Vol. 39 ( 2019 ) No. 4

# 单参数 Chen 系统的部分状态线性化同步

#### 李德奎

(甘肃中医药大学理科教学部,甘肃 定西 743000)

摘要: 本文研究了单参数 Chen 系统的部分状态线性化同步问题. 利用反馈线性化以及对线性化系统的误差分析, 发现仅对响应系统的第二个状态变量实施控制, 就能实现单参数 Chen 系统的全部状态同步, 最后数值仿真表明理论分析的正确性和同步控制器的有效性.

关键词: 相对阶; 部分状态线性化; 单参数 Chen 系统; 同步

MR(2010) 主题分类号: 36D06; 34C28 中图分类号: O231.2 文献标识码: A 文章编号: 0255-7797(2019)04-0601-08

## 1 引言

1990 年, Pecora 和 Carroll 首次提出了混沌同步概念并实现了混沌系统的同步 [1], 为混沌同步的理论研究及应用奠定了基础. 近年来, 混沌同步得到许多学者的广泛研究, 并提出了许多混沌同步方法 [2-5]. 理论上能够实现混沌系统的各种同步, 如完全同步、投影同步、相同步等. 大多数混沌系统同步就要对其全部状态变量施加较复杂的线性或非线性控制器 [6-8], 实际应用中混沌同步是较难实现的, 主要原因是混沌系统的内随机性和外部不确定因素的干扰, 同时系统内部的不确定性和系统的状态变量较多, 对其全部状态变量实施控制是不现实的.

为此,设置最简单的控制器,控制尽可能少的系统状态变量,实现混沌系统的全部状态变量同步是混沌同步研究的不懈的追求. 刘洪娟等人研究了参数未知的统一混沌系统中的混合同步现象 <sup>[9]</sup>,仅通过对一个变量实施线性反馈控制,实现了统一混沌系统同步. 然而线性反馈控制要测试反馈增益系数的大小,反馈系数过大或过小都会影响系统的同步. 文献 [10] 基于反馈线性化方法对 Rösler 混沌系统的一个变量实施控制,将混沌系统转化为一个线性系统.

文献 [11] 提出的单参数 Chen 系统, 该系统结构形式简单, 且只含有一个系统参数, 同时当唯一的参数 a=8 时, 系统正的 Lyapunov 指数为 2.475. 因此该系统具有较强的混沌特性, 同时电路实现容易, 在保密通信领域具有潜在的应用价值.

基于以上讨论,本文根据非线性系统相对阶的概念和 Lie 导数运算方法,应用反馈线性化策略,对单参数 Chen 系统进行部分状态线性化,同时设计控制器仅对响应系统的一个变量实施控制,实现单参数 Chen 系统的同步.

## 2 非线性系统反馈线性化的条件

\*收稿日期: 2018-10-22 接收日期:2018-12-29

基金项目: 甘肃省自然科学基金项目 (1610RJZA080); 甘肃省高等学校科研项目 (2017A-155). **作者简介:** 李德奎 (1979-), 男, 甘肃通渭, 副教授, 研究方向: 混沌及复杂网络的同步与控制.

考虑一个受控的 n 维输入输出系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u, \\ y = h(x), \end{cases}$$
 (2.1)

式中  $x = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$  为系统的状态变量;  $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$  和  $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$  为光滑向量场,  $u \in \mathbb{R}^1$  为系统的控制输入;  $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$  为光滑的输出函数.

系统 (2.1) 的反馈线性化问题是寻找坐标变换  $z = \phi(x)$  和控制器  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ , 将系统 (2.1) 变为线性系统  $\dot{z} = Az + Bv$ , 其中 v 为变换后的系统控制输入. 为了给出系统 (2.1) 的线性化条件. 下面首先介绍相对阶的概念.

定义 1 设  $x_0 \in X$ , 如果存在  $x_0$  的邻域 V 和  $r \in Z^+$ , 使得系统 (2.1) 满足下列条件

那么称系统 (2.1) 在点  $x_0$  具有相对阶 r, 其中  $L_f h(x) = \nabla h f$  为函数 h(x) 对 f(x) 的 Lie 导数, Lie 导数  $L_f h(x)$  是 h(x) 沿着向量 f 方向的方向导数且有

$$\mathcal{L}_f^{i+1}h(x) = \mathcal{L}_f^i(\mathcal{L}_f h(x)) = \mathcal{L}_f(\mathcal{L}_f^i h(x)). \tag{2.3}$$

对系统 (2.1) 的输出 y 求导, 并根据 (2.2) 式, 得出相对阶 r 与输入量 u 的关系为

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{\partial h}{\partial x}(f + gu) = L_f h + L_g h u = L_f h, \\ y''(t) = L_f^2 h + L_g L_f h u = L_f^2 h, \\ y'''(t) = L_f^3 h + L_g L_f^2 h u = L_f^3 h, \\ \vdots \\ y^{(r-1)}(t) = L_f^{r-1} h + L_g L_f^{r-2} h u = L_f^{r-1} h, \\ y^r(t) = L_f^r h + L_g L_f^{r-1} h u. \end{cases}$$

$$(2.4)$$

由 (2.4) 式表明, 如果系统 (2.1) 具有相对阶 r, 则系统输出的小于 r 阶的导数与输入 u 无关, 只有系统输出的 r 阶导数与输入 u 有关. 若系统 (2.1) 没有相对阶, 则  $L_gL_f^ih=0$  (i>0), 即系统的输出与输入 u 无关.

不是所有的系统都可进行线性化,可线性化的系统需要满足一定的条件,下面给出系统 (2.1) 可线性化的一个充分必要条件.

**定理 1** n 维非线性系统  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  可线性化的充分必要条件是存在一个光滑函数 h(x), 使得系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u, \\ y = h(x) \end{cases}$$
 (2.5)

在  $x_0$  点具有相对阶 n.

定理 1 给出了系统 (2.1) 可线性化的充分必要条件, 定理 1 的证明较复杂, 这里不再叙述, 证明过程见文献 [11]. 如果定理 1 的条件被满足, 则存在坐标变换

$$\mathbf{z} = \Phi(x) = [h(x), L_f h(x), L_f^2 h(x), \cdots, L_f^{n-1} h(x)]^{\mathrm{T}}$$
 (2.6)

和系统的控制输入

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, \tag{2.7}$$

其中 v 是新的输入

$$\alpha(x) = -\frac{L_f^n h(x)}{L_g L_f^{n-1} h(x)}, \quad \beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)}.$$
 (2.8)

将系统 (2.1) 变为线性系统

$$\dot{z} = Az + Bv. \tag{2.9}$$

## 3 单参数 Chen 系统的反馈线性化

单参数 Chen 系统 [12] 的动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{x_1} = 35(x_2 - x_1), \\ \dot{x_2} = -ax_1 - x_1x_3 + (35 - a)x_2, \\ \dot{x_3} = x_1x_2 - 3x_3, \end{cases}$$
(3.1)

其中  $x_1, x_2, x_3$  为状态变量, a 是系统参数. 当 a = 32 时, 系统 (3.1) 就演变成了 Chen 混沌系统; 当参数 a = 8 时, 由 Kaplan-Yorke 猜想公式, 计算出系统 (3.1) 的维数 D = 2.18, 说明系统 (3.1) 具有分数维. 此时系统 (3.1) 的 Lyapunov 指数为  $\lambda_1 = -13.23, \lambda_2 = -10, \lambda_3 = 2.22$ . 说明当参数 a = 8 时, 系统 (3.1) 处于混沌状态, 具有如图 1 所示的奇怪吸引子.

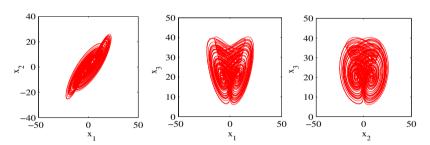


图 1: 单参数 Chen 混沌系统的奇怪吸引子

将系统 (3.1) 看作是驱动系统, 受控的响应系统描述为

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = f(\hat{\mathbf{x}}) + g(\hat{\mathbf{x}})u = \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35(\hat{x}_2 - \hat{x}_1) \\ -a\hat{x}_1 - \hat{x}_1\hat{x}_3 + (35 - a)\hat{x}_2 \\ \hat{x}_1\hat{x}_2 - 3\hat{x}_3 \end{bmatrix} + g(\hat{\mathbf{x}})u.$$
(3.2)

若取  $h(\hat{x}) = \hat{x}_1, g(\hat{\mathbf{x}}) = [0, 0, 1]^{\mathrm{T}}$  时,

$$\begin{cases} L_g h = \nabla h \cdot g = 0, \\ L_f h = \nabla h \cdot f = 35(\hat{x}_2 - \hat{x}_1), \\ L_g L_f h = \nabla L_f h \cdot g = 0, \\ L_f^2 h = \nabla L_f h \cdot f = 35[-a\hat{x}_1 - \hat{x}_1\hat{x}_3 + (35 - a)\hat{x}_2] - 35[35(\hat{x}_2 - \hat{x}_1)], \\ L_g L_f^2 h = \nabla L_f^2 h \cdot g = -35\hat{x}_1. \end{cases}$$
(3.3)

在  $\hat{x}_1 = 0$  处,  $L_g L_f^2 h = \nabla L_f^2 h \cdot g = -35 \hat{x}_1 = 0$ , 说明响应系统 (3.2) 的相对阶不为 3, 从而不能实现响应系统 (3.2) 的全部状态线性化.

若取  $h(\hat{x}) = \hat{x}_1, g(\hat{\mathbf{x}}) = [0, 1, 0]^{\mathrm{T}}$  时,

$$\begin{cases}
L_g h = \nabla h \cdot g = 0, \\
L_f h = \nabla h \cdot f = 35(\hat{x}_2 - \hat{x}_1), \\
L_g L_f h = \nabla L_f h \cdot g = 35 \neq 0, \\
L_f^2 h = \nabla L_f h \cdot f = -35[35(\hat{x}_2 - \hat{x}_1)] + 35[-a\hat{x}_1 - \hat{x}_1\hat{x}_3 + (35 - a)\hat{x}_2].
\end{cases}$$
(3.4)

根据系统相对阶的定义和响应系统 (3.2) 的各阶 Lie 导数 (3.4) 可以看出, 响应系统 (3.2) 的相对阶为 r=2. 根据 (2.6) 式, 得到响应系统 (3.2) 的坐标变换为

$$\begin{cases} \hat{z}_1 = \hat{x}_1, \\ \hat{z}_2 = 35(\hat{x}_2 - \hat{x}_1). \end{cases}$$
 (3.5)

将响应系统 (3.2) 部分状态线性化为

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_1 = \hat{z}_2, \\ \dot{\hat{z}}_2 = L_f^2 h + L_g L_f h u. \end{cases}$$
 (3.6)

下面相应地对驱动系统 (3.1) 进行线性化, 取  $z_1 = x_1 = \lambda(x)$ , 则有

$$\begin{cases} \lambda'(x) = 35(x_2 - x_1), \\ \lambda''(x) = -35(35x_2 - 35x_1) + 35[-ax_1 - x_1x_3 + (35 - a)x_2]. \end{cases}$$
(3.7)

驱动系统 (3.1) 通过坐标变换

$$\begin{cases}
z_1 = x_1, \\
z_2 = 35(x_2 - x_1).
\end{cases}$$
(3.8)

可转化为下列形式

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = \lambda''(x). \end{cases}$$
(3.9)

#### 4 单参数 Chen 系统的同步

设驱动系统 (3.1) 和响应系统 (3.2) 的同步误差为

$$e_i = \hat{x}_i - x_i \quad (i = 1, 2, 3).$$
 (4.1)

设驱动系统的线性化系统 (3.9) 和响应系统的线性化系统 (3.6) 的误差为

$$\hat{e}_i = \hat{z}_i - z_i \quad (i = 1, 2). \tag{4.2}$$

同步误差项量为  $\hat{\mathbf{e}} = (\hat{e}_1, \hat{e}_2)^{\mathrm{T}}$ . 考虑同步控制器

$$u = \frac{1}{L_g L_f h} [\lambda''(x) - L_f^2 h - \mathbf{K}\hat{\mathbf{e}}], \tag{4.3}$$

其中  $\mathbf{K} = (k_1, k_2)$  的选取使得多项式  $P_3(s) = s^2 + k_2 s + k_1$  是 Hurwitz 稳定的.

**定理 2** 在控制器 (4.3) 的控制作用下, 驱动系统 (3.1) 和受控的响应系统 (3.2) 能够实现同步.

证 根据 (4.2) 式, 坐标变换后的误差系统为

$$\begin{cases} \dot{\hat{e}}_1 = \dot{\hat{z}}_1 - \dot{z}_1, \\ \dot{\hat{e}}_2 = \dot{\hat{z}}_2 - \dot{z}_2. \end{cases}$$
(4.4)

将 (3.6) 式和 (3.9) 式代入 (4.4) 式可得

$$\begin{cases} \dot{\hat{e}}_1 = \hat{e}_2, \\ \dot{\hat{e}}_2 = L_f^2 h + L_g L_f h u - \lambda''(x). \end{cases}$$
(4.5)

将 (4.3) 式和 (4.5) 式得

$$\begin{cases} \dot{\hat{e}}_1 = \hat{e}_2, \\ \dot{\hat{e}}_2 = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{e}}, \end{cases} \tag{4.6}$$

其中  $\dot{\hat{e}}_2 = -k_1\hat{e}_1 - k_2\hat{e}_2 = -k_1\hat{e}_1 - k_2\dot{\hat{e}}_1$ . 根据 Hurwitz 稳定性定理, 当  $k_1k_2 > 0$  时, 方程  $k_2y + k_1 = 0$  的所有根具有负实部. 微分方程  $k_1\hat{e}_1 + k_2\dot{\hat{e}}_1 = 0$  的解为  $\hat{e}_1 = e^{-\frac{k_1}{k_2}t} \to 0$   $(t \to \infty)$ . 根据 (4.6) 式,  $\hat{e}_1 \to 0$  时,  $\hat{e}_2 \to 0$ . 即误差系统 (4.6) 是渐近稳定的, 即  $\lim_{} \|\hat{\mathbf{e}}(t)\|$ .

将 (3.5) 式和 (3.8) 式代入同步误差 (4.1) 式和 (4.2) 式可得

$$\begin{cases} \hat{e}_1 = e_1, \\ \hat{e}_2 = 35e_2 - 35e_1. \end{cases}$$
(4.7)

因为存在 **K** 使得  $\lim_{t\to\infty}\|\hat{\mathbf{e}}(t)\|=0$ ,所以根据 (4.7) 式,当  $t\to\infty$  时, $e_1\to0$ , $e_2\to0$ .用 (3.2) 式减去 (3.1) 式可得

$$\dot{e}_3 = \hat{x}_1 \hat{x}_2 - x_1 x_2 - 3e_3. \tag{4.8}$$

当  $e_1 \to 0$ 、 $e_2 \to 0$  时,有  $\hat{x}_1 \to x_1, \hat{x}_2 \to x_2$ ,从而  $e_3 = e^{-3t} \to 0$ .综上可得,当  $t \to \infty$  时,  $e_i \to 0$  (i = 1, 2, 3),从而在控制器 (4.3) 作用下,驱动系统 (3.1) 和响应系统 (3.2) 实现全部状态完全同步.

#### 5数值仿真

取参数 a=8,此时系统 (3.1) 处于混沌运动状态,取  $\mathbf{K}=[4,4]$ ,初值条件分别为  $[x_1(0),x_2(0),x_3(0)]=[10,-0.2,0.1]$  和  $[\hat{x}_1(0),\hat{x}_2(0),\hat{x}_3(0)]=[12,2,5]$ . 同步控制器 (4.3) 重写为

$$u = \frac{1}{L_g L_f h} [\lambda''(x) - L_f^2 h(\hat{x}) - \mathbf{K}\hat{\mathbf{e}}]$$

$$= -(35x_2 - 35x_1) + [-8x_1 - x_1x_3 + 27x_2] + [35(\hat{x}_2 - \hat{x}_1)]$$

$$-(-8\hat{x}_1 - \hat{x}_1\hat{x}_3 + 27\hat{x}_2) - \frac{4}{35}(\hat{x}_1 - x_1) - 4[(\hat{x}_2 - x_2) - (\hat{x}_1 - x_1)].$$
(5.1)

采用四阶龙格 – 库塔方法, 用控制器 (5.1) 控制响应系统 (3.2) 的第二个状态变量, 所得驱动系统 (3.1) 和响应系统 (3.2) 的同步误差  $e_i = \hat{x}_i - x_i$  (i = 1, 2, 3) 曲线如图 2 所示.

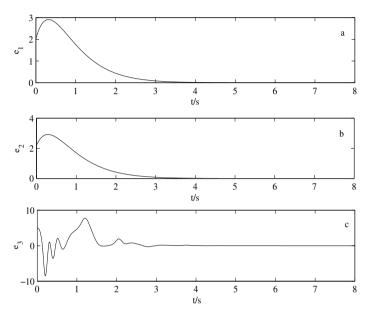


图 2:驱动系统 (3.1) 和受控响应系统 (3.2) 同步误差曲线图

由图 2 可知, 驱动系统 (3.1) 和受控响应系统 (3.2) 的同步误差  $e_i$  (i=1,2,3) 都快速趋向 0, 说明利用控制器 (5.1) 仅对响应系统的第二个状态变量实施控制, 驱动系统 (3.1) 和受控响应系统 (3.2) 就能快速实现全部状态同步.

在不同初值条件  $[x_1(0), x_2(0), x_3(0)] = [10, -0.2, 0.1]$  和  $[\hat{x}_1(0), \hat{x}_2(0), \hat{x}_3(0)] = [12, 2, 5]$  下, 在同一坐标系中做出驱动系统 (3.1) 的状态变量  $(x_1, x_3)$  和受控响应系统 (3.2) 的状态变量  $(\hat{x}_1, \hat{x}_3)$  的相图 (如图 3 所示), 其中实线图表示驱动系统的相图, 虚线图表示响应系统的相图.

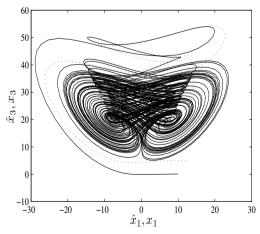


图 3: 驱动系统(3.1)和受控的响应系统(3.2)的相图

由图 3 可知, 驱动系统 (3.1) 和受控的响应系统 (3.2) 在不同的初值条件下, 它们的相图 轨线很快趋于重合, 说明它们实现了同步.

#### 6 结论

根据任意非线性输入输出系统相对阶的定义,给出了 n 维非线性系统反馈线性化的充分必要条件是相对阶 r=n. 也就是说系统的相对阶  $2 \le r < n$  时,系统可部分状态线性化;系统没有相对阶时,系统不能状态线性化. 单参数 Chen 系统具有参数少,混沌行为强,电路实现容易等优点,所以本文根据反馈线性化条件对单参数 Chen 系统进行判断,结果发现单参数 Chen 系统的相对阶 r=2<3,所以只能对单参数 Chen 系统进行部分状态线性化. 当然对任意一个多参数混沌系统,只要其满足反馈线性化条件,就可以对其进行全部状态线性化或部分状态线性化.

基于状态线性化系统,实现混沌系统同步是混沌同步的研究方法之一.同时,控制尽可能少的状态变量,实现混沌系统的全部状态同步是混沌同步控制的不懈追求.一般情况下,要实现混沌系统的全部状态同步,就要对其全部状态变量实施控制.然而对单参数 Chen 系统进行部分状态线性化的过程中,通过对误差系统的分析发现,仅对响应系统的第二个状态变量实施控制,就能实现单参数 Chen 系统的全部状态同步,数值仿真也表明理论分析的正确性和同步控制器的有效性,这也是本文的创新所在.当然对于一个可线性化的多参数混沌系统,是否仅对其一个状态控制就能实现其全部状态同步呢?这要通过对误差系统的具体分析来确定.

#### 参考文献

- [1] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic system[J]. Physical Review Letters, 1990, 64(4): 821–824.
- [2] Wang Yanwu, Guan Zhihong. Generalized synchronization of continuous chaotic system[J]. Chaos, Solitons , Fractals, 2006, 27(1): 97–101.
- [3] Li Zhigang, Xu Daolin. Stability criterion for projective synchronization in three-dimensional chaotic systems[J]. Physical Review Letters, 2001, 282(3): 175–179.
- [4] Hu Mangfeng. Full state hybrid projective synchronization of a general class of chaotic maps[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2008, 13(4): 782–789.
- [5] 李德奎, 张建刚. 时滞和非时滞耦合的驱动响应网络的函数投影同步 [J]. 太原理工大学学报, 2013, 44(2): 162-168.
- [6] Song Zheng. Adaptive modified function projective synchronization of unknown chaotic systems with different order[J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 218(10): 5891–5899.
- [7] 张莉, 安新磊, 张建刚. 一种完全错乱广义投影同步的新方法 [J]. 河北师范大学学报, 2012, 36(5): 461-466.
- [8] 方洁, 姜长生. 错位修正混沌函数投影同步及在保密通信中的应用 [J]. 四川大学学报 (工程科学版), 2011, 43(2): 136-149.
- [9] 刘洪娟, 李亚玲, 于海等. 参数未知的统一混沌系统中的混合同步现象 [J]. 东北大学学报, 2011, 32(10): 1394-1397.
- [10] 韩萍. 基于反馈线性化的 Rössler 混沌系统控制 [J]. 渤海大学学报, 2011, 32(2): 120-123.
- [11] 冯纯伯, 费树岷. 非线性控制系统分析与设计 [M]. 北京: 电子工业出版社: 1998.
- [12] 李德奎, 连玉平. 单参数 Chen 系统的动力学分析及电路实现 [J]. 自动化与仪器仪表, 2014, 3: 93-95.

# PARTIAL STATES LINEARIZED SYNCHRONIZATION OF THE SINGLE PARAMETER CHEN SYSTEM

#### Li De-kui

(Department of Science Teaching, Gansu University of Chinese Medicine, Dingxi 743000, China)

**Abstract:** The partial states linearized synchronization problem of the single parameter Chen system is studied in this paper. By the feedback linearized method and the error analysis of the linearized system, it is found that if only the second state variable of the response system is controlled, all states of the single parameter Chen system can be synchronized. Finally, the numerical simulations show that the theoretical analysis is correct and the synchronization controller is effective.

**Keywords:** relative order; a portion of states linearization; single parameter Chen system; synchronization

2010 MR Subject Classification: 36D06; 34C28.