Vol. 39 (2019)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一类特殊矩阵的逆特征值问题

段复建, 方 甜, 袁 璠
(桂林电子科技大学数学与计算科学学院, 广西 桂林 541004)

摘 要: 本文研究了一类具有特殊形式的矩阵 A 的两个逆特征值问题. 利用箭形矩阵和 Jacobi 矩阵的性质, 将此类矩阵逆特征值问题转换为线性方程组问题, 得到了问题有唯一解的充分必要条件, 给出了解的表达式及相应数值例子, 推广了箭形矩阵和 Jacobi 矩阵逆特征值问题.

关键词: 箭形矩阵; Jacobi 矩阵; 广义箭状矩阵; 逆特征值问题
MR(2010) **主题分类号**: 65J22 **中图分类号**: O151.21
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2019)04-0543-12

1 引言

本文讨论的广义箭形矩阵具有如下形式

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & b_m & & & & \\ b_1 & a_2 & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ b_m & & & a_{m+1} & b_{m+1} & & & \\ & & & b_{m+1} & a_{m+2} & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}, \tag{1.1}$$

其中 $a_i\,(i=2,\cdots,m+1)$ 互不相同, 且 $b_i>0\,(i{=}m+1,\cdots,n-1)$. 当 $m=0$ 时, 具有形式 (1.1) 的矩阵 A 为 Jacobi 矩阵, 而当 $m=n-1$ 时, 矩阵 A 就变成箭形矩阵. Jacobi 矩阵的特征值反问题具有广泛的应用, 关于此类问题研究已取得一些比较好的结果, 详见文献 [1–4]. 箭形矩阵的特征值反问题在现代控制理论中有着广泛的应用, 文献 [5, 6] 分别讨论了对称三对角矩阵和对称爪形矩阵的特征值反问题. 对于一些特殊箭形矩阵的特征值反问题的研究见文献 [7–9]. Gladwell 从力学角度阐述了振动中的一些特征值反问题 [10], 其中弹簧 – 质量系统等振动结构参数识别问题, 往往归结为 Jacobi 矩阵特征值反问题, 星形弹簧质量系统的振动问题则转化为箭形矩阵的特征值反问题.

具有形式 (1.1) 的广义箭形矩阵的特征值反问题在文献 [11–13] 中有讨论, 鉴于上述工作以及此类矩阵的重要性, 本文重点研究具有形式 (1.1) 的广义箭形矩阵的特征值反问题, 我们推广了 Jacobi 矩阵和箭形矩阵逆特征值问题, 提出了两类逆问题, 给出了问题有唯一解的充分必要条件, 给出了解的表达式及相应数值例子.

*收稿日期: 2017-07-09 接收日期: 2018-01-15
基金项目: 国家自然科学基金 (11461015).
作者简介: 段复建 (1965–), 女, 黑龙江黑河, 教授, 主要研究方向: 数值代数与最优化理论.

本文研究广义箭形矩阵的两类逆问题, 即

问题 I 给出三个非零互异实数 λ_1,λ_2,μ 以及三个非零实向量 $x_1=(x_1,\cdots,x_{m+1})^{\mathrm{T}}$, $x_2=(x_{m+1},\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, $y=(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$. 求具有形式 (1.1) 的 n 阶矩阵 A 使得 (λ_1,x_1), (λ_2,x_2), (μ,y) 分别是 $A_{1,m+1}$, $A_{m+1,n}$ 和 A 的特征对.

问题 II 给出两个非零互异实数 λ,μ 和两个非零实向量 $x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},y=(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$, 求具有形式 (1.1) 的矩阵 A 和 A^*, 使得 (λ,x), (μ,y) 分别为矩阵 A,A^* 的特征对.

矩阵 A 的的主子式 $A_{1,m+1},A_{m+1,n}$ 和矩阵 A^* 分别具有如下形式

$$A_{1,m+1}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \ldots & b_{m-1} & b_m \\ b_1 & a_2 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ b_{m-1} & & & a_m & \\ b_m & & & & a_{m+1} \end{bmatrix}, \tag{1.2}$$

$$A_{m+1,n}=\begin{bmatrix} a_{m+1} & b_{m+1} & & & \\ b_{m+1} & a_{m+2} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}, \tag{1.3}$$

$$A^*=\begin{bmatrix} a_1^* & b_1 & \cdots & b_m & & & \\ b_1 & a_2 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ b_m & & & a_{m+1} & b_{m+1} & & \\ & & & b_{m+1} & a_{m+2} & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}, \tag{1.4}$$

其中 $a_i\,(i=2,\cdots,m+1)$ 互不相同, 且 $b_i>0\,(i{=}m+1,\cdots,n-1)$，可知 $A_{1,m+1},A_{m+1,n}$ 分别为箭形矩阵和 Jacobi 矩阵. 式 (1.4) 中除元素 a_1^* 与 a_1 不同外, 其它元素与 (1.1) 式矩阵 A 中元素相同.

现在作如下约定

$$D_i=\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix}(i=m+1,\cdots,n-1), \tag{1.5}$$

$$E_i=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_i & y_i \end{vmatrix}(i=1,2,\cdots,n-1), \tag{1.6}$$

$$d_i=x_iy_i\,(i=1,2,\cdots,n), \tag{1.7}$$

$$\omega{=}x_1x_{m+1}y_{m+2}-x_1x_{m+2}y_{m+1}+x_{m+1}x_{m+2}y_1. \tag{1.8}$$

2 主要结果

下面给出本文将要用到的必要引理.

引理 2.1 [14] 设 λ 为 n 阶 Jacobi 矩阵 J 的特征值, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 为 J 对应于 λ 的特征向量, 则

(1) $x_1x_n\neq 0$;

(2) x 的相邻的两个分量不同时为零;

(3) 若某个 $i\,(1<i<n)$ 使得 x_i=0, 则 $x_{i-1}x_{i+1}<0$.

对于问题 I 给出定理 2.1.

定理 2.1 问题 I 有唯一解的充分必要条件为

(i) $x_i\,(i=m+1,\cdots,n)$ 满足引理 2.1 的条件;

(ii) $\begin{cases} E_i\neq 0\,(i=2,\cdots,m)\,,\omega\neq 0, \\ x_j^2+y_j^2\neq 0\,(j=1,2,\cdots,m,m+2,\cdots n)\,, \\ D_j\neq 0\,(j=m+1,\cdots,n-1)\,; \end{cases}$

(iii) $(\lambda_1-\mu)\sum\limits_{i=1}^{m+1}x_iy_i+b_{m+1}x_{m+1}y_{m+2}=0,(\lambda_2-\mu)\sum\limits_{j=m+1}^{n}x_iy_i+b_mx_{m+1}y_1=0$;

(iv) $\begin{cases} b_{m+1}=\dfrac{\left[-\left(\lambda_1-\lambda_2\right)x_{m+1}y_1+\left(\mu-\lambda_1\right)x_1y_{m+1}\right]x_{m+1}}{\omega}>0, \\ b_i=\dfrac{b_{m+1}D_{m+1}-\left(\lambda_2-\mu\right)\sum\limits_{j=m+2}^{i}d_j}{D_i}>0 \quad (i=m+2,\cdots,n-1)\,, \end{cases}$

且当问题有解时, 解由下式给出

$$
\begin{aligned}
&b_i=\frac{\left(\lambda_1-\mu\right)d_{i+1}}{E_{i+1}}\,(i=1,\ldots,m{-}1)\,,\\
&b_m=\frac{\left[\left(\lambda_1-\lambda_2\right)x_{m+1}y_{m+2}+\left(\mu-\lambda_1\right)x_{m+2}y_{m+1}\right]x_{m+1}}{\omega},\\
&b_{m+1}=\frac{\left[-\left(\lambda_1-\lambda_2\right)x_{m+1}y_1+\left(\mu-\lambda_1\right)x_1y_{m+1}\right]x_{m+1}}{\omega},\\
&b_i=\frac{b_{m+1}D_{m+1}-\left(\lambda_2-\mu\right)\sum\limits_{j=m+2}^{i}d_j}{D_i}\quad(i=m+2,\cdots.n-1)\,,\\
&a_1=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1x_1-\sum\limits_{i=1}^{m}b_ix_{i+1}}{x_1},x_1\neq 0\\[2ex] \dfrac{\mu y_1-\sum\limits_{i=1}^{m}b_iy_{i+1}}{y_1},y_1\neq 0\end{cases},\\
&a_i=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1x_i-b_{i-1}x_1}{x_i},x_i\neq 0\\ \dfrac{\mu y_i-b_{i-1}y_1}{y_i},y_i\neq 0\end{cases}(i=2,\ldots,m)\,,\\
&a_{m+1}=\frac{\lambda_1x_{m+1}x_{m+2}y_1+\left(\lambda_2x_{m+1}y_{m+2}-\mu x_{m+2}y_{m+1}\right)x_1}{\omega},
\end{aligned}
$$

$$a_i=\begin{cases}\dfrac{\lambda_2x_i-b_{i-1}x_{i-1}-b_ix_{i+1}}{x_i},x_i\neq 0,\\ \dfrac{\mu y_i-b_{i-1}y_{i-1}-b_iy_{i+1}}{y_i},y_i\neq 0,\end{cases}\quad i=m+2,\cdots,n-1,$$

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{\lambda_2x_n-b_{n-1}x_{n-1}}{x_n},x_n\neq 0,\\ \dfrac{\mu y_n-b_{n-1}y_{n-1}}{y_n},y_n\neq 0.\end{cases}$$

证 充分性 因 $(\lambda_1,x_1),(\mu,y)$ 分别是 $A_{1,m+1},A$ 特征对, 有 $A_{1,m+1}x_1=\lambda_1x_1$, $Ay=\mu y$.

(1) 当 $2\leq i\leq m$ 时, 有如下线性方程组

$$\begin{cases}b_{i-1}x_1+a_ix_i=\lambda_1x_i,\\ b_{i-1}y_1+a_iy_i=\mu y_i,\end{cases}\quad i=2,\cdots,m,\tag{2.1}$$

由上式消去 a_i, 即 $b_{i-1}E_i=(\lambda-\mu)\,d_i$. 由条件 (ii) $E_i\neq 0\,(i=2,\cdots,m)$, 则 a_i,b_i 有唯一解

$$b_i=\frac{(\lambda-\mu)\,d_{i+1}}{E_{i+1}},\quad i=1,\cdots,m-1,\tag{2.2}$$

$$a_i=\begin{cases}\dfrac{\lambda x_i-b_{i-1}x_1}{x_i},x_i\neq 0,\\ \dfrac{\mu y_i-b_{i-1}y_1}{y_i},y_i\neq 0,\end{cases}\quad i=2,\cdots,m.\tag{2.3}$$

下证 (2.3) 中 a_i 的两个表达式等价, 由 (2.2) 式知

$$\begin{aligned}&\frac{\lambda x_i-b_{i-1}x_1}{x_i}-\frac{\mu y_i-b_{i-1}y_1}{y_i}=\frac{[\lambda x_i-(\lambda-\mu)\,d_i/E_i]\,x_1y_i-[\mu y_i-(\lambda-\mu)\,d_i/E_i]\,y_1x_i}{x_iy_i}\\ =&\frac{(\lambda-\mu)\,x_iy_i-(\lambda-\mu)\,d_i\,(x_1y_i-x_iy_1)\,/E_i}{x_iy_i}=\frac{(\lambda-\mu)\,x_iy_i-(\lambda-\mu)\,d_i}{x_iy_i}=0.\end{aligned}$$

所以 (2.3) 式中 a_i 的两个表达式等价得证.

(2) 当 $i=m+1$ 时, 由 $A_{1,m+1}x_1=\lambda_1x_1,Ay=\mu y,A_{m+1,n}x_2=\lambda_2x_2$ 得下线性方程组

$$\begin{cases}b_mx_1+a_{m+1}x_{m+1}=\lambda_1x_{m+1},\\ b_my_1+a_{m+1}y_{m+1}+b_{m+1}y_{m+2}=\mu y_{m+1},\\ a_{m+1}x_{m+1}+b_{m+1}x_{m+2}=\lambda_2x_{m+1}.\end{cases}\tag{2.4}$$

由条件 (ii) $\omega\neq 0$, 其中 $\omega=x_1x_{m+1}y_{m+2}-x_1x_{m+2}y_{m+1}+x_{m+1}x_{m+2}y_1$, 解得

$$\begin{cases}b_m=\dfrac{[(\lambda_1-\lambda_2)\,x_{m+1}y_{m+2}+(\mu-\lambda_1)\,x_{m+2}y_{m+1}]\,x_{m+1}}{\omega},\\ b_{m+1}=\dfrac{[-(\lambda_1-\lambda_2)\,x_{m+1}y_1+(\mu-\lambda_1)\,x_1y_{m+1}]\,x_{m+1}}{\omega},\\ a_{m+1}=\dfrac{\lambda_1x_{m+1}x_{m+2}y_1+\lambda_2x_1x_{m+1}y_{m+2}-\mu x_1x_{m+2}y_{m+1}}{\omega}.\end{cases}\tag{2.5}$$

(3) 当 $i=1$ 时, 由 $A_{1,m+1}x_1=\lambda_1 x_1, Ay_1=\mu y_1$, 得

$$\left\{\begin{array}{c} a_1x_1+\sum\limits_{i=1}^{m}b_ix_{i+1}=\lambda_1x_1, \\ a_1y_1+\sum\limits_{i=1}^{m}b_iy_{i+1}=\mu y_1, \end{array}\right. \tag{2.6}$$

则有

$$a_1=\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\lambda_1x_1-\sum\limits_{i=1}^{m}b_ix_{i+1}}{x_1}, x_1\neq 0, \\ \dfrac{\mu y_1-\sum\limits_{i=1}^{m}b_iy_{i+1}}{y_1}, y_1\neq 0, \end{array}\right. \tag{2.7}$$

将 $b_i\,(i=1,\cdots,m)$ 的表达式带入 a_1, 利用条件 (iii) 可证得 a_1 的两个表达式都存在则相等.

下证上述表达式相等. 由条件 (iii) 有

$$(\lambda_1-\mu)\sum_{i=1}^{m+1}x_iy_i+b_{m+1}x_{m+1}y_{m+2}=0\Rightarrow(\lambda_1-\mu)\sum_{i=1}^{m}x_iy_i+b_mE_{m+1}=0,$$

则有

$$(\lambda_1-\mu)\,d_1+\sum_{i=1}^{m-1}b_iE_{i+1}+b_mE_{m+1}=0\Rightarrow(\lambda_1-\mu)\,d_1+\sum_{i=1}^{m}b_iE_{i+1}=0,$$

则可推出

$$\lambda_1x_1y_1-\sum_{i=1}^{m}b_ix_{i+1}y_1=\mu x_1y_1-\sum_{i=1}^{m}b_ix_1y_{i+1}. \tag{2.8}$$

在 (2.8) 式两边同时除以 x_1y_1, 得证 a_1 的两个表达式相等.

(4) 当 $m+2\leq i\leq n-1$ 时, 由 $A_{m+1,n}x_2=\lambda_2x_2, Ay=\mu y$, 得

$$\left\{\begin{array}{c} b_{i-1}x_{i-1}+a_ix_i+b_ix_{i+1}=\lambda_2x_i, \\ b_{i-1}y_{i-1}+a_iy_i+b_iy_{i+1}=\mu y_i, \end{array}\right. \quad i=m+2,\cdots,n-1, \tag{2.9}$$

由上式消去 a_i 得

$$b_{i-1}\left(x_{i-1}y_i-y_{i-1}x_i\right)+b_i\left(x_{i+1}y_i-y_{i+1}x_i\right)=\left(\lambda_2-\mu\right)x_iy_i,$$

即为 $b_iD_i=b_{i-1}D_{i-1}-(\lambda_2-\mu)\,d_i$. 递推可得

$$b_iD_i=b_{m+1}D_{m+1}-(\lambda_2-\mu)\sum_{j=m+2}^{i}d_j\,(i=m+2,\cdots.n-1)\,. \tag{2.10}$$

由条件 (ii) $D_i\neq 0$, 则 $a_i,b_i\,(i=m+2,\cdots,n-1)$ 有唯一解且有

$$b_i=\frac{b_{m+1}D_{m+1}-(\lambda_2-\mu)\sum\limits_{j=m+2}^{i}d_j}{D_i},\quad i=m+2,\cdots,n-1,\tag{2.11}$$

$$a_i=\begin{cases}\dfrac{\lambda_2x_i-b_{i-1}x_{i-1}-b_ix_{i+1}}{x_i},x_i\neq 0,\\ \dfrac{\mu y_i-b_{i-1}y_{i-1}-b_iy_{i+1}}{y_i},y_i\neq 0,\end{cases}\quad i=m+2,\cdots,n-1.\tag{2.12}$$

下证式 (2.12) 中 a_i 的两个表达式等价, 由 (2.11), (2.12) 式知

$$\begin{aligned}&\frac{\lambda_2x_i-b_{i-1}x_{i-1}-b_ix_{i+1}}{x_i}-\frac{\mu y_i-b_{i-1}y_{i-1}-b_iy_{i+1}}{y_i}\\=\;&(\lambda_2-\mu)\,d_i-b_{m+1}D_{m+1}+(\lambda_2-\mu)\sum_{j=m+2}^{i-1}d_j+b_{m+1}D_{m+1}-(\lambda_2-\mu)\sum_{j=m+2}^{i}d_j=0,\end{aligned}\tag{2.13}$$

所以 (2.12) 式中 a_i 的两个表达式等价得证.

(5) 当 $i{=}n$ 时, 可得 a_n 的表达式如下

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{\lambda_2x_n-b_{n-1}x_{n-1}}{x_n},x_n\neq 0,\\ \dfrac{\mu y_n-b_{n-1}y_{n-1}}{y_n},y_n\neq 0.\end{cases}\tag{2.14}$$

根据 (2.11) 式, 利用条件 (iii), 可证得 a_n 的两个表达式都存在则相等.

根据条件 (i) 和 (iv) 可知所求 a_i,b_i 满足问题 I 要求, 问题 I 有唯一解, 充分性得证, 且给出解的表达式 (2.2), (2.3), (2.5), (2.7), (2.11), (2.12), (2.14).

必要性 若问题 I 有唯一解, 则上述线性方程组 (2.1), (2.4), (2.6), (2.9) 有唯一解, 则可以推条件 (ii) 成立, 又因为矩阵 A_n 的顺序主子式 $A_{m+1,n}$ 为 Jacobi 矩阵, 若问题 I 有解, 则条件 (i) 和 (iv) 成立. 下证条件 (iii) 成立.

若问题 I 有解则要满足 $A_{1,m+1}x_1=\lambda_1x_1, Ay=\mu y$, 则有

$$\begin{bmatrix}a_1&b_1&\ldots&b_m\\b_1&a_2&&\\\vdots&&\ddots&\\b_m&&&a_{m+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{m+1}\end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{m+1}\end{bmatrix},\tag{2.15}$$

$$\begin{bmatrix}a_1&b_1&\ldots&b_m\\b_1&a_2&&\\\vdots&&\ddots&\\b_m&&&a_{m+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\y_2\\\vdots\\y_{m+1}\end{bmatrix}=\mu\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_{m+1}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\b_{m+1}y_{m+2}\end{bmatrix}.\tag{2.16}$$

在 (2.15) 式两边同时左乘 x_1 得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m+1} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} a_1-\mu & b_1 & \dots & b_m \\ b_1 & a_2-\mu & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b_m & & & a_{m+1}-\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m+1} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_{m+1}y_{m+2} \end{bmatrix}, \tag{2.17}$$

结合式 (2.14), 则式 (2.16) 为 $(\lambda_1-\mu)\sum\limits_{i=i}^{m+1} x_iy_i+b_{m+1}x_{m+1}y_{m+2}=0$. 若问题 I 有解同时需要满足 $A_{m+1,n}x_2=\lambda_2x_2, Ay=\mu y$, 则有

$$\begin{bmatrix} a_{m+1} & b_{m+1} & & \\ b_{m+1} & a_{m+2} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \tag{2.18}$$

$$\begin{bmatrix} a_{m+1} & b_{m+1} & & \\ b_{m+1} & a_{m+2} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{m+1} \\ y_{m+2} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} y_{m+1} \\ y_{m+2} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_my_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} a_{m+1}-\mu & b_{m+1} & & \\ b_{m+1} & a_{m+2}-\mu & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & b_{n-1} & a_n-\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{m+1} \\ y_{m+2} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ = \ & -\begin{bmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} b_my_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

结合式 (2.17), 则式 (2.19) 为 $(\lambda_2-\mu)\sum\limits_{j=m+1}^{n} x_iy_i+b_mx_{m+1}y_1=0$. 条件 (iii) 得证, 即必要性得证.

下面讨论问题 II, 给出定理 2.2.

定理 2.2 问题 II 有唯一解的充分必要条件为

(i) $D_i\neq 0\,(i=1,\cdots,m-1,m+1,\cdots,n-1)\,, E_{m+1}\neq 0, x_i^2+y_i^2\neq 0\ (i=m+1,\cdots,n)\,,$ $x_1\neq 0,\ y_1\neq 0$;

(ii) $\frac{\lambda-\mu}{D_i}\sum\limits_{j=i+1}^{n} d_j>0\ (i=m+1,\cdots,n-1)$,

且当问题有解时, 解由下式给出

$$
\begin{aligned}
& b_i=\frac{(\lambda-\mu)\, d_{i+1}}{D_i}, \quad i=1, \cdots, m-1, \\
& b_m=\frac{(\lambda-\mu)\, d_{m+1}+b_{m+1} D_{m+1}}{E_{m+1}}=\frac{\lambda-\mu}{E_{m+1}} \sum_{j=m+1}^n d_j, \\
& b_i=\frac{\lambda-\mu}{D_i} \sum_{j=i+1}^n d_j, \quad i=m+1, \cdots, n-1, \\
& a_1=\frac{\lambda x_1-\sum\limits_{i=1}^m b_i x_{i+1}}{x_1}, x_1 \neq 0, a_1^*=\frac{\mu y_1-\sum\limits_{i=1}^m b_i y_{i+1}}{y_1}, y_1 \neq 0, \\
& a_{i+1}=\frac{\mu x_1 y_{i+1}-\lambda x_{i+1} y_1}{E_{i+1}}, \quad i=1, \cdots, m-1, \\
& a_{m+1}=\begin{cases}\dfrac{\lambda x_{m+1}-b_m x_1-b_{m+1} x_{m+2}}{x_{m+1}}, x_{m+1} \neq 0, \\ \dfrac{\mu y_{m+1}-b_m y_1-b_{m+1} y_{m+2}}{y_{m+1}}, y_{m+1} \neq 0,\end{cases} \\
& a_{i+1}=\begin{cases}\dfrac{\lambda x_{i+1}-b_i x_i-b_{i+1} x_{i+2}}{x_{i+1}}, x_{i+1} \neq 0, \\ \dfrac{\mu y_{i+1}-b_i y_i-b_{i+1} y_{i+2}}{y_{i+1}}, y_{i+1} \neq 0,\end{cases} \quad i=m+1, \cdots, n-2, \\
& a_n=\begin{cases}\dfrac{\lambda x_n-b_{n-1} x_{n-1}}{x_n}, x_n \neq 0, \\ \dfrac{\mu y_n-b_{n-1} y_{n-1}}{y_n}, y_n \neq 0 .\end{cases}
\end{aligned}
$$

证 必要性 由于 (λ, x), (μ, y) 分别为 A, A^* 的特征对, 所以有

$$
\begin{cases}Ax=\lambda x, \\ A^* y=\mu y .\end{cases} \tag{2.21}
$$

则上式可表示为

$$
\begin{aligned}
& a_1 x_1+\sum_{i=1}^m b_i x_{i+1}=\lambda x_1, \\
& a_1^* y_1+\sum_{i=1}^m b_i y_{i+1}=\mu y_1,
\end{aligned} \tag{2.22}
$$

$$
\begin{aligned}
& b_i x_1+a_{i+1} x_{i+1}=\lambda x_{i+1},\ i=1, \cdots, m-1, \\
& b_i y_1+a_{i+1} y_{i+1}=\mu y_{i+1}, i=1, \cdots, m-1,
\end{aligned} \tag{2.23}
$$

$$
\begin{aligned}
& b_m x_1+a_{m+1} x_{m+1}+b_{m+1} x_{m+2}=\lambda x_{m+1}, \\
& b_m y_1+a_{m+1} y_{m+1}+b_{m+1} y_{m+2}=\mu y_{m+1},
\end{aligned} \tag{2.24}
$$

$$
\begin{aligned}
& b_i x_i+a_{i+1} x_{i+1}+b_{i+1} x_{i+2}=\lambda x_{i+1}, i=m+1, \cdots, n-2, \\
& b_i y_i+a_{i+1} y_{i+1}+b_{i+1} y_{i+2}=\mu y_{i+1},\ i=m+1, \cdots, n-2,
\end{aligned} \tag{2.25}
$$

$$\begin{aligned} b_{n-1}x_{n-1}+a_nx_n&=\lambda x_n,\\ b_{n-1}y_{n-1}+a_ny_n&=\mu y_n. \end{aligned} \tag{2.26}$$

问题 II 的解等价于求解上述线性方程组

由式 (2.25) 消去 a_n, 由条件 (i) $D_{n-1}\neq 0, x_n^2+y_n^2\neq 0$ 知 b_{n-1}, a_n 有唯一解, 所以有

$$b_{n-1}=\frac{(\lambda-\mu)\,d_n}{D_{n-1}}, \tag{2.27}$$

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{\lambda x_n-b_{n-1}x_{n-1}}{x_n}, x_n\neq 0,\\ \dfrac{\mu y_n-b_{n-1}y_{n-1}}{y_n}, y_n\neq 0.\end{cases} \tag{2.28}$$

利用 (2.26) 式易证明 (2.27) 式中 a_n 的两个表达式等价.

利用式 (2.26) 由条件 (i) 知 $D_i\neq 0$, 则 b_i 有唯一解

$$b_i=\frac{(\lambda-\mu)\,d_{i+1}+b_{i+1}D_{i+1}}{D_i},\quad i=m+1,\cdots,n-2.$$

通过递推得

$$b_i=\frac{\lambda-\mu}{D_i}\left(d_{i+1}+d_{i+2}+\ldots+d_{n-1}\right)+\frac{D_{n-1}}{D_i}b_{n-1}=\frac{\lambda-\mu}{D_i}\sum_{j=i+1}^{n}d_j,\quad i=m+1,\cdots,n-2.$$

结合式 (2.21), 则 b_i 的表达式为

$$b_i=\frac{\lambda-\mu}{D_i}\sum_{j=i+1}^{n}d_j,\quad i=m+1,\cdots,n-1, \tag{2.29}$$

$$a_{i+1}=\begin{cases}\dfrac{\lambda x_{i+1}-b_ix_i-b_{i+1}x_{i+2}}{x_{i+1}}, x_{i+1}\neq 0,\\ \dfrac{\mu y_{i+1}-b_iy_i-b_{i+1}y_{i+2}}{y_{i+1}}, y_{i+1}\neq 0,\end{cases}\qquad i=m+1,\cdots,n-2. \tag{2.30}$$

利用 (2.28) 式易证 (2.29) 式中 a_{i+1} 的两个表达式等价.

由式 (2.23) 以及条件 (i) 知 $E_{m+1}\neq 0$, 则 b_m, a_{m+1} 有唯一解

$$b_m=\frac{(\lambda-\mu)\,d_{m+1}+b_{m+1}D_{m+1}}{E_{m+1}}=\frac{\lambda-\mu}{E_{m+1}}\sum_{j=m+1}^{n}d_j, \tag{2.31}$$

$$a_{m+1}=\begin{cases}\dfrac{\lambda x_{m+1}-b_mx_1-b_{m+1}x_{m+2}}{x_{m+1}}, x_{m+1}\neq 0,\\ \dfrac{\mu y_{m+1}-b_my_1-b_{m+1}y_{m+2}}{y_{m+1}}, y_{m+1}\neq 0.\end{cases} \tag{2.32}$$

利用 (2.30) 式可证 (2.31) 式中 a_{m+1} 的两个表达式等价.

由式 (2.21) 和条件 (i) $x_1\neq 0, x_2\neq 0$, 得

$$a_1=\frac{\lambda x_1-\sum\limits_{i=1}^{m}b_ix_{i+1}}{x_1}, a_1^*=\frac{\mu y_1-\sum\limits_{i=1}^{m}b_iy_{i+1}}{y_1}. \tag{2.33}$$

由条件 (i) 知 $D_i \neq 0\,(i=1,\cdots,m-1)$, 则 b_i, a_{i+1} 有唯一解

$$b_i = \frac{(\lambda-\mu)\,d_{i+1}}{D_i}, \quad i=1,\cdots,m-1, \tag{2.34}$$

$$a_{i+1} = \frac{\mu x_1 y_{i+1} - \lambda x_{i+1} y_1}{E_{i+1}}, \quad i=1,\cdots,m-1. \tag{2.35}$$

充分性得证, 且给出问题 II 解的表达式 (2.27)–(2.35).

必要性 若问题 II 有唯一解, 则上述线性方程组 (2.21)–(2.25) 有唯一解, 则可以推得条件 (i) 成立. 若问题 II 有解, 根据矩阵 A, A^* 的特殊性以及 $b_i\,(i=m+1,\cdots,n-1)$ 的表达式, 则条件 (ii) 成立.

3 算法及数值实验

3.1 算法 1

步骤 1 验算所给 $\lambda_1, \lambda_2, \mu$ 以及三个非零实向量

$$x_1=(x_1,\cdots,x_{m+1})^{\mathrm{T}}, x_2=(x_{m+1},\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}, y=(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$$

是否满足定理 2.1 的条件 (i)–(iv). 是, 则进行下一步; 否则, 停止.

步骤 2 根据定理 2.1 中的公式 (2.2), (2.3), (2.5), (2.7), (2.11), (2.12), (2.14), 求解 a_i, b_i, 形成广义箭形矩阵 A.

例 1 给实数 λ_1=1.0879, λ_2=0.5689, μ=0.9730, $m=3, n=7$ 给定实向量 x_1, x_2, y 如下

$$x_1=(-0.5667, 0.0961, -0.3903, 0.7193)^{\mathrm{T}}, x_2=(0.7193, 0.1702, -0.4556, -0.2676)^{\mathrm{T}},$$
$$y=(0.4109, -0.0752, 0.3080, -0.4426, 0.1225, 0.6568, 0.2972)^{\mathrm{T}}.$$

根据算法 1 中的步骤将 $\lambda_1, \lambda_2, \mu, x_1, x_2, y$ 带入定理 2.1 的条件 (i)–(iv), 验算可知所给数据满足有唯一解的条件, 利用公式 (2.2), (2.3), (2.5), (2.7), (2.11), (2.12), (2.14) 通过 MATLAB 编程计算 a_i, b_i, 形成广义箭形矩阵 A, 得到 A 如下

$$A=\begin{bmatrix} -0.8026 & -0.2651 & 0.9760 & -0.9245 & & & \\ -0.2651 & -0.4763 & & & & & \\ 0.9760 & & -0.3293 & & & & \\ -0.9245 & & & 0.3595 & 0.8852 & & \\ & & & 0.8852 & -0.7269 & 0.9133 & \\ & & & & 0.9133 & 0.4425 & 0.7962 \\ & & & & & 0.7962 & -0.7865 \end{bmatrix}.$$

容易验证 (λ_1, x_1) 是 $A_{1,6}$ 的一个特征对, (λ_2, x_2) 是 $A_{5,10}$ 的一个特征对, (μ, y) 是 A 的一个特征对, 所以 A 是所要求的矩阵.

3.2 算法 2

步骤 1 验算所给数据 λ, μ 和两个非零实向量 $x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, $y=(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$ 是否满足定理 2.2 的要求. 是, 则进行下一步; 否则, 停止.

步骤 2 根据定理 2.2 中公式 (2.27)–(2.35), 求解

$$a_1, a_1^*, a_i\,(i=2,\cdots,n)\,, b_i\,(i=1,\cdots,n-1)$$

分别形成广义箭形矩阵 A, A^*, 使得 (λ, x) 和 (μ, y) 分别为矩阵 A, A^* 的特征对.

例 2 给定实数 $\lambda = -0.5435, \mu = -0.0032, m = 3, n = 7$, 给定实向量 x, y 如下

$$\begin{aligned} x &= (-0.0047, -0.0076, 0.0041, -0.0472, -0.2254, -0.8072, -0.5435)\,, \\ y &= (-0.2201, 0.8056, 0.5498, 0.0149, 0.0056, -0.0016, -0.0032)\,. \end{aligned}$$

根据算法 2 中的步骤将 λ, μ, x, y 带入定理 2.2 中的 (i) 和 (ii), 验算可知所给数据满足有唯一解的条件, 根据式 (2.27)–(2.35), 通过 Matlab 编程计算得到 $a_1, a_1^*, a_i\ (i=2,\cdots,n)$, $b_i\ (i=1,\cdots,n-1)$, 并形成广义箭形矩阵 A 和 A^*, 如下所示

$$A = \begin{bmatrix} -0.3551 & 0.8320 & -0.9977 & -0.0751 & & & \\ 0.8320 & 0.5695 & & & & & \\ -0.9977 & & -0.0573 & & & & \\ -0.0751 & & & -0.9285 & 0.4243 & & \\ & & & 0.4243 & -0.6483 & 0.4609 & \\ & & & & 0.4609 & 0.4435 & 0.7702 \\ & & & & & 0.7702 & -0.0530 \end{bmatrix},$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 0.8903 & 0.8320 & -0.9977 & -0.0751 & & & \\ 0.8320 & 0.5695 & & & & & \\ -0.9977 & & -0.0573 & & & & \\ -0.0751 & & & -0.9285 & 0.4243 & & \\ & & & 0.4243 & -0.6483 & 0.4609 & \\ & & & & 0.4609 & 0.4435 & 0.7702 \\ & & & & & 0.7702 & -0.0530. \end{bmatrix}.$$

易知 (λ, x) 是矩阵 A 的一个特征对, (μ, y) 为矩阵 A^* 的一个特征对, 所以 A, A^* 是所要求的矩阵.

参 考 文 献

[1] Xu S F. An Introduction to inverse algebraic eigenvalue problems [M]. Beijing: Peking University Press, 1998.

[2] Golub. Inverse eigenvalue problems [M]. Oxford: Oxford University Press, 2005.

[3] Peng Z Y, Hu X Y, Zhang L. On the construction of a Jacobi matrix from its mixed-type eigenpairs [J]. Linear Alg. Appl., 2003, 362(3): 191–200.

[4] Bebiano N, Fonseca C M D, Provid ê ncia J D. An inverse eigenvalue problem for periodic Jacobi matrices in Minkowski spaces[J]. Linear Alg. Appl., 2011, 435(8): 2033–2045.

[5] Pickmann H, Soto R L, Salas A M. An inverse eigenvalue problem for symmetrical tridiagonal matrices [J]. Comput. Math. Appl., 2007, 54(5): 699–708.

[6] Peng J, Hu X Y, Zhang L. Two inverse eigenvalue problems for a special kind of matrices [J]. Linear Alg. Appl., 2006, 416(2): 336–347.

[7] 孟纯军, 钟璨, 胡锡炎. 两类对称箭形矩阵的逆问题 [J]. 湖南大学学报 (自然科学版), 2008, 8: 82–84.

[8] Liu Z, Wang K, Xu C. Extremal inverse eigenvalue problem for symmetric doubly arrow matrices[J]. J. Appl. Math. Comput., 2014, 444–445(1): 151–164.

[9] Deng Y B, Xie W S. An inverse eigenvalue problem for periodic arrow-like matrices [J]. J. Hunan Univ., 2012, 39(4): 75–78.

[10] 格拉德威尔. 振动中的反问题 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1991: 20–80.

[11] Wu C H, Lu L Z. Inverse eigenvalue problems for a special class of matrices [J]. J. Xiamen Univ. (Nat. Sci.), 2009, (1): 22–26.

[12] Li Z, Bu C, Wang H. Inverse eigenvalue problem for generalized arrow-like matrices [J]. Appl. Math., 2011, 2: 1443–1445.

[13] Sharma D, Sen M. Inverse eigenvalue Problems for two special acyclic matrices [J]. Math., 2016, 4(1): 12–13.

[14] 戴华, 姚承勇. Jacobi 矩阵逆特征问题解存在的条件 [J]. 高等学校计算数学学报, 2003, 1: 40–49.

INVERSE EIGENVALUE PROBLEMS FOR A CLASS OF SPECIAL MATRICES

DUAN Fu-jian, FANG Tian, YUAN Fan

(*School of Mathematics and Computational Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China*)

Abstract: In this paper, we study two inverse eigenvalue problems of a class of matrix A with special form. By using the properties of arrow matrix and Jacobi matrix, we transform the inverse eigenvalue problem of this kind of matrix into a system of linear equations. The necessary and sufficient conditions for the problem to have a unique solution are obtained, and the expressions of the understanding and the corresponding numerical examples are given, which is a generalization of the inverse eigenvalue problem of the arrow shaped matrix and the Jacobi matrix.

Keywords: arrow matrix; Jacobi matrix; generalized arrow matrix; inverse eigenvalue problem

2010 MR Subject Classification: 65J22