|^2 dv.$$

把上述所有加到式 (3.3), 就得到了这个结果.

进一步, 可以得到以下引理.

引理 2 给定任意的 $q > \frac{n}{2}$ 以及 $K > 0$, 都存在一个 $\epsilon = \epsilon(n, q, K)$ 使得 M^n 是一个完备黎曼流形满足 $\|\text{Ric}_-^K\|_q^* < \epsilon$, 那么

$$\int_M (\text{Ric}(\nabla u, \nabla u) + |\nabla^2 u|) dv \geq ((n-1)K - 2\|\text{Ric}_-^K\|_q^*) \int_M |\nabla u|^2 dv, \quad (3.4)$$

对所有的函数 $u \in W^{1,2}$.

证 由 Kato 不等式, 有 $|\nabla^2 u|^2 \geq |\nabla|\nabla u||^2$. 引用引理 1, 得到

$$\begin{aligned} \int_M (\text{Ric}(\nabla u, \nabla u) + |\nabla^2 u|) dv &\geq ((n-1)K - 2\|\text{Ric}_-^K\|_q^*) \int_M |\nabla u|^2 dv \\ &\quad + (1 - C_s \|\text{Ric}_-^K\|_q^*) \int_M |\nabla|\nabla u||^2 dv. \end{aligned}$$

可以选择 $\|\text{Ric}_-^K\|_q^*$ 充分小使得 $(1 - C_s \|\text{Ric}_-^K\|_q^*) \geq 0$, 那么可以扔掉后面项, 得到了引理 2.

现在可以完成对定理 1 的证明.

证 由 Bochner 公式, $\frac{1}{2}\Delta|\nabla u|^2 = g(\nabla\Delta u, \nabla u) + |\nabla^2 u|^2 + \text{Ric}(\nabla u, \nabla u)$. 由命题 1, 流形 M 是闭的. 在流形 M 上积分, 得到了

$$0 = \int_M \frac{1}{2}\Delta|\nabla u|^2 dv = \int_M g(\nabla\Delta u, \nabla u) + |\nabla^2 u|^2 + \text{Ric}(\nabla u, \nabla u) dv,$$

由格林公式, $\int_M g(\nabla\Delta u, \nabla u) dv = -\int_M (\Delta u)^2 dv$. 应用引理 1, 引理 2, 得到

$$0 \geq -\int_M (\Delta u)^2 dv + ((n-1)K - 2\|\text{Ric}_-^K\|_q^*) \int_M |\nabla u|^2 dv. \quad (3.5)$$

关于 $\int_M (\Delta u)^2$ 这项, 采取

$$\begin{aligned} \int_M (\Delta u)^2 dv &= \int_M (\Delta u)(\Delta_\Phi u + \nabla\Phi \cdot \nabla u) dv \\ &\leq \int_M \Delta u \cdot \Delta_\Phi u dv + \int_M |\nabla\Phi| |\Delta u| |\nabla u| dv \\ &\leq \int_M \Delta u \cdot \Delta_\Phi u dv + C_\Phi \int_M |\Delta u| |\nabla u| dv, \end{aligned}$$

其中 C_Φ 表示 $|\nabla\Phi|$ 在流形 M 上的最大值,

$$\int_M |\Delta u| |\nabla u| dv \leq \left(\int_M |\Delta u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} dv \leq \frac{1}{2} \int_M |\Delta u|^2 dv + \frac{1}{2} \int_M |\nabla u|^2 dv.$$

除此之外, $\int_M \Delta u \cdot \Delta_\Phi u dv = \int_M \Delta u \cdot (-\lambda u) dv = \lambda \int_M |\nabla u|^2 dv$. 从而得到

$$\int_M (\Delta u)^2 dv \leq \lambda \int_M |\nabla u|^2 dv + \frac{1}{2} C_\Phi \int_M |\Delta u|^2 dv + \frac{1}{2} C_\Phi \int_M |\nabla u|^2 dv,$$

这里应用了定理假设 $C_\Phi < \frac{2((n-1)K - 2\|\text{Ric}_-^K\|_q^*)}{(n-1)K - 2\|\text{Ric}_-^K\|_q^* + 1} < 2$, 从而

$$(1 - \frac{1}{2}C_\Phi) \int_M (\Delta u)^2 dv \leq (\lambda + \frac{1}{2}C_\Phi) \int_M |\nabla u|^2 dv,$$

也就是

$$\int_M (\Delta u)^2 dv \leq (1 - \frac{1}{2}C_\Phi)^{-1} (\lambda + \frac{1}{2}C_\Phi) \int_M |\nabla u|^2 dv.$$

把所有式子带入到式 (3.5), 可以得到

$$0 \geq -(1 - \frac{1}{2}C_\Phi)^{-1}(\lambda + \frac{1}{2}C_\Phi) \int_M |\nabla u|^2 dv + ((n-1)K - 2\|\text{Ric}_-^K\|_q^*) \int_M |\nabla u|^2 dv. \quad (3.6)$$

故

$$0 \geq -(1 - \frac{1}{2}C_\Phi)^{-1}(\lambda + \frac{1}{2}C_\Phi) + ((n-1)K - 2\|\text{Ric}_-^K\|_q^*).$$

因此

$$\lambda \geq (1 - \frac{1}{2}C_\Phi)((n-1)K - 2\|\text{Ric}_-^K\|_q^*) - \frac{1}{2}C_\Phi.$$

从而完成了这个证明.

接着给出定理 2 的证明, 这里先给出加权 Laplace 算子的 Reilly 公式.

命题 3 (见文献 [12])

$$\begin{aligned} \int_M ((\Delta_\Phi u)^2 - |\nabla^2 u|^2) dv &= \int_M (\text{Ric} + \nabla^2 \Phi)(\nabla u, \nabla u) dv \\ &+ \int_{\partial M} ((Hu_v - \nabla u \nabla \Phi + \Delta_\partial u)u_v) dv \\ &+ \int_{\partial M} (II(\nabla_\partial u, \nabla_\partial u) - \langle \nabla_\partial u, \nabla_\partial u_v \rangle) dv, \end{aligned}$$

其中符号 ∂ 表示 ∂M 取内度量时的算子.

定理 2 的证明 注意到不管对 Dirichlet 边界条件还是 Neumann 边界条件, 都有

$$\begin{aligned} &\int_{\partial M} ((Hu_v - \nabla u \nabla \Phi + \Delta_\partial u)u_v) dv + \int_{\partial M} (II(\nabla_\partial u, \nabla_\partial u) - \langle \nabla_\partial u, \nabla_\partial u_v \rangle) dv \\ &= \int_{\partial M} ((Hu_n^2 - \Phi_n u_n^2)) dv + \int_{\partial M} II(\nabla_\partial u, \nabla_\partial u) dv \geq 0. \end{aligned}$$

在最后一步计算中, 应用了对 ∂M 的假设. 因此有

$$\int_M (\Delta_\Phi u)^2 - |\nabla^2 u|^2 dv - \int_M (\text{Ric} + \nabla^2 \Phi)(\nabla u, \nabla u) dv \geq 0.$$

可以对等式两边同时取平均,

$$\int_M (\Delta_\Phi u)^2 - |\nabla^2 u|^2 - (\text{Ric} + \nabla^2 \Phi)(\nabla u, \nabla u) dv \geq 0,$$

然后应用引理 2, 得到

$$\lambda^2 \int_M u^2 dv \geq ((n-1)K - 2\|\text{Ric}_-^K\|_q^*) \int_M |\nabla u|^2 dv - t \int_M |\nabla u|^2 dv. \quad (3.7)$$

由假设, 得到

$$e^{-s} \lambda \int_M u^2 dv \leq \lambda \int_M u^2 e^{-\Phi} dv = \int_M (\nabla u)^2 e^{-\Phi} dv \leq e^s \int_M (\nabla u)^2 dv.$$

这也就是

$$\lambda \int_M u^2 dv \leq e^{2s} \int_M (\nabla u)^2 dv.$$

把上述式子加到式 (3.7), 得到了

$$\lambda \geq e^{-2s}((n-1)K - 2\|\text{Ric}_-^K\|_q^* - t).$$

证毕.

定理 3 的证明 不妨假定 $\Delta_\Phi^p u + \lambda u = 0$. 不失一般性, 可以假设 $\int_{\partial M_1} \Phi(\nabla_p u, \nabla_p u) dv \geq 0$. 定义 f 为 M_1 上的函数满足在 M 上, $\Delta_\Phi f = 0$. 带有边值条件在 ∂M_1 上 $f = u$. 由命题 3 有

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{M_1} (-2|\nabla^2 f|^2) dv = \int_{M_1} (\text{Ric} + \nabla^2 \Phi)(\nabla f, \nabla f) dv + \int_{M_1} |\nabla^2 f|^2 dv \\ &\quad + \int_{\partial M_1} (H f_n - \nabla f \nabla \Phi + \Delta_p u) f_n dv + \int_{\partial M_1} (-\langle \nabla_p f, \nabla_p f_v \rangle) dv. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} \int_{\partial M_1} (H f_n - \nabla f \nabla \Phi + \Delta_p u) f_n dv &= \int_{\partial M_1} (H - \Phi_n) f_n - \nabla_p f \nabla_p \Phi + \Delta_p u) f_n dv \\ &= - \int_{\partial M_1} ((\nabla_v \Phi - H) \nabla_n f + \lambda u) f_n dv \\ &= -\lambda \int_{\partial M_1} u f_n dv, \end{aligned}$$

以及

$$\int_{\partial M_1} (-\langle \nabla_p f, \nabla_p f_v \rangle) dv = \int_{\partial M_1} (\Delta_\Phi^p u) f_n dv = -\lambda \int_{\partial M_1} u f_n dv.$$

通过计算

$$2 \int_{\partial M_1} u f_n dv = \int_{\partial M_1} (f^2)_n dv = \int_{M_1} \Delta_\Phi(f^2) dv = 2 \int_{M_1} |\nabla f|^2 dv,$$

因此有

$$0 \geq \int_{M_1} (\text{Ric} + \nabla^2 \Phi)(\nabla f, \nabla f) dv + \int_{M_1} |\nabla^2 f|^2 dv - 2\lambda \int_{M_1} |\nabla f|^2 dv.$$

也即

$$0 \geq \int_{M_1} (\text{Ric} + \nabla^2 \Phi)(\nabla f, \nabla f) dv + \int_{M_1} |\nabla^2 f|^2 dv - 2\lambda \int_{M_1} |\nabla f|^2 dv.$$

应用引理 2, 得到

$$0 \geq ((n-1)K - 2\|\text{Ric}_-^K\|_{q, M_1}^*) \int_{M_1} |\nabla f|^2 dv - t \int_{M_1} |\nabla f|^2 dv - 2\lambda \int_{M_1} |\nabla f|^2 dv.$$

利用定理中的假设,

$$\lambda \geq \frac{(n-1)K - 2\epsilon_0 - t}{2}.$$

从而完成了证明.

参 考 文 献

- [1] Lichnerowicz A. Géométrie des groupes de transformations [M]. Paris: Travaux et Recherches Mathé-Matiques, 1958.
- [2] Li P, Yau Shingtung. Estimates of eigenvalues of a compact Riemannian manifold[J]. Proc. Sympos. Pure Math., 1980, 36: 205–239.
- [3] Zhong Jiaqing, Yang Hongcang. On the estimate of the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold[J]. Sci. Sinica Ser. A, 1984, 27(12): 1265–1273.
- [4] Yang Hongcang. An estimate of the first eigenvalue on Riemannian manifolds with Robin boundary value conditions[J]. Acta Math. Sinica (Chin. Ser.), 2003, 46(5): 843–850.
- [5] Bakry D, Émery M. Diffusions hypercontractives[R]. Berlin: Springer, 1985.
- [6] Bakry D, Gentil I, Ledoux M. Analysis and geometry of markov diffusion operators [M]. Cham: Springer, 2014.
- [7] Bakry D, Qian Zhongmin. Some new results on eigenvectors via dimension, diameter, and Ricci curvature[J]. Adv. Math., 2000, 155(1): 98–153.
- [8] Li Xiangdong. Liouville theorems for symmetric diffusion operators on complete Riemannian manifolds[J]. J. Math. Pures Appl., 2005, 84(10): 1295–1361.
- [9] Munteanu O, Wang Jiaping. Smooth metric measure spaces with non-negative curvature[J]. Comm. Anal. Geom., 2011, 19(3): 451–486.
- [10] Wang Yuzhao, Li Huaqian. Lower bound estimates for the first eigenvalue of the weighted p -Laplacian on smooth metric measure spaces[J]. Differential Geom. Appl., 2016, 45: 23–42.
- [11] Seto S, Wei Guofang. First eigenvalue of the p -Laplacian under integral curvature condition[J]. Nonlinear Anal., 2017, 163: 60–70.
- [12] Ma Li, Du Shenghua. Extension of Reilly formula with applications to eigenvalue estimates for drifting Laplacians[J]. C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 2010, 348(21–22): 1203–1206.
- [13] Aubry E. Finiteness of π_1 and geometric inequalities in almost positive Ricci curvature[J]. Ann. Sci. École Norm. Sup., 2007, 40(4): 675–695.
- [14] Gallot S. Isoperimetric inequalities based on integral norms of Ricci curvature[J]. Astérisque, 1988, 157(58): 191–216.

AN EIGENVALUE ESTIMATE ABOUT THE WEIGHTED LAPLACE UNDER THE INTEGRAL RICCI CURVATURE CONDITION

HOU Biao

(School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

Abstract: In this paper, the first eigenvalue estimation of the weighted Laplace operator under the integral Ricci curvature is studied. By means of Bochner formula and weighted Reilly formula, the estimation of the lower bound of the first eigenvalue estimation of weighted Laplace under the Ricci curvature condition are obtained.

Keywords: integral Ricci curvature; the first eigenvalue; weighted Laplace

2010 MR Subject Classification: 53C21; 53C23